

中国科学技术大学
数学丛书

数学分析讲义

(第一册)

程艺 陈卿 李平
编著

高等教育出版社

数学分析讲义

(第一册)



李平
编著

高等教育出版社·北京

内容简介

《数学分析讲义》共分三册,其中第一、二册涵盖了微积分的基本内容,是理工科一年级各专业学生必须掌握的微积分基础知识。在此基础上,第三册在广度和深度上做进一步增加和提高,满足数学类专业学生的需要。从结构上看,本教材将根据内容编写的“分块式”结构改变为按照层级编写的“分层级”结构,力争适应于当前高等学校“按学科大类招生”和学生“自主选择专业”的需要。本教材已经在中国科学技术大学“少年班”等各类教改试点班试用十多年,取得了较好效果,积累了较丰富的经验。

本册补充了延伸阅读、应用示例和图形动画类数字资源,以二维码或图标  示意。

本教材可供综合性大学数学类专业作为数学分析教材使用,其中前两册可独立地作为理工科各专业关于微积分的教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 第一册 / 程艺, 陈卿, 李平编著

— 北京: 高等教育出版社, 2019. 3

(中国科学技术大学数学丛书 / 马志明主编)

ISBN 978-7-04-051033-1

I. ①数… II. ①程… ②陈… ③李… III. ①数学分析—高等学校—教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 266912 号

策划编辑 田玲
插图绘制 于博

责任编辑 田玲
责任校对 王雨

封面设计 王鹏
责任印制 刘思涵

版式设计 马云

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 河北鹏盛贤印刷有限公司
开本 787mm×960mm 1/16
印张 20.25
字数 370千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2019年3月第1版
印 次 2019年3月第1次印刷
定 价 38.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 51033-00

数学分析讲义

程 艺
陈 卿
李 平

- 1 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1251844>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
- 2 注册并登录, 进入“我的课程”。
- 3 输入封底数字课程账号(20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
- 4 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载 Abook 应用



初等数学
知识补充

<http://abook.hep.com.cn/1251844>

“中国科学技术大学数学丛书”

编审委员会

主 编: 马志明

副主编: 李嘉禹 叶向东

编 委 (按汉语拼音排序):

薄立军 陈发来 陈 卿 程 艺

邓建松 郭文彬 胡 森 李思敏

麻希南 欧阳毅 任广斌 张梦萍

张土生

“中国科学技术大学数学丛书”

总 序

建设世界一流大学的一个首要目标是培养世界一流的学生，一直以来中国科学技术大学（以下简称科大）都把实现这一目标作为我们的崇高使命。教材建设是教书育人的重要方面。为培养适合于现代科技发展的优秀人才，就需要有既尊重教学规律又面向科学前沿的一流教材。本套丛书是我们为中国科学技术大学数学科学学院学生，特别是华罗庚科技英才班学生准备的教材。

本套丛书凝聚科大数学系（学院）数代科大人的心血。华罗庚、关肇直、吴文俊诸先生在科大创校之初教导 58 级、59 级、60 级学生（即著名的华龙、关龙和吴龙）之时，就十分重视教材建设。华罗庚先生编著的《高等数学引论》是高水平数学教材的不朽名著，值得当今每位高等数学教育工作者学习和借鉴。在大师引领之下，科大数学系前辈出版了许多带有鲜明科大特色并受到国内外同行高度认可的教材，比如陈希孺先生的《数理统计学教程》，龚昇先生的《简明微积分》，常庚哲、史济怀先生的《数学分析》，冯克勤等教授的《近世代数引论》，李尚志教授的《线性代数》等。这些教材至今广为使用，为科大带来了崇高声誉。我们这套丛书，就是在科大前辈教材基础上编写而成的。

新世纪以来，特别是 2009 年华罗庚科技英才班创建以来，由于学生基础、兴趣和爱好有所变化，前沿数学发展日新月异，为更好实践数学优秀人才的培养，数学科学学院对数学核心课程教学内容和方式进行调整。为配合这一调整，我们组织教学和科研第一线老师编写了这套教材。

