中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院华罗庚数学重点实验室

数学所讲座2015

席南华　张 晓　付保华　王友德　主编

科 学 出 版 社

中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院华罗庚数学重点实验室

数学所讲座 2015

席南华　张　晓　付保华　王友德　主编

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

中国科学院数学研究所一批中青年学者发起组织了数学所讲座，介绍现代数学的重要内容及其思想、方法，旨在开阔视野，增进交流，提高数学修养. 本书的文章系根据 2015 年数学所讲座 9 个报告的讲稿整理而成，按报告的时间顺序编排. 具体内容包括：三维复双有理几何、图论、双哈密顿系统与可积系统、二维共形量子场论、描述集合论、拓扑量子场论和几何不变量、图像恢复问题中的数学方法、湍流、表示论中的狄拉克上同调等.

本书可供数学专业的高年级本科生、研究生、教师和科研人员阅读参考，也可作为数学爱好者提高数学修养的学习读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学所讲座 2015/席南华，张晓，付保华，王友德主编. —北京：科学出版社，2018. 1

ISBN 978-7-03-054615-9

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①席…　Ⅲ. ①数学-普及读物　Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 238249 号

责任编辑：李　欣　赵彦超／责任校对：郭瑞芝
责任印制：肖　兴／封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市书文印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2018 年 1 月第一次印刷　印张：15 3/4　插页：1
字数：299 000

定价：78.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

学术交流对促进研究工作、培养人才有着十分重要的作用, 尤其对以学者个人思维为主要研究方式的数学研究, 作用更显突出. 国际上, 学术水平很高、人才辈出的研究机构与大学, 也总是学术交流活动 (Seminar, Colloquium, Workshop) 十分活跃的地方.

国内现代科学的发展已有百年历史, 学术交流也伴随着产生和发展. 近三十多年改革开放的进程, 大大加速了学术交流与科学的发展. 从数学学科来说, 许多研究机构与大学涉及专门领域的讲座或专题讨论班(Seminar) 一般进行得比较好, 对参加者尤其是青年学者帮助较大, 从而参加者的积极性也比较高. 然而综合性的讨论班 (Colloquium) 情况就有显著的不同, 听众常常感到完全听不懂, 没有什么收获, 不感兴趣. 综合讨论班进行得不理想, 原因可能是多方面的, 例如, 从大学到研究生阶段, 基础就打得比较专门与单一; 研究工作长期局限于自己的专业领域, 对其他方面缺少了解与兴趣; 演讲人讲得过于专业, 没有深入浅出的本领; 听讲人有实用主义的观点, 如果演讲内容与自己的研究工作没有联系, 报告对自己没有直接帮助, 就对演讲不感兴趣, 如此等等. 长期下去, 我们仅仅熟悉自己的研究领域, 对数学的全貌与日新月异的发展缺乏了解. 不同的领域之间, 相当隔膜, 甚至缺乏共同的语言.

这些情况, 与出高质量的研究成果和高水平人才的目标是难以符合的, 也难以形成国际上有吸引力与影响力的数学研究中心. 为此, 中国科学院数学研究所席南华院士与一批出色的中青年学者发起, 组织了数学所讲座, 正是一种适合我国当前情况的综合讨论班. 进行了近两年, 效果是很好的. 演讲人虽然都是各领域的专家, 却做了认真与精心的准备, 将该领域的主要思想、成果、方法, 用深入浅出、通俗易懂的方式介绍给大家. 听众从白发苍苍的老教授到许多中青年学者以及广大的博士后、研究生, 都十分踊跃参加, 普遍感到开拓了视野, 增进了交流, 使学术气氛更为浓郁.

现在, 演讲的学者花费了许多时间与精力, 将演讲正式整理成文, 由科学出版社出版, 这是对我国数学发展很有意义的工作. 认真阅读这些文章, 将使我们对数学的有关领域有扼要的了解, 对数学里的 “真” 与 “美” 有更多的感悟, 提高数学修养, 促进数学研究与人才培养工作.

