世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学（上册）

学习辅导与习题解答

（理工类·第五版）

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学（上册）
学习辅导与习题解答
（理工类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（理工类·第五版）（上册）学习辅导与习题解答/吴赣昌主编. —北京：中国人民大学出版社，2018.7
21世纪数学教育信息化精品教材. 大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-25861-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第114787号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
高等数学（上册）学习辅导与习题解答
（理工类·第五版）
吴赣昌　主编
Gaodeng Shuxue (Shangce) Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　　格	148 mm×210 mm　32开本	**版　　次**	2018年7月第1版
印　　张	16.625	**印　　次**	2018年7月第1次印刷
字　　数	628 000	**定　　价**	38.00元

前　言

人大版“21世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新型“立体化教材”。教材自出版以来，历经多次升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育在新时代的教育改革要求，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国600余所高等院校广泛采用。

作者本次启动的“大学数学立体化教材”（第五版）的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件，为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境。

作者本次关于“大学数学立体化教材”（第五版）的改版具体包括：面向普通本科院校的“理工类・第五版”、“经管类・第五版”与“纯文科类・第四版”；面向普通本科少学时或三本院校的“理工类・简明版・第五版”与“经管类・简明版・第五版”；面向专升本或高职本科的“综合类・应用型本科版”；面向高职高专院校的“理工类・高职高专版・第四版”、“经管类・高职高专版・第四版”与“综合类・高职高专版・第三版”。

本次改版的指导思想：为帮助教材用户更好地理解教材中重要的概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验，包括数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D函数图形实验、3D函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等。与教材正文所举示例相比，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大。本系列教材于2017年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验。其中，大部分实验都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中。

为方便同学们使用最新版“大学数学立体化教材”，学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”。该系列教辅书均根据教材章节顺序建设了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的主要知识归纳、典型例题分析与习题解答等内容，而每一章的设计中包括了

该章的教学基本要求、知识点网络图、题型分析与总习题解答。上述设计有助于学生在课后自主研读这些教辅书时，更好更快地掌握所学知识，从而在较短时间内取得好成绩。

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了。事实上，你需要在课后花更多时间主动去做相关训练，才能真正掌握所学知识。而在课后的自学与练习过程中，首先要认真、反复地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解。

与传统的教材与教辅建设缺乏教学互动不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者团队，通过数苑网（www.sciyard.com）为本系列教材的用户提供在线学习服务。另外，用户还可扫描下方二维码并关注“数苑”公众号，通过在线学习栏目获得相关在线服务。

吴赣昌

2018年2月26日

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法. 因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

本章教学基本要求：

1. 深入理解函数的概念，掌握函数的表示法.
2. 熟练掌握函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.
5. 理解数列极限和函数极限（包括左、右极限）的概念，理解数列极限与函数极限的区别与联系.
6. 熟练掌握极限的四则运算法则，熟练掌握两个重要极限及其应用.
7. 理解无穷小与无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法以及利用等价无穷小求极限的方法.
8. 理解函数连续性（包括左、右连续）与函数间断的概念，了解连续函数的性质和初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质（有界性定理、最大最小值定理和介值定理），并能灵活运用连续函数的性质.

§1.1　函　数

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 1-1-1 至表 1-1-4.

表 1-1-1　　**函数的概念**

定义	设 D 是一非空数集，如果 $\forall x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x),\quad x\in D,$ 其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，也记为 D_f. 函数值的全体 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

表示法	(1) 表格法;(2) 图像法;(3) 解析法: 根据函数的解析表达式的形式不同，函数又分为显函数、隐函数和分段函数.
图形	平面点集 $\{(x, y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形. 函数 $y=f(x)$ 的图形一般为平面上的一条曲线.

表 1-1-2　　**函数的特性**

名称	定义	几何直观
有界性	若存在 $M>0$，使得 $\forall x\in D$，恒有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$, 则称 $f(x)$ 有界.	图形介于两直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.
单调性	设 x_1，x_2 为区间 I 内的任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在 I 内单调增加（单调减少）.	从左往右看去，单调增加（单调减少）函数的图形上升（下降）.
奇偶性	设 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)(f(-x)=-f(x))$, 则称 $f(x)$ 为偶函数（奇函数）.	偶函数（奇函数）的图形关于 y 轴对称（关于原点对称）.
周期性	如果存在常数 $T>0$，使得 $\forall x\in D$，恒有 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.	每隔一个周期的图形形状相同.