教材建设是为教学服务的。一部好的教材将给学生打开一扇大门，引领学生遨游科学知识的海洋；而坏的教材，则往往粗制滥造，错误极多，非但没有教书育人的作用，而常常有误人子弟的后果。基于此，我们在教材建设上是战战兢兢，如履薄冰，不敢有丝毫马虎。我们的教学内容，经学院全体教授反复讨论达两年时间。编写讲义之时，大量参考了之前的科大教材，甚至直接征询前辈老师的意见。讲义编写好之后，也几经试用，反复修改增删，接受老师、同学的批评建议，历经数年方成书出版。即便如此，教材一定还有不足之处，祈望读者诸君

不吝指出，以便我们提高。

古人有云：“百年之计，莫如树人。”我们希望这套丛书能为培养中国数学拔尖人才略尽绵薄之力，希望中国数学之树“亭亭如盖”。

马志明

2015 年 9 月

前言

当前,高等院校普遍采取“按学科大类招生”的做法,并给予学生在校学习期间“自主选择专业”的机会。一些高校开设了各类“理科实验班”或“英才班”等,试图体现“前期淡化专业,尊重学生选择,强化基础训练”的教育理念。

编者所在的中国科学技术大学(以下简称“中科大”)无疑开了上述改革的先河。自改革开放以来,中科大有一个特殊的群体:“少年班”和“教改试点班”,并在此基础上组成了“少年班学院”。这个群体的特殊性不仅在招生上有别于现行的高考制度,更重要的是在人才培养上,采取更加科学和灵活的方式。概括地说,少年班的培养特色就是在坚持基础知识“宽、厚、实”的原则下,学生入学后不分专业,在一年级或二年级以后根据个人兴趣和志向,在全校范围内自主选择专业。2003年,中科大把在少年班试点取得的经验和做法推广到全校。也就是说中科大的学生,不但按大类招生入学,进校一年以后还可以跨学科自主调整专业。这些改革,激发了学生学习的主动性,发挥了学生的特长,体现了“因材施教”的教育理念。但是,这些改革举措对课程体系结构提出了新要求,尤其是按专业设置基础课程的传统已经不能适应上述改革的需要。

如同其他大学一样,中科大关于微积分的课程分为数学类专业的数学分析和非数学类专业的微积分(或称为高等数学),并分别有各自的教材。数学分析讲授三个学期,学分为16($=6+6+4$),总课时为320。非数学类专业的微积分讲授两个学期,学分为12($=6+6$),总课时为240。对少年班的学生,不管今后选择什么专业,其数理基础课程基本上采取了“数学系的数学+物理系的物理”的模式。这样的设置方式和做法,虽然取得了较好效果,但确实为跨学科选择专业的学生带来了课程体系的冲突,也加重了学生的学业负担。

从另一个角度看,随着高等教育进入“大众化”并逐步迈向“普及化”,一些高校的学生数大幅增加,学生的价值取向越来越多元化。鉴于这种情况,作为大学理工科各专业必修的微积分课程,既不可能继续按照专业进行“细分”,更不能因为“通识性”而“泛化”。

2005年,在长期教学实践的基础上,中科大数学系组成了专门的课程组,开

始尝试对少年班学院的数学分析课程体系结构进行改革和实践。改革的目的是, 一是为了适应不同兴趣志向的学生自主选择专业的灵活性; 二是要确保选择不同专业的学生具有扎实和系统的微积分基础知识, 确保选择数学类专业学生具有较强的分析能力; 三是进一步创新数学分析课程体系结构, 按照循序渐进的原则, 使其有利于初学者掌握并逐步深入, 同时完善与其他课程衔接的连贯性。改革的方法是, 改过去按内容“分块式”讲授为“分层级”讲授, 即第一和第二学期为“基础 (basic)”层级, 讲授微积分基本内容, 满足理工科所有学生需要; 第三学期为“提高 (advanced)”层级, 满足选择数学类专业学生的需要。