杨　乐

2011 年 12 月 10 日

前　　言

“数学所讲座” 始于 2010 年, 宗旨是介绍现代数学的重要内容及其思想、方法和影响, 扩展科研人员和研究生的视野, 提高数学修养和加强相互交流, 增强学术气氛. 那一年的 8 个报告整理成文后集成《数学所讲座 2010》, 杨乐先生作序, 于 2012 年由科学出版社出版发行. 2011 年和 2012 年数学所讲座 16 个报告整理成文后集成《数学所讲座 2011—2012》, 于 2014 年由科学出版社出版发行. 2013 年数学所讲座 8 个报告整理成文后集成《数学所讲座 2013》, 于 2015 年由科学出版社出版发行. 2014 年数学所讲座的 8 个报告中的 7 个整理成文后集成《数学所讲座 2014》于 2017 年由科学出版社出版发行. 这些文集均受到业内人士的欢迎. 这对报告人和编者都是很大的鼓励.

本书的文章系根据 2015 年数学所讲座的 9 个报告整理而成, 按报告的时间顺序编排. 如同前面的文集, 在整理过程中力求文章容易读, 平易近人, 流畅, 取舍得当. 文章要求数学上准确, 但对严格性的追求适度, 不以牺牲易读性和流畅为代价.

文章的选题, 也就是报告的主题, 有三维复双有理几何、图论、双哈密顿系统与可积系统、二维共形量子场论、描述集合论、拓扑量子场论和几何不变量、图像恢复问题中的数学方法、湍流、表示论中的狄拉克上同调等. 从题目可以看出, 数学所讲座的主题进一步扩展了, 包含与数学密切相关的力学, 在其他学科中数学的应用等. 数学的应用是极其广泛的, 其他学科不断产生很好的数学问题, 这些对数学的发展都是极其重要的推动力量. 报告内容的选取反映了作者对数学和应用的认识与偏好, 但有一点是共同的, 它们都是主流, 有其深刻性. 希望这些文章能对读者认识现代数学及其应用有益处.

编　者

2017 年 8 月

目　　录

1 从形式化的终极奇点的组合律到复三维精细双有理几何

陈 猛[①]

1.1 问题的背景

本文根据作者在中国科学院数学与系统科学研究院的讲稿整理而成.

1.1.1 序言

设 k 为任何一个特征为零的代数闭域. 射影代数簇, 即指射影空间 $\mathbb{P}_k^n$ (取 Zariski 拓扑, $n > 0$) 中的一个不可约闭子集, 射影代数簇的任意开子集统称为代数簇 (algebraic variety). 双有理几何的根本任务是对 k 上的代数簇集合进行双有理分类. 对任意两个代数簇, 它们相互双有理等价当且仅当它们的有理函数域 (作为 k 上的域扩张) 相互同构. 因此双有理几何的本质是对 k 上的有限生成扩域的集合作域扩张同构分类. 经典的双有理几何可追溯到射影代数曲线及射影代数曲面的分类, 其分类理论接近完美. 近几十年来, 高维双有理分类理论突飞猛进, 给现代双有理几何注入了更强劲的动力.

我们先从回顾代数曲线的分类开始. 设 C 为一条光滑射影曲线, 记 g 为其亏格. 我们知道光滑射影曲线的双有理等价与同构是同一件事, 因此曲线的分类最终归结为研究亏格为 g 的曲线模空间 $\mathcal{M}_g$ 的结构 ($g \geqslant 0$) (读者可参阅《数学所讲座 2013》周坚教授撰写的 "代数曲线的模空间介绍"). 亏格为 0 的光滑代数曲线即为有理直线 $\mathbb{P}_k^1$; 亏格为 1 的曲线称为椭圆曲线, 所有椭圆曲线的同构类集合可以与仿射直线 $\mathbb{A}_k^1$ 上的点一一对应, 因此可简单地说椭圆曲线的模空间 $\mathcal{M}_1$ 是一维的; 亏格 $g \geqslant 2$ 的曲线为一般型曲线, 这类曲线从 "数量" 上看最多, 已知 $\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3$, 研究 $\mathcal{M}_g$ 的结构至今仍是代数几何中极具挑战性的问题之一.

