全新升级版

金榜

全国十二大考研辅导机构指定用书

2012 李永乐·王式安考研数学系列

数学全程预测100题

数学一

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100TI (SHUXUEYI)

主编 李永乐 王式安

编委 "高数"：李正元 武忠祥 刘西垣
"线代"：李永乐 "概率论"：王式安

百道题目，精心设置 重点难点，全面覆盖

解答评注，细致入微 综合能力，高效提升

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

全国十二大考研辅导机构指定用书

2012 李永乐·王式安考研数学系列

数学全程预测100题

数学一

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100TI (SHUXUEYI)

主 编　李永乐　王式安

编 委：北京理工大学　王式安
北　京　大　学　刘西垣
北　京　大　学　李正元
清　华　大　学　李永乐
西安交通大学　武忠祥
（按姓氏笔画排序）

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学全程预测100题.1/李永乐主编.一西安:西安交通大学出版社,2010.7
ISBN 978-7-5605-3620-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学一研究生一入学考试一习题 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第128162号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

数学全程预测100题(数学一)

主　　编:李永乐　王式安
策　　划:张伟　陈丽
责任编辑:邹林　田华
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路10号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:7
字　　数:165千字
版　　次:2011年9月第2版
印　　次:2011年9月第1次印刷
书　　号:978-7-5605-3620-0/O·341
定　　价:15.00元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　电话:(010)82570560

前　言

本书是硕士研究生入学考试强化训练阶段的复习用书。本书是针对考生在前一个阶段，对考研数学的常见题型、方法已经进行了复习的基础上设计的重要练习题。它是《数学基础过关660题》的姊妹篇。旨在对考生在考前进行系统综合训练，以期巩固、提高复习成果，帮助考生查漏补缺，进而达到考试要求，增强应试能力，提高考试成绩。

我们在认真研究历年试题和新大纲的基础上，对考试的重点、难点以及对考生经常出现的错误加以剖析和归纳整理，用抓住基础、突出重点的方法，设计出不同解题思路和层次的试题并整合成书。本书**"解答"**——思路清晰、方法步骤详细、解题过程规范；**"评注"**——有针对性地指出该题所考查的知识点(或命题意图)，解题思路归纳总结和延伸，常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，注意扩展考生视野和思路。

数学离不开计算，硕士研究生入学考试也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不能华而不实，眼高手低，丢三落四，犯"低级"错误。

硕士研究生入学考试科目从2003年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了50%，因此数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要。同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历年来差别较大，这说明数学科的考试选拔性质更突出。因此，希望考生要

根据考试大纲认真踏实、全面系统地复习，心态要平和，戒浮躁，要循序渐进，不断积累，步步提高。面对激烈的竞争，望有志者抓紧、抓细、抓早。

同学们在使用本书时，最好能先自己想动手算，不要急于看解答。评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2011年9月

目　录

高等数学

1 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\dfrac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\dfrac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\sin\dfrac{1}{n}$.

2 求极限 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.

3 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{f(x)}$.

4 求极限 $I=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$.

5 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，当 $x\to0$ 时，$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $x^\alpha-\sin x$ 是等价无穷小，求 α 及 $f''(0)$.

6 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\mid x+1\mid}{\ln\mid x\mid} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 的间断点并指出类型.

7 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{(n+1)x}+1}{\mathrm{e}^{nx}+x^n+1}$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出类型.

8 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，且 $f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x)+f(x)\sin x}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=0$，证明：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

9 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\mid x\mid^n+\mathrm{e}^{nx}}$，试讨论 $f(x)$ 的可导性.

10 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$ 其中 $f(t)$ 是可导函数,为了使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续,试确定 k 的值,并对所确定 k 的值,讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

11 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t^3+2t+1\\ t-\displaystyle\int_1^{y+t}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=0\end{cases}$ 所确定,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$;$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

12 设 $\mathrm{e}<a<b$,证明:$a^2<ab\dfrac{\ln a}{\ln b}<b^2$.

13 试确定方程 $\mathrm{e}^x=ax^2\,(a>0)$ 的实根个数.

14 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,$f(0)=f(1)=-1$,$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{2}$,试证至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)+g'(\xi)[f(\xi)-\xi]=1$.

15 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0$,若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $M>0$,$(n>1)$ 证明存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$,使得

$$\frac{1}{f'(\xi)}-\frac{1}{f'(\eta)}=\frac{n}{M}$$

16 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导,$f(a)=f(b)$,且存在一点 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)>f(a)$,试证明存在两点 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$,使 $f''(\xi_1)<0$,$f''(\xi_2)<0$.