从结构上的“分块式”向“分层级”转变, 已经不是简单的调整教学内容的问题了。关键是如何把一个完整的课程分为两个层级, 既要保证各章节内容的逻辑性, 还要保证整体水平不降低; 既要保证基础层级的相对完整性, 又要使得提高层级在内容、方法和观念的广度和深度上有所提高。真正做到“放要放得下, 拿要拿得起”。经过十多年的实践, 中科大已经积累了较好的经验, 按照分层级结构编写的《数学分析讲义》也日臻成熟。

本教材的编写按照上述基础和两个层级的总体思路, 共分为三册, 其中基础层级 (第一册和第二册) 的内容, 是理工科各专业一年级学生必须掌握的微积分基础知识, 主要面向理工科一年级学生, 讲授时间为第一学期和第二学期; 提高层级 (第三册) 主要面向选择数学类专业或对数学特别感兴趣的学生, 开设时间是第三学期。具体内容如下:

第一册: 极限 (含实数简介、数列极限、函数极限等), 单变量函数的连续性 (含闭区间上连续函数的性质、一致连续性等), 单变量函数的微分学 (含导数与微分、微分中值定理、函数的单调性与凸性、Taylor 展开等), 不定积分, 单变量函数的积分学 (含微积分基本定理、函数的可积性、反常积分的定义和计算等), 常微分方程初步 (含可积方程、二阶线性微分方程解的结构、振动方程等), 无穷级数 (含数项级数、函数项级数、幂级数、级数的应用等)。

第二册: 空间解析几何 (含直线与平面、二次曲面、常用坐标系等), 多变量函数的微分学 (含多变量连续函数、函数的微分、隐函数和反函数的微商、多变量函数的 Taylor 展开和极值、空间曲线和曲面、微分形式等), 重积分 (含二重积分、三重积分、多重积分等), 曲线与曲面积分 (含函数在曲线和曲面上的积分、向量场在曲线和曲面上的积分、Gauss-Stokes 定理、微分形式的积分等), Fourier 分析 (含 Fourier 级数及其收敛性、平方平均收敛、Fourier 积分和变换等), 反常积分和含参变量积分 (含反常积分的收敛性判别法、反常重积分、含参变量积分及其性质、含参变量反常积分收敛性和一致收敛性、Euler 积分等)。

第三册: 实数理论 (含简单逻辑、无穷集合等预备知识, 实数的完备性, 实

直线的拓扑,实数系的其他等价形式等),连续性和收敛性(含一般集合上函数的连续性、紧致集合上连续性和收敛性、等度连续、连续函数的多项式逼近等),度量空间的连续函数(含度量空间紧致性、连通性),映射与微分(含映射的微分、逆映射定理、隐映射定理和秩定理等),Riemann 积分(含平面上 Jordan 测度、Riemann 积分、可积函数类、多重积分换元等)。

以上内容显示,本教材紧扣微分、积分这一主线,从单变量函数的微分、积分入手,直至一般空间上函数的微分与积分。

本教材的特点主要体现在如下几个方面:

1. 第一册和第二册涵盖了微积分的基本内容,是适合于理工科各专业一年级学生的微积分公共平台。对于选择非数学类专业的学生,在完成第一册和第二册的学习之后,已具备甚至超过传统微积分或高等数学的知识水平,可不再选修第三册。对于选择数学类专业的学生,在学习前两册的基础之上,继续学习第三册,可使数学分析的水平总体达到甚至超过通过传统方式所达到的水平。