代数曲面的分类理论要比代数曲线的情形复杂得多. 早期的意大利学派对代数曲面的认识已经相当深入, 而现代代数曲面的理论很大程度上得益于小平邦彦 (Kodaira)、彭比埃理 (Bombieri) 和曼福德 (Mumford) 等著名数学家的推动性工作. 华人数学家对代数曲面的发展有重要贡献, 例如, 丘成桐的陈类不等式 $3c_2 - c_1^2 \geqslant 0$ 或 $K^2 \leqslant 9\chi(\mathcal{O})$ (代数几何领域常称之为 "宫冈–丘" 不等式) 和肖刚对于代数曲面

① 复旦大学数学科学学院, 邮编: 200433, mchen@fudan.edu.cn

的 “地理学” 与曲面自同构群的研究工作. 稍稍地专业化一点, 我们来看看代数曲面的分类不变量. 设 S 为一个光滑 (相对) 极小代数曲面, 记 $\mathrm{vol}(S) = K_S^2$ (典范体积), $p_g(S) = h^0(S, K_S)$ (几何亏格), $q(S) = h^1(\mathcal{O}_S)$ (不规则性), $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(S) + p_g(S)$, 这里 K_S 表示 S 的典范除子. 按照小平邦彦维数 $\kappa(S)$ 的取值: $-\infty$, 0, 1 及 2, 代数曲面可分为四大类, 其双有理结构大致如下:

(1) $\kappa = -\infty$. S 同构于有理曲面 $\mathbb{P}_k^2$ ($p_g = q = 0$, $K_S^2 = 9$) 或一条光滑曲线 C 上的直纹面 ($p_g = 0$, $q = g(C)$, $K_S^2 = 8\chi(\mathcal{O}_S)$).

(2) $\kappa = 0$. $K_S^2 = 0$ 且 S 同构于下列四种曲面之一:

(i) $K3$ 曲面. 此类曲面单连通且 $K \sim_{\mathrm{lin}} 0$ ($p_g = 1$, $q = 0$).

(ii) 阿贝尔 (Abelian) 曲面 ($p_g = 1$, $q = 2$, $K \sim_{\mathrm{num}} 0$).

(iii) 恩里克 (Enriques) 曲面 ($p_g = q = 0$, $2K \sim_{\mathrm{lin}} 0$).

(iv) 双椭圆 (bi-elliptic) 曲面. 此类曲面为两条椭圆曲线的积在有限群作用下的商 ($p_g = 0$, $q = 1$).

(3) $\kappa = 1$. S 为椭圆曲面 ($K_S^2 = 0$, $\chi(\mathcal{O}_S) \geqslant 0$). 此类曲面自然具有到一条光滑曲线 C 上的椭圆纤维化结构. 小平邦彦早在 20 世纪 70 年代就对椭圆纤维化的奇异纤维作出了完整分类.

(4) $\kappa = 2$. S 为一般型曲面 ($K_S^2 > 0$, $\chi(\mathcal{O}_S) > 0$). 曲面 “地理学” 表明:

$$2\chi(\mathcal{O}_S) - 6 \leqslant K_S^2 \leqslant 9\chi(\mathcal{O}_S)$$

(左为诺特不等式, 右为宫冈–丘不等式); 曲面 “生物学” (Gieseker 定理) 表明: 满足 $K^2 = a > 0$, $\chi(\mathcal{O}) = b > 0$ (a, b 满足上面两个不等式) 的一般型曲面的模空间 $\mathcal{M}_{a,b}$ 是一个拟射影代数簇. 此外, 彭比埃理完整地研究了多典范映射 $\Phi_{|mK_S|}$ 的性状 (见 [3]); 肖刚估计出了一般型曲面的自同构群的最佳上界 (见 [24], [25]).

代数曲面理论中针对这四大类曲面的分类工作细致而全面, 有兴趣的读者可参阅有关文献 (如 [1] 等). 代数曲面的研究至今依然活跃, 代数曲面理论中还有不少很基本的问题都没有答案.

1.1.2　高维双有理几何概述

纵观代数曲面的研究史, 其核心理论无外乎三个方面: 极小模型理论、多典范线性系统 $|mK|$ ($m \in \mathbb{Z}$) 的几何、模空间 $\mathcal{M}_{a,b}$ 的性质研究 (或曲面的形变分类). 上述三个理论的先后建立和相互渗透才使得人们对代数曲面的理解逐步深入. 著名的 Castelnuovo 定理告诉我们: 一个光滑射影代数曲面为 (相对) 极小曲面的充要条件是它不含自相交数为 -1 的有理曲线 (简称为 (-1)-曲线), 人们自然猜测这样的判别法在高维也有对应法则, 但很多年的尝试均无实质进展, 事实上, 三维以

上的双有理几何与曲面情形有很大差别.