表 1-1-3　　**数学建模**

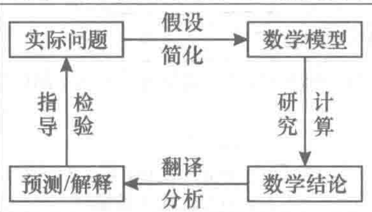
概念	在应用数学解决实际应用问题时，首先要将该问题量化，分析哪些是常量，哪些是变量，然后确定选取哪个作为自变量，哪个作为因变量，最后要把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来，依题意建立起它们之间的数学模型. 建立数学模型的过程称为数学建模.
意义	数学模型的建立有助于我们利用已知的数学工具来探索隐藏其中的内在规律，帮助我们把握现状、预测和规划未来，从这个意义上说，我们可以把数学建模设想为旨在研究人们感兴趣的特定的系统或行为的一种数学构想.
流程图	

表 1-1-4　回归分析

概念	在许多实际问题中，往往只能通过观测或试验获取反映变量特征的部分经验数据，问题要求我们从这些数据出发来探求隐藏其中的某种模式或趋势．如果这种模式确实存在，而我们又能找到近似表达这种趋势的曲线 $y=f(x)$，那么我们一方面可以用这个表达式来概括这些数据，另一方面能够以此预测其他 x 处的 y 值．求这样一条拟合数据的特殊曲线的过程称为回归分析，该曲线称为回归曲线．
步骤	(1) 将实际问题量化，确定自变量和因变量； (2) 根据已知数据作散点图，大致确定拟合数据的函数类型； (3) 通过软件（如 Excel 等）计算，得到函数关系模型； (4) 利用回归分析建立的近似函数关系来预测指定点 x 处的 y 值．

二、典型例题分析

例 1　判断下面各组中的两个函数是否相同，并说明理由．

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$ 与 $g(x)=1-x$．

解　(1) 虽然这两个函数的表现形式不同，但它们的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 与对应法则均相同，所以这两个函数相同．

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$，所以当 $x>1$ 时，$f(x)\neq g(x)$，即这两个函数的对应法则不同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数．

小结：函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素．判断两个函数是否相同时只需比较它们的定义域和对应法则是否相同，而与它们的表现形式没有必然的联系．

例 2　求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域．

解　要使函数 $f(x)$ 有意义，自变量 x 显然要满足：

$$\begin{cases}3-x>0\\ \sin x\neq 0\\ 5+4x-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ x\neq n\pi\\ -1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}\quad (n\in\mathbf{Z}).$$

所以，函数 $f(x)$ 的定义域

$$D_f=\{x\,|\,-1\leqslant x<3,\ x\neq 0\}=[-1, 0)\cup(0, 3).$$

小结：求函数的定义域，即求使函数有意义的变量的范围，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集．解题过程中请熟记常用初等函数的定义域，如表 1-1-5 所示．

表 1-1-5

函数	定义域	零点
$y=\sqrt{x}$	$x\geqslant 0$	$x=0$
$y=\dfrac{1}{x}$	$x\neq 0$	
$y=\ln x$	$x>0$	$x=1$
$y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$x=n\pi, n\in\mathbf{Z}$
$y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}, n\in\mathbf{Z}$
$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}, n\in\mathbf{Z}$	$x=n\pi, n\in\mathbf{Z}$
$y=\arcsin x$	$[-1, 1]$	$x=0$
$y=\arccos x$	$[-1, 1]$	$x=1$
$y=\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$x=0$

例 3　证明 $f(x)=x\cos x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是无界函数.

证　显然，对任意给定的正数 M，都存在一个自然数 k，使

$$2k\pi>M,$$

从而，取 $x_k=2k\pi>M\in(0, +\infty)$，则有

$$|f(x_k)|=|2k\pi|>M.$$

所以，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是无界函数.