2. 第一册和第二册突出微积分的基本思想、基本内容、基本计算和推导,保持相对的完整性。删繁就简,又不失逻辑的严密性。难度适中,易于初学者学习和掌握。第三册无论是内容上、观点上还是方法上都是前两册的拓展和提升,具有一定的开放性。例如,关于“实数理论”的处理,在第一册中的开篇,只做实数的简单介绍,便于后续课程讲授;而在第三册第 14 章中再做系统阐述。关于连续性和收敛性,无论是单变量还是多变量情形,无论是数项级数还是函数项级数,在前两册中主要介绍微积分中的基本内容;在第三册做适当拓展,延伸到紧致集合上的一致收敛性、等度连续、连续函数的多项式逼近以及以 n 维欧氏空间为模型的度量空间上函数的连续性,等等。关于 Riemann 积分,在前两册中主要采用 Darboux 上和与 Darboux 下和讨论函数的可积性;在第三册中采用 Jordan 测度定义积分,讨论可积函数类。关于重积分的换元,在第二册中只就二重和三重情形做简单描述,并强调具体计算;而在第三册中再给出换元公式的详细证明。关于隐函数存在定理和隐函数求导,在第二册中主要针对二维和三维空间情形展开讨论;而在第三册中则从映射的角度,讨论逆映射定理、隐映射定理与秩定理。关于 Fourier 分析的基本内容,已经在第二册第 12 章中呈现;而在第三册中,利用卷积等概念进一步讨论 Fourier 级数各种类型的收敛性。

3. 注重和其他课程的衔接。第一册中的第 6 章“常微分方程初步”,既是积分的应用,又与普通物理等课程衔接,但没有给出“解的存在唯一性”等属于常微分方程课程的内容。第二册第 8 章“空间解析几何”,作为多变量微积分的预备知识,侧重强调“几何属性”,避免与线性代数有关内容重叠。第三册中涉及的“实数理论”“Jordan 测度”“度量空间”等概念、内容以及处理手法,则与数学类

专业后续课程实变函数、泛函分析等做好衔接。

4. 本教材讲授的课时、学分数分别建议如下: 按每学期 20 教学周, 每学分 20 课时 (均含考试周和考试课时) 计算, 第一册和第二册共 240 课时和 12 个学分, 第三册共 80 课时和 4 个学分。教材中提供一些可供选择的讲授内容, 力争适合于不同教学需求。教材中部分打“*”的章节, 以及其他一些章节内容可根据需要在讲课时进行取舍, 不影响内容的完整性。相应的课时数和学分数也可做调整。例如, 第一册第 6 章常微分方程初步, 如果仅仅作为积分的应用, 可以只讲授可微分方程部分。第二册第 8 章空间解析几何, 如果独立开设, 或已纳入线性代数课程, 可以不再讲授。

中国科学技术大学历来高度重视数学基础课程教学。早在校建之初, 著名数学家华罗庚、吴文俊、关肇直等先生亲自为本科生上基础课。华罗庚先生还专门为中科大编写教材 (见华罗庚著、王元校《高等数学引论》)。由曾肯成先生主笔的教材《高等数学讲义》后经几代人不断完善修改, 与龚昇先生主笔的《简明微积分》曾长期作为中科大非数学类专业的教材使用。而何琛、史济怀、徐森林编著的《数学分析》和常庚哲、史济怀编著的《数学分析教程》则是改革开放后中科大数学类专业和少年班长期使用的教材。前辈们的学术思想和学识深深地影响着我們, 前辈们对教学倾注的心血和积累的经验, 是我们的宝贵财富, 前辈们留下的各种版本的教材和讲义, 是我们学习借鉴参考的主要资料。同时, 在编写过程中, 我们也大量参考了国内外与数学分析相关的许多优秀教材和资料。在此恕不一一列名致谢。

本教材在成书之前已经经历了十多年的教学实践。十多年来, 中科大数学系 (学院) 众多老师参与了相关的教学实践, 对初稿提出了编写和修改意见。中科大校领导、教务处以及数学系、数学科学学院历任领导一直对本教材的编写给予大力支持。这本十年磨成的教材, 虽然还有很多不足, 但却是广大同事共同努力的结果, 在此深表感谢。