比较早的系统地研究高维双有理几何的数学家至少包括上野健尔 (Kenji Ueno) (见 [22]), 而实质性地开启现代高维双有理几何研究的数学家应该是 Miles Reid, 他于 1980 年发表的著名论文*Canonical 3-folds*[18] 揭示了高维簇的极小模型上应该带有 "典范奇点"(canonical singularities), 这也是高维双有理几何理论远较曲线、曲面理论复杂的关键所在. 从今天的眼光看, Reid 的这篇论文简直就是现代双有理几何的奠基石! 几乎与 Reid 同时, 日本数学家森重文 (Shigefumi Mori) 于 1982 年在《数学年刊》(*Annals of Mathematics*) 上发表了他的著名论文 [16], 论文大致结论为: 从一个非极小的光滑射影三维簇可以实施五大类双有理收缩态射(收缩一些有理曲线), 其中两类目标簇是光滑的, 而另三类目标簇可能带有终极奇点 (terminal singularities). 森重文的论文的重要贡献是他发明了 "锥理论" 来实施收缩, 人们从此找到了 "双有理收缩" 的代数几何机理, "极小模型" 也有了 "数值" 意义上的定义, 即典范除子 K 的数值有效 (numerically effective 或 nef) 性质可以用来定义极小性. 在森重文的开创性工作之后, 川又 (Kawamata)、Reid、Kollár、Shokurov 和森重文等著名代数几何学家的连贯性工作使得三维代数簇的极小模型理论 (minimal model program) 在 1988 年前后被成功地建立起来, 森重文在 1990 年获得菲尔兹奖.

21 世纪初文献 [2] 和 [8] 所证明的对数一般型簇的极小模型存在性结果预示着双有理几何的崭新生命力, 可以预见双有理几何今后几年的发展必将呈现其繁荣和深入. 因四维以上的高维簇不是本讲座的主要内容, 所以我们还是将主要精力集中于介绍三维簇上的精细 (explicit) 双有理几何.

1.1.3 三维代数簇的精细分类问题

在三维簇的极小模型理论建立之后, 分类理论的重点自然应放在极小三维簇的精细结构研究上. 但研究现状是: 三维簇的例子不多、双有理不变量的计算很困难、典范体积不是整数、第二陈不变量 c_2 不易被理解甚至一般情形下的现有定义未必合理等. 这里我们仍然挑选与本课题相关的问题作些介绍, 无意面面俱到.

定义 1.1.1 设 X 为一个正规 (normal) 簇, K_X 为其典范除子. 如果 X 满足下列两个条件:

(1) 存在一个正整数 r 使得 rK_X 为 Cartier 除子;

(2) 存在一个奇点解消 $\pi: Y \to X$ 使得

$$rK_Y = \pi^*(rK_X) + \sum_j a_j E_j$$

且所有 $a_j \geqslant 0$ (相应地, $a_j > 0$), 这里 $\sum_j$ 跑遍 π 的所有例外除子 $\{E_j\}$, 则称 X 仅带有典范奇点 (相应地, 终极奇点).

定义 1.1.2　(1) 一个簇称为是有理因子的 ($\mathbb{Q}$-factorial), 如果其上每个 Weil 除子的某个正整数倍是 Cartier 除子.

(2) 一个射影簇 X 称为极小的 (minimal), 如果它仅带有终极奇点、有理因子的且 K_X 是数值有效的 (即对 X 上的任意一条曲线 C, $(K_X \cdot C) \geqslant 0$).

(3) 一个射影簇 X 称为 (弱) 有理法诺 (Fano) 簇, 如果它仅带有终极奇点、有理因子的且 $-K_X$ 为 (数值有效) 丰富的 (ample).