小结：根据函数有界性的定义，欲证某函数无界，即要证：$\forall M>0$，$\exists x_0\in D$，使得

$$|f(x_0)|>M,$$

而证明的关键在于找到使 $|f(x_0)|>M$ 的点 x_0.

例 4　判断函数 $y=x+\ln x$ 在指定区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性.

解　任取 $x_1, x_2\in(0, +\infty)$，不妨设 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\ln x_1-x_2-\ln x_2=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=x+\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

小结：判断函数单调性的方法一般有：(1) 利用单调性的定义判断；(2) 利用函数的导数来判断（参见教材第 3 章的有关内容）.

例 5　判断函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ $(-1<x<1)$ 的奇偶性.

解　因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\left[-\ln\frac{1+x}{1-x}\right]=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x).$$

所以，由定义知 $f(x)$ 是偶函数.

小结：判断函数奇偶性时一般先写出 $f(-x)$ 的解析式，然后运用已知条件和计算技巧尽量把 $f(-x)$ 化成与解析式相仿的形式，最后根据定义作出判断. 另外一个有效的方法是做和 $f(x)+f(-x)$ 或做差 $f(x)-f(-x)$，前者等于零，表明 $f(x)$ 是奇函数；后者等于零，表明 $f(x)$ 是偶函数.

例 6　设 $f(x)$ 是以正数 T 为周期的函数，证明 $f(Cx)(C>0)$ 是以 $\dfrac{T}{C}$ 为周期的函数.

证　设 $F(x)=f(Cx)$，则

$$F\left(x+\frac{T}{C}\right)=f\left[C\left(x+\frac{T}{C}\right)\right]=f(Cx+T)=f(Cx)=F(x).$$

所以，$f(Cx)$ 是以 $\dfrac{T}{C}$ 为周期的函数.

小结：对于函数周期性，一般利用定义和周期函数的运算性质进行证明. 证明的关键在于从定义出发构造合适的 T，使得 $f(x+T)=f(x)$.

三、习题 1-1 解答

1. 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；

(5) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$.

解　(1) $\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-1\leqslant x<0\\0<x\leqslant 1\end{cases}$.

定义域 $D=[-1,0)\cup(0,1]$.

(2) 因为 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 3$.

(3) $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\leqslant 3\\ x\neq 0\end{cases}$.

定义域 $D=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 3]$.

(4) $\begin{cases}3-x>0\\ |x|-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ |x|>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ x>1 \text{ 或 } x<-1\end{cases}$.

定义域为 $1<x<3$ 或 $x<-1$.

(5) $\begin{cases}16-x^2>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<x<4\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}$.

定义域为 $1<x<2$ 及 $2<x<4$.

2. 下列各题中，函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；　　(2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

解　(1) 不相同，$\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，而 $2\lg x$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$.

(2) 相同，虽然它们的自变量所用的字母不同，但其定义域和对应法则均相同，如题 2(2) 图所示.

题 2 (2) 图

3. 设 $y=\pi(x)(x\geqslant 0)$ 表示不超过 x 的素数的数量. 对于自变量 $0\leqslant x\leqslant 20$ 的值，作出这个函数的图形.

解　$0\leqslant x\leqslant 20$ 的素数有 2，3，5，7，11，13，17，19.

由函数 $y=\pi(x)\ (x\geqslant 0)$ 的定义，有

当 $0\leqslant x<2$ 时，$\pi(x)=0$；当 $2\leqslant x<3$ 时，$\pi(x)=1$；

当 $3\leqslant x<5$ 时，$\pi(x)=2$；当 $5\leqslant x<7$ 时，$\pi(x)=3$；

当 $7\leqslant x<11$ 时，$\pi(x)=4$；当 $11\leqslant x<13$ 时，$\pi(x)=5$；

当 $13\leqslant x<17$ 时，$\pi(x)=6$；当 $17\leqslant x<19$ 时，$\pi(x)=7$；

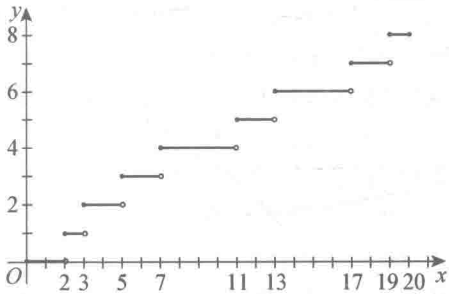
当 $19\leqslant x\leqslant 20$ 时，$\pi(x)=8$.