本教材有关课程和团队曾入选 2005 年“国家精品课程”、2009 年“国家级教学团队”、2013 年“国家级精品资源共享课”等。

由于编者水平有限, 教学实践经验尚待积累, 更重要的是对未来高等教育改革趋势的把握, 对基础课程如何进一步适应教育教学改革的认识还有一定的局限性, 书中缺点和疏漏在所难免, 不当之处还望有关专家和广大读者批评指正。

程艺、陈卿、李平

2018 年 5 月于中国科学技术大学

目 录

第 1 章 极限	1
§1.1 实数	1
1.1.1 整数与有理数	1
1.1.2 十进制小数	2
1.1.3 实数域	3
1.1.4 数轴	3
习题 1.1	4
§1.2 数列极限	5
1.2.1 数列极限的定义	5
1.2.2 收敛数列的性质	9
1.2.3 实数完备性若干等价命题	16
1.2.4 发散到无穷大的数列	22
1.2.5 Stolz 定理	23
习题 1.2	25
§1.3 函数极限	28
1.3.1 函数	28
1.3.2 函数在无穷大处的极限	34
1.3.3 函数在一点处的极限	36
1.3.4 函数极限的性质和运算	39
1.3.5 函数极限存在的判别法	42
1.3.6 两个重要极限	43
1.3.7 无穷大量与无穷小量	46
习题 1.3	50
第 1 章综合习题	52

第 2 章 单变量函数的连续性	55
§2.1 连续函数的基本概念	55
2.1.1 连续的定义	55
2.1.2 左(右)连续与间断	57
2.1.3 连续函数的运算	59
2.1.4 初等函数连续性	60
习题 2.1	61
§2.2 闭区间上连续函数的性质	63
2.2.1 零点定理与介值定理	63
2.2.2 有界性与最大最小值定理	65
2.2.3 一致连续性	67
习题 2.2	70
第 2 章综合习题	71
第 3 章 单变量函数的微分学	72
§3.1 导数	72
3.1.1 导数的定义	72
3.1.2 导数的四则运算	78
3.1.3 复合函数的求导法则	80
3.1.4 反函数的求导法则	83
3.1.5 基本初等函数的导数	86
3.1.6 高阶导数	86
3.1.7 参数方程表示的函数的导数	90
习题 3.1	91
§3.2 微分	94
3.2.1 微分的定义	94
3.2.2 微分的运算与一阶微分形式的不变性	96
习题 3.2	98
§3.3 微分中值定理	98
3.3.1 Fermat 定理和 Rolle 定理	99
3.3.2 微分中值定理	101
3.3.3 导函数的介值性质	104
习题 3.3	106
§3.4 未定式的极限	108
3.4.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限	108

3.4.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	110
3.4.3	其他类型的未定式的极限	112
	习题 3.4	115
§3.5	函数的单调性和凸性	116
3.5.1	函数的单调性与极值	116
3.5.2	函数的凸性和拐点	119
3.5.3	平面曲线的曲率	126
	习题 3.5	129
§3.6	Taylor 展开	130
3.6.1	Taylor 公式	131
3.6.2	余项的表示与估计	133
	习题 3.6	140
	第 3 章综合习题	141
	第 4 章 不定积分	144
§4.1	不定积分及其基本计算方法	144
4.1.1	基本概念	144
4.1.2	换元积分法	147
4.1.3	分部积分法	152
	习题 4.1	154
§4.2	有理函数的不定积分	156
4.2.1	有理函数的不定积分	156
4.2.2	三角函数有理式的不定积分	159
4.2.3	其他类型的初等函数的不定积分	161
	习题 4.2	163
	第 5 章 单变量函数的积分学	164
§5.1	积分	164
5.1.1	积分的定义	164
5.1.2	可积函数类	167
5.1.3	积分的初等例子	169
5.1.4	积分的基本性质	172
5.1.5	微积分基本定理	175
5.1.6	积分的计算	178
5.1.7	用积分定义函数	183
5.1.8	Taylor 展开中余项的积分表示	186