定义 1.1.3　(1) 对于一个正整数 n, 设 $\mathbb{V}_n = \{n$ 维一般型光滑射影簇 $\}$. $\forall\ X \in \mathbb{V}_n$, 定义典范体积

$$\mathrm{vol}(X) \triangleq \limsup_{m>0} \frac{n!h^0(mK_X)}{m^n}.$$

(2) 定义典范稳定性指数

$$r_s(X) \triangleq \min\{k > 0 | \Phi_{m,X} \text{ 为双有理映射}, \forall\ m \geqslant k\},$$

这里 $\Phi_{m,X}$ 是 X 的 m-典范映射. 定义

$$v_n = \inf\{\mathrm{vol}(X) | X \in \mathbb{V}_n\};$$

$$r_n = \max\{r_s(X) | X \in \mathbb{V}_n\}.$$

我们称 r_n 为第 n 个典范稳定性指数.

公开问题 1.1.4 (见 Kollár-Mori [15, 7.74], Hacon-McKernan [11, Problem, 1.5, Question 1.6])　v_n 和 r_n 的值各为多少?

根据代数曲线理论, 我们知道 $v_1 = 2$ 且 $r_1 = 3$. 著名数学家彭比埃理证明了 $r_2 = 5$, 此外 $v_2 = 1$ 是平凡事实. 本文作者与其合作者的工作 [6]—[8] 表明 $v_3 \geqslant \dfrac{1}{1680}$ 且 $r_3 \leqslant 61$. 当 $n \geqslant 3$ 时, 文献 [11] 中证明了 $v_n > 0$ 且 $r_n < +\infty$. 最近, 本文作者在文献 [10] 证明了 $r_3 \leqslant 57$.

本文的目的是从上述问题的一个侧面介绍我们如何运用奇点的组合性质来撬开估算 v_3 和 r_3 的大门. 值得强调的是, 公开问题 1.1.4 是高维精细双有理几何的根本问题, 它的解决甚至可以影响高维双有理几何的发展方向.

1.2　奇点篮及其组合数学

1.2.1　三维终极奇点

按照森重文[17] 的分类, 三维终极奇点有两类: (I) 终极商奇点; (II) 非商型终

极奇点. 类型 (II) 奇点的分类要复杂很多, 但我们的研究可以不受 (II) 型奇点的具体形态所影响.

任何一个 (I) 型终极奇点形如 $\frac{1}{r}(1,-1,b)$, 它即指解析同构于 $(\mathbb{C}^3,O)$ 在循环群 μ_r 的下列作用下的商 $\mathbb{C}^3/\mu_r$:

$$\varepsilon(x,y,z)=(\varepsilon x,\varepsilon^{-1}y,\varepsilon^b z),$$

这里 $\varepsilon\in\mu_r$ 是一个生成元, r 是一个正整数, b 与 r 互素且 $0<b<r$.

1.2.2 Reid 的奇点篮及黎曼 - 洛克公式

对两个正整数 $b<r$ 且 b 与 r 互素, 以 “(b,r)” 表示一个终极奇点. 一个奇点篮 (basket) B 是指有限个 (I) 型终极奇点 (允许相同) 的组合, 通常可记为

$$B\triangleq\{n_i\times(b_i,r_i)|i\in J,\ n_i\in\mathbb{Z}^+\},$$

这里 n_i 表示权数或重数.

Reid [18, Page 143] 得到了下列类型的黎曼–洛克公式: 对任意带有典范奇点的三维簇 X, 存在一个奇点篮

$$B_X=\{(b_1,r_1),\cdots,(b_s,r_s)\}$$

使得对任意正整数 $m>1$,

$$\chi(X,\mathcal{O}_X(mK_X))=\frac{1}{12}m(m-1)(2m-1)K_X^3-(2m-1)\chi(\mathcal{O}_X)+l(m),\qquad(1.2.1)$$

其中

$$l(m)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{jb_i}(r_i-\overline{jb_i})}{2r_i}.$$

解决公开问题 1.1.4 的关键在于对 Reid 的上述公式实施有效计算, 这正是本文从现在起将要介绍的核心内容.