17 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

18 设函数 $f(x)$ 非负且连续,并满足 $f(x)\displaystyle\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t=\sin^6 x$,试求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值.

19 已知曲线 $y=f(x)$ 和 $\displaystyle\int_a^{y+x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=2y-\sin x$ 在原点处相切,试求极限

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^{1+a}}\right)^{\frac{1}{f(x)}}$.

20 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(0,0)和(1,2)，且 $a<0$，试确定 a,b,c 的值使该抛物线与 x 轴所围图形 D 的面积最小，并求此图形 D 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

21 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$，$\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

22 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，证明：

1) 方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根；

2) 函数 $|F(x)|$ 在 (a,b) 内有且仅有一个不可导的点.

23 设 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}(x\geqslant 1)$ 试证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且不超过 $1+\frac{\pi}{4}$.

24 在球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 上求点 P，使该球面在点 P 处的切平面与曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的切线垂直.

25 试研究函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在(0,0)处的连续性、可微性及沿各个方向的方向导数的存在性.

26 设 $u=f(x,y,z)$，其中 $f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，$z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 所确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

27 设函数 $\varphi=\varphi(u,v)=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$，其中 $u=x$，$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$，且函数 $z=z(x,y)$ 满

足 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$. 求证$\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}=0$.

28 设函数 $f(u)$ 有连续一阶导数,$f(0)=2$,且 $z=xf(\dfrac{y}{x})+yf(\dfrac{y}{x})$ 满足$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$,求 z 的表达式.

29 求函数 $f(x,y)=xy(a-x-y)$ 的极值.

30 求函数 $z=x^2+12xy+2y^2$ 在 $4x^2+y^2\leqslant 25$ 上的最大值.

31 设函数 $f(x,y)$ 在闭圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续一阶偏导数,且 $|f(x,y)|\leqslant 1$,求证:在开圆域 $x^2+y^2<1$ 内至少存在一点 (x_0,y_0),使 $[f'_x(x_0,y_0)]^2+[f'_y(x_0,y_0)]^2<4$.

32 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D:$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 上具有二阶连续偏导数,在 D 的边界上取零值,且在 D 上有 $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|\leqslant M$,试证:$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\dfrac{M}{4}$.

33 计算线积分 $I=\int_L(\mathrm{e}^{-x^2}\sin x+3y-\cos y)\mathrm{d}x+(x\sin y-y^4)\mathrm{d}y$,其中 L 为从点 $A(-\pi,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{\pi^2-x^2}$ 到点 $B(\pi,0)$ 的弧段.

34 计算三重积分$\iiint\limits_\Omega z^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 围成的有界区域.

35 计算曲面积分$\oiint\limits_\Sigma(xz+y^2z)\mathrm{d}S$,其中 $\sum$ 为平面 $x+y+z=0$ 含在柱面 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分.

36 计算线积分 $I=\int_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中 L 为由点 $A(-1,0)$ 经点 $B(1,0)$ 到点 $C(-1,2)$ 的路径,$\widehat{AB}$ 为下半圆周,$\overline{BC}$ 为直线.

37 设 $f(x,y)$ 在圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上二阶连续可微，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$，计算积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

38 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中

1) $\sum$ 为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

2) $\sum$ 为上半椭球面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}=1(z\geqslant 0)$ 的上侧.

39 设密度为 1 的空间体 Ω 由不等式 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 所确定. 试求 Ω 对直线 $x=y=z$ 的转动惯量.

40 判定下列级数敛散性

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2[\sqrt{3}+(-1)^n]^n}{3^n}$；　　2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

41 设 $u_n=\displaystyle\int_0^1 x(1-x)\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x$，讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.

42 设 $a_n>0,(n\geqslant 1),S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 是收敛的.

43 已知幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，试问幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$ 在 $x=\ln\dfrac{1}{2}$ 处是绝对收敛、条件收敛还是发散?

44 求幂级数 $x+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

45 将函数 $f(x)=|x|\,(-\pi,\pi)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

46 已知方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$,试求方程 $y''+ay'+by=e^x$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$ 的特解.

47 设 $f(x)$ 为$(0,+\infty)$上的连续函数,且 $f(1)=1,\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(x)-1$,求 $f(x)$.

48 已知 $y_1=3,y_2=3+x^2,y_3=3+e^x$ 是某二阶线性非齐次方程的三个特解,求该微分方程及通解.

49 设曲线 L 过点$(1,1)$,L 上任一点 $P(x,y)$ 处的切线交 x 轴于 T,且 $|PT|=|OT|$,试求曲线 L 的方程.

50 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内大于零,且满足微分方程 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$.曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1,y=0$ 围成区域 D 的面积为 2,求:

1) $f(x)$;

2) 使 D 绕 x 轴旋转一周而成旋转体体积为最小的 a.