习题 5.1	189
§5.2 函数的可积性	193
5.2.1 函数的可积性	193
5.2.2 可积函数类有关定理和性质的证明	198
习题 5.2	200
§5.3 积分的应用	201
5.3.1 平面曲线的弧长	202
5.3.2 平面图形的面积	204
5.3.3 旋转体的体积	206
5.3.4 旋转体的侧面积	207
5.3.5 变力做功和引力	208
习题 5.3	210
§5.4 反常积分	211
5.4.1 无穷区间上的积分	211
5.4.2 瑕积分	213
5.4.3 反常积分的换元积分和分部积分	214
习题 5.4	217
第 5 章综合习题	218
第 6 章 常微分方程初步	223
§6.1 一阶微分方程	225
6.1.1 分离变量法	225
6.1.2 齐次方程	227
6.1.3 一阶线性方程	229
6.1.4 可降阶微分方程	232
习题 6.1	234
§6.2 二阶线性微分方程	235
6.2.1 二阶线性方程解的结构	236
6.2.2 常数变易法	241
6.2.3 二阶常系数齐次线性微分方程	242
*6.2.4 振动方程的解	245
习题 6.2	247
第 7 章 无穷级数	249
§7.1 数项级数	249
7.1.1 基本概念与性质	249

7.1.2	正项级数的收敛性及其判别法	251
7.1.3	一般级数的收敛性及其判别法	259
7.1.4	级数的乘积	265
*7.1.5	无穷乘积	269
	习题 7.1	270
§7.2	函数项级数	272
7.2.1	收敛性	272
7.2.2	一致收敛性	274
7.2.3	一致收敛级数的性质	278
	习题 7.2	281
§7.3	幂级数和 Taylor 展开式	282
7.3.1	幂级数的收敛区域	282
7.3.2	收敛半径的计算	283
7.3.3	幂级数的性质	285
7.3.4	幂级数的运算	288
7.3.5	函数的 Taylor 展开式	288
	习题 7.3	293
§7.4	级数的应用	295
7.4.1	用级数方法计算积分	295
7.4.2	近似计算	296
7.4.3	微分方程的幂级数解	297
7.4.4	Stirling 公式	300
	习题 7.4	303
	第 7 章综合习题	303

第 1 章 极限

微积分实际上是用微分和积分的方法来研究变量,大体上可分为微分部分、积分部分和它们之间的关系这三个部分.现在公认微积分是由 Newton (牛顿) 和 Leibniz (莱布尼茨) 发明的.微积分的基础是极限理论,在微积分发展初期,极限的概念从逻辑上来说很不严密,从而造成长达两百年之久的争论.直到 19 世纪初 Cauchy (柯西)、Weierstrass (魏尔斯特拉斯)、Riemann (黎曼) 等人在前人工作的基础上逐步完成了极限理论的严格化,这种争论才算结束.极限理论严格化的标志性节点是实数理论的建立,而极限理论的严格化以及后来微积分的进一步发展都离不开对实数集的讨论.

§1.1 实数

有关实数理论的详细讨论将在第三册中展开,这里仅做描述性介绍并陈述一些基本事实.

1.1.1 整数与有理数

自然数是一切数的出发点.通常用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

自然数集对加法运算封闭,即任意两个自然数 a 和 b ,它们的和 $a + b$ 还是自然数.自然数集对减法运算不封闭,对加减法运算封闭的数集是整数集

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\},$$

它是自然数集的一个扩充.如果考虑乘法运算,则整数集对乘法运算封闭,但对乘法运算的逆运算——除法运算不封闭.在整数集中添加整数相除的商,就得