1.2.3 组合意义下的终极奇点

对两个正整数 $b<r$ (它们不一定互素), 我们仍以 “(b,r)” 表示一个形式上的终极奇点. 一个形式奇点篮是指有限个形式化终极奇点 (可以相同) 的组合, 通常可记为

$$B\triangleq\{n_i\times(b_i,r_i)|i\in J,\ n_i\in\mathbb{Z}^+\},$$

这里 n_i 表示权数或重数. 对两个奇点篮 $B_1=\{n_i\times(b_i,r_i)\}$ 和 $B_2=\{m_i\times(b_i,r_i)\}$, 我们定义篮的 “叠加”:

$$B_1\cup B_2\triangleq\{(n_i+m_i)\times(b_i,r_i)\}.$$

对于一个终极奇点 (b,r), 如果 $b \leqslant \frac{r}{2}$ 且 n 是正整数. 记 $\delta \triangleq \left\lfloor \frac{bn}{r} \right\rfloor$. 则 $\frac{\delta+1}{n} > \frac{b}{r} \geqslant \frac{\delta}{n}$. 定义

$$\Delta^n(b,r) \triangleq \delta bn - \frac{(\delta^2+\delta)}{2}r. \tag{1.2.2}$$

我们可以看出 $\Delta^n(b,r)$ 是一个非负整数. 对一个形式化奇点篮 $B=\{(b_i,r_i)\}_{i\in I}$ 和一个正整数 n, 我们定义 $\Delta^n(B) \triangleq \sum\limits_{i\in I}\Delta^n(b_i,r_i)$. 由定义可知, $\Delta^2(B)=0$. 又直接计算可得

$$\frac{\overline{jb_i}(r_i-\overline{jb_i})}{2r_i} - \frac{jb_i(r_i-jb_i)}{2r_i} = \Delta^j(b_i,r_i),$$

对任意 $j>0$ 和 $i\in I$ 成立. 定义

$$\sigma(B) \triangleq \sum_{i\in I} b_i \quad 以及 \quad \sigma'(B) \triangleq \sum_{i\in I}\frac{b_i^2}{r_i}. \tag{1.2.3}$$

给定奇点篮 $B=\{(b_1,r_1),(b_2,r_2),\cdots,(b_k,r_k)\}$, 称

$$B' \triangleq \{(b_1+b_2,r_1+r_2),(b_3,r_3),\cdots,(b_k,r_k)\}$$

是 B 的挤压篮 (packing basket), 挤压关系记为 $B \succ B'$, 而记号 $B \succcurlyeq B'$ 表示 $B \succ B'$ 或者 $B=B'$. 如果 $b_1r_2-b_2r_1=1$, 称 $B\succ B'$ 是一个基本挤压. 总之, “$\succeq$” 给出奇点篮集合上的一个偏序关系.

引理 1.2.1 (参见 [6, 引理 2.8])　设 $B\succeq B'$ 是奇点篮之间的一个挤压, 则

(1) 对所有 $n\geqslant 2$, $\Delta^n(B)\geqslant\Delta^n(B')$;

(2) 结论 (1) 中等号成立当且仅当 $\frac{b_1}{r_1}$ 和 $\frac{b_2}{r_2}$ 同时落在某个闭区间 $\left[\frac{\delta}{n},\frac{\delta+1}{n}\right]$ 上, 这里 δ 是一个非负整数;

(3) $\sigma(B')=\sigma(B)$ 且$\sigma'(B)=\sigma'(B')+\frac{(r_1b_2-r_2b_1)^2}{r_1r_2(r_1+r_2)}\geqslant\sigma'(B')$. 因此仅当 $\frac{b_1}{r_1}=\frac{b_2}{r_2}$ 时, 等号才能成立.

推论 1.2.2 (参见 [6, 推论 2.9])　对整数 $m>1$, $B=\left\{m\times(b,r)\,\middle|\, b\leqslant\frac{r}{2}, b 与 r 互素\right\}$ 和 $B'=\{(mb,mr)\}$, 则

(i) $\sigma(B')=\sigma(B)$, $\sigma'(B')=\sigma'(B)$;

(ii) 对于任意 $n>0$, $\Delta^n(B')=\Delta^n(B)$.