线性代数

51 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$

(Ⅰ) 证明:$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵;

(Ⅱ) 证明:$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$;

(Ⅲ) 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

52 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶反对称矩阵

(Ⅰ) 证明:对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,恒有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$;

(Ⅱ) 证明:对任何非零实数 k,恒有 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵;

(Ⅲ) 证明:若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,n 必是偶数.

53 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\-1&a&3\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 等价.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

54 已知两个向量组

(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-3,6,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(a,0,b,2)^{\mathrm{T}}$

等价,求 a,b 的值,并写出等价时的线性表达式.

55 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,a,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,5,3,a+11)^{\mathrm{T}}$ 线性相关,而且向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,0,2,b)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

(Ⅰ) 求 a,b 的值;

(Ⅱ) 试将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出;

(Ⅲ) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组,并将向量组中其余向量用该

极大线性无关组线性表出.

56 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是三维向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,证明存在非零向量 $\boldsymbol{\gamma}$,使得 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出,又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出.

当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 时,求出所有的向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

57 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,试讨论向量组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性相关性.

58 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\beta}$ 是任意一个 n 维向量.

(Ⅰ)证明存在不全为 0 的 k_1,k_2,k_3 使得向量组 $k_1\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,k_3\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3$ 仍线性相关;

(Ⅱ)当 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,1,-1,7)^{\mathrm{T}}$ 时,求出所需要的 k_1,k_2,k_3.

59 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是三阶矩阵,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$ 为常数)且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组,并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

60 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4=3\\x_2+x_3-x_4=-1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3+3x_4=b+5\\4x_1+4x_3+(a+6)x_4=16\end{cases}$$

讨论参数 a,b 取何值时,方程组无解、有解;当方程组有解时求出其所有的解.

61 已知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是四阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维列向量,若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是 $(1,2,2,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,4,0)^{\mathrm{T}}$,又 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$,求方程组 $\boldsymbol{Bx}=3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 的通解.

62 已知齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+x_2+ax_4=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\text{和}(\mathrm{II})\begin{cases}x_1-3x_2+bx_3+4x_4=0\\x_1+5x_2+x_3+4ax_4=0\\2x_1-2x_2-x_3+cx_4=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值并求满足 $x_1=x_2$ 的解.

63 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置，$\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量

证明：(Ⅰ) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解；

(Ⅱ) 秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

64 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$

(Ⅰ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，特征向量；

(Ⅱ) 求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

65 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$，若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{0}$.

(Ⅰ) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

(Ⅲ) 求行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$ 的值.

66 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\a&2&a\\1&3&3\end{pmatrix}$ 的特征值有重根.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

(Ⅲ) 判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化，并说明理由.

67 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ a & 2 & a\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 可逆,向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\ b\\ 1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征向量,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

68 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & b & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ 相似,求 a 与 b 的值,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

69 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,有 3 个线性无关的特征向量,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关的列向量,且有

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$

(Ⅰ)求 a 的值.

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和所有的特征向量.

70 设 $\boldsymbol{A}$ 是各行元素之和均为 0 的三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是线性无关的三维列向量,并满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}$.

(Ⅰ)证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和对角矩阵相似;

(Ⅱ)如 $\boldsymbol{\alpha}=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(Ⅲ)用配方法化二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形,并写出所用坐标变换.

71 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,又 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{\alpha}$ 和二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 表达式.

(Ⅱ)用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形并写出所用坐标变换.

(Ⅲ)求 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^6$.

72 已知二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3\,(a<0)$,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化二次型为标准形,并写出所用坐标变换;

(Ⅲ) 如果 $A+kE$ 是正定矩阵,求 k 的值.

73 设 n 元二次型 $x^TAx = a(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+2b(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n)$ 其中 $a>0, b\neq 0$.

(Ⅰ) 若二次型 x^TAx 正定,求 a,b 的值;

(Ⅱ) 当 $n=3$ 时,求正交变换 $x=Qy$ 把二次型 x^TAx 化为标准形;

(Ⅲ) 若 $a=1, b=2$ 指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

74 已知二次型

$x^TAx = x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$x^TBx = x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$

(Ⅰ) 用配方法把二次型 x^TAx 化为标准形,并写出所用坐标变换 $x=Cy$;

(Ⅱ) 计算 $B_1=C^TBC$,并用正交变换把 B_1 化为对角形;

(Ⅲ) 求可逆矩阵 P,使 P^TAP 和 P^TBP 同时为对角矩阵.

75 已知 A 与 B 均为 n 阶正定矩阵,证明 AB 是正定矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.