这是一个分段函数，其图形如题 3 图所示.

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty,\ 1)$；　　(2) $y=2x+\ln x$，$(0,\ +\infty)$.

证　(1) 任取 x_1，$x_2\in(-\infty,\ 1)$，不妨设 $x_1<x_2$，则有



题3图

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=\frac{x}{1-x}$在 $(-\infty,\ 1)$ 内单调增加.

(2) 任取 x_1，$x_2\in(0,\ +\infty)$，不妨设 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=2x_1+\ln x_1-2x_2-\ln x_2=2(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=2x+\ln x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内单调增加.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,\ l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加，证明：$f(x)$ 在 $(-l,\ 0)$ 内也单调增加.

证　任取 x_1，$x_2\in(-l,\ 0)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1$，$-x_2\in(0,\ l)$，且 $-x_2<-x_1$，由于 $f(x)$ 在 $(-l,\ l)$ 内是奇函数，且在 $(0,\ l)$ 内单调增加，因此

$$f(-x_2)-f(-x_1)=-f(x_2)+f(x_1)<0,$$

即　　$f(x_1)<f(x_2)$，

故 $f(x)$ 在 $(-l,\ 0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数的定义域关于原点对称，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证　(1) 设 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 为奇函数，$f_2(x)$，$g_2(x)$ 为偶函数，

$$f_2(-x)+g_2(-x)=f_2(x)+g_2(x),$$

即两个偶函数的和仍为偶函数.

而　　$f_1(-x)+g_1(-x)=-[f_1(x)+g_1(x)]$，

即两个奇函数的和仍为奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 为奇函数，而 $f_2(x)$，$g_2(x)$为偶函数. 因为

$$f_2(-x)\cdot g_2(-x)=f_2(x)\cdot g_2(x),$$

所以两个偶函数的乘积仍为偶函数.

而 $$f_1(-x)\cdot g_1(-x)=[-f_1(x)][-g_1(x)]=f_1(x)\cdot g_1(x),$$

所以两个奇函数的乘积是偶函数.

又 $$f_2(-x)\cdot f_1(-x)=f_2(x)[-f_1(x)]=-f_2(x)\cdot f_1(x),$$

所以奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=\tan x-\sec x+1$；　　(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(3) $y=|x\cos x|e^{\cos x}$；　　(4) $y=x(x-2)(x+2)$.

解　(1) 既非奇函数又非偶函数；(2)，(3) 是偶函数；(4) 是奇函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-1)$；　　(2) $y=x\tan x$；

(3) $y=\sin^2 x$.

解　(1) $y=\cos(x-1)$ 的周期为 2π；(2) $y=x\tan x$ 不是周期函数；

(3) $y=\sin^2 x$ 的周期为 π，因为 $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

9. 证明：$f(x)=x\sin x$ 在 $(0，+\infty)$ 上是无界函数.

证　对于任意正数 $M>0$，都存在一个自然数 k，使

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}>M.$$

从而，取 $x_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>M\in(0，+\infty)$，且有

$$|f(x_k)|=\left|2k\pi+\frac{\pi}{2}\right|>M.$$

故 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上无界.

10. 火车站行李收费规定如下：当行李不超过 50kg 时，按每千克 0.15 元收费，当超出 50kg 时，超重部分按每千克 0.25 元收费，试建立行李收费 $f(x)$（元）与行李重量 x（kg）之间的函数关系.

解　依题意，该函数关系是

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 0.15x, & 0<x\leqslant 50 \\ 0.15\times 50+0.25(x-50), & x>50 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.15x, & 0<x\leqslant 50 \\ 7.5+0.25(x-50), & x>50 \end{cases}, \end{aligned}$$

其图形为平面上一折线.

11. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 L 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1 000 台，厂方可获利润多少？

解　(1) 依题意得，$p=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 90-0.01(x-100), & 100<x\leqslant 1\,600.\\ 75, & x>1\,600\end{cases}$

(2) 由 (1) 及已知条件，得

$$L=\begin{cases}30x, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ (31-0.01x)x, & 100<x\leqslant 1\,600.\\ 15x, & x>1\,600\end{cases}$$

(3) 当 $x=1\,000$ 时，$L=(31-0.01\times 1\,000)\times 1\,000=21\,000$ (元).

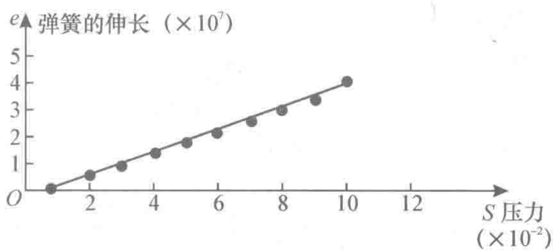
*12. 对给定在弹簧上的压力 S 以每平方英寸磅 (lb/in^2.) 来度量，下表给出了弹簧的伸长 e，以每英寸伸长多少英寸 (in. /in.) 计.

$S\times 10^{-3}$	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$e\times 10^{5}$	0	19	57	94	134	173	216	256	297	343	390

(1) 试构建弹簧的伸长和压力的数目之间的模型.

(2) 预测压力为 200×10^{-3} lb/in^2. 时弹簧的伸长.

解　(1) a. 作散点图，如题 12 图所示，确定函数关系.



题 12 图

由散点图知，S 与 e 之间大致呈线性关系，设为

$$e=aS+b,$$

其中 a，b 为待定常数.

b. 求待定常数 a，b，得到函数关系模型，经计算得

$$a=4\times10^{8},\ b=-2.5\times10^{6},$$

即弹簧的伸长和压力的数目之间的函数模型为

$$e=(4\times10^{8})S-2.5\times10^{6}.$$

(2) 对于 $S=200\times10^{-3}\,\text{lb/in.}^2$，代入函数模型

$$e=(4\times10^{8})S-2.5\times10^{6}$$

可得预测值 $e=7.75\times10^{7}$，即压力为 $200\times10^{-3}\,\text{lb/in.}^2$ 时弹簧的伸长为 7.75×10^{7}(in./in.).

*13. 为了估计山上积雪融化后对下游灌溉的影响，在山上建立了一个观察站，测量了最大积雪深度 (x) 与当年灌溉面积 (y)，得到连续 10 年的数据，见下表：

x	15.2	10.4	21.2	18.6	26.4	23.4	13.5	16.7	24.0	19.1
y	28.6	19.3	40.5	35.6	48.9	45.0	29.2	34.1	46.7	37.4

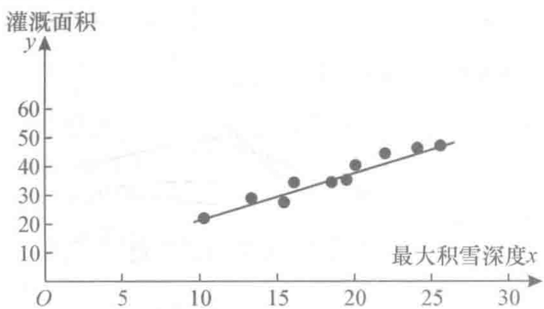
(1) 试确定最大积雪深度与当年灌溉面积间的关系模型；

(2) 试预测当年积雪的最大深度为 27.5 时的灌溉面积.

解　(1) a. 作散点图，确定函数关系. 由散点图 (如题 13 图所示) 可以看出，x 与 y 之间大致为线性关系，设关系式为

$$y=ax+b,$$

其中 a，b 为待定常数.



题 13 图

b. 求待定常数，得到关系模型，经计算得到灌溉面积 y 与最大积雪深度 x