引理 1.2.3 (参见 [6, 引理 2.11]) 如果 $B=\{(b_1,r_1),(b_2,r_2)\}\succ\{(b_1+b_2,r_1+r_2)\}=B'$ 是一个基本挤压, 即 $b_1r_2-b_2r_1=1$, 那么

$$\Delta^{r_1+r_2}(b_1+b_2,r_1+r_2)=\Delta^{r_1+r_2}(b_1,r_1)+\Delta^{r_1+r_2}(b_2,r_2)-1.$$

1.2.4 奇点篮的典范序列

给定奇点篮 $B=\left\{(b_j,r_j)\,\middle|\, b_j\text{与}r_j\text{ 互素}, b_j\leqslant\frac{r_j}{2}\right\}_{j\in J}$, 我们来定义它的典范序列: $\{\mathscr{B}^{(n)}(B)\}$, 这里 $\mathscr{B}^{(n)}(\cdot)$ 是一个算子.

取集合 $S^{(0)}\triangleq\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geqslant 2}$. 对任意单个奇点 $B_j=(b_j,r_j)\in B$, 我们可以找到唯一的整数 $n>0$ 使得 $\frac{1}{n}>\frac{b_j}{r_j}\geqslant\frac{1}{n+1}$. 则奇点 (b_j,r_j) 可看作为 $B_j^{(0)}\triangleq\{(nb_j+b_j-r_j)\times(1,n),(r_j-nb_j)\times(1,n+1)\}$ 经过一系列挤压得到的. 将 $B_j^{(0)}$ 加起来, 得到 $\mathscr{B}^{(0)}(B)=\{n_{1,2}\times(1,2),n_{1,3}\times(1,3),\cdots,n_{1,r}\times(1,r)\}$, 称为 B 的初始篮. 显然, $\mathscr{B}^{(0)}(B)\succcurlyeq B$. 这样定义出的奇点篮 $\mathscr{B}^{(0)}(B)$ 是由 B 唯一确定的.

考虑集合 $S^{(4)}=S^{(3)}=S^{(2)}=S^{(1)}=S^{(0)}$ 和

$$S^{(5)}\triangleq S^{(0)}\bigcup\left\{\frac{2}{5}\right\},$$

甚至一般地, $S^{(n)}=S^{(n-1)}\bigcup\left\{\frac{i}{n}\right\}_{i=2,\cdots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$. 对 $S^{(n)}$ 中的元素由小到大排序, 记 $S^{(n)}=\{w_i^{(n)}\}_{i\in I}$, 使对所有 i, $w_i^{(n)}>w_{i+1}^{(n)}$, 则我们看到 $\left(0,\frac{1}{2}\right]=\bigcup_i[w_{i+1}^{(n)},w_i^{(n)}]$. 实际上, $w_i^{(n)}=\frac{q_i}{p_i}$, 这里 p_i 与 q_i 互素且 $p_i\leqslant n$; 否则, 对某 $m>n$, $w_i^{(n)}=\frac{1}{m}$.

对上述区间 $[w_{i+1}^{(n)},w_i^{(n)}]=\left[\frac{q_1}{p_1},\frac{q_2}{p_2}\right]$ 的端点, 不难证明: $p_1q_2-p_2q_1=1$.

现在对 $B_i=(b_i,r_i)\in B$, 如果 $\frac{b_i}{r_i}\in S^{(n)}$, 那么定义 $B_i^{(n)}\triangleq\{(b_i,r_i)\}$. 如果 $\frac{b_i}{r_i}\notin S^{(n)}$, 则对于源于 $S^{(n)}$ 的某个区间 $\left[\frac{q_1}{p_1},\frac{q_2}{p_2}\right]$, $\frac{q_1}{p_1}<\frac{b_i}{r_i}<\frac{q_2}{p_2}$. 此时, 可以将 (b_i,r_i) 解压 (unpacking) 为 $B_i^{(n)}\triangleq\{(r_iq_2-b_ip_2)\times(q_1,p_1),(-r_iq_1+b_ip_1)\times(q_2,p_2)\}$. 将 $B_i^{(n)}$ 相加, 我们得到新的奇点篮 $\mathscr{B}^{(n)}(B)$. 根据构造可知, $\mathscr{B}^{(n)}(B)$ 是唯一确定的而且对所有 n, $\mathscr{B}^{(n)}(B)\succcurlyeq B$.

引理 1.2.4 (参见 [6, Claim B]) 对所有 $n\geqslant 1$,

$$\mathscr{B}^{(n-1)}(B)=\mathscr{B}^{(n-1)}(\mathscr{B}^{(n)}(B))\succcurlyeq\mathscr{B}^{(n)}(B).$$