科学新悦读文丛

荣获1994年美国出版商协会专业与学术出版奖

e的故事

一个常数的传奇

第2版

[以]
伊莱·马奥尔
(Eli Maor)
著

周昌智 毛兆荣
译

e:
The Story
of a Number

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

科学新悦读文丛

e的故事

一个常数的传奇

第2版

[以]
伊莱·马奥尔
(Eli Maor)
著

周昌智 毛兆荣
译

e:
The Story
of a Number

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

e的故事 : 一个常数的传奇 : 第2版 / (以) 伊莱•马奥尔 (Eli Maor) 著 ; 周昌智, 毛兆荣译. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2018.11
(科学新悦读文丛)
ISBN 978-7-115-48968-5

Ⅰ. ①e… Ⅱ. ①伊… ②周… ③毛… Ⅲ. ①常数－普及读物 Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第168691号

◆ 著　　　　[以]伊莱•马奥尔（Eli Maor）
译　　　　周昌智　毛兆荣
责任编辑　刘　朋
责任印制　陈　犇

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市祥达印刷包装有限公司印刷

◆ 开本：700 × 1000　1/16
印张：16　　　　2018 年 11 月第 1 版
字数：216 千字　　2018 年 11 月河北第 1 次印刷
著作权合同登记号　图字：01-2017-9224 号

定价：49.00 元

读者服务热线：(010)81055410　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广登字 20170147 号

内容提要

本书从对数和微积分的历史入题，讲述了关于自然常数 e 的许多精彩故事，包括一些有趣的历史人物、历史事件和传说，以及数学、物理、生物、音乐等众多领域中与指数函数 e^x 密切相关的各种现象。与这些故事同时介绍的，还有一些著名公式、定理及法则的证明和推导过程。通过阅读本书，读者对数学及其发展历程将有更深的了解和领悟。

本书适合略具数学基础的读者阅读。

“哲学就记载在我们一直都能看到的这本‘巨著’（我指的是宇宙）之中，但必须先理解其语言并了解其符号才能领会。它是用数学语言记载的，使用的符号则是三角形、圆以及其他几何图形，没有这些，人类对它就一无所知。”

——伽利略·伽利雷，《试金者》（1623）

谨以此书纪念我的父亲理查德·梅茨格与母亲露易丝·梅茨格。

前　言

第一次接触圆周率 π，应该是在我 9 岁或者 10 岁的时候。那一天，我应邀参观父亲朋友的一家工厂。厂房中堆满了各种工具和机器，弥漫着浓重的汽油味。我对这些冷冰冰的家伙毫无兴致，感到百无聊赖。主人似乎敏锐地察觉到了这一点，便把我领到一台有几个调速轮的大机器旁边，然后告诉我，不管轮子多大多小，它们的周长与直径之间的比值总是固定的——约为 $3\frac{1}{7}$。我一下对这个诡异的数充满了好奇，再听他说任何人都无法精确地得到这个比值而只能近似求解时，更是觉得不可思议。这个数非常重要，因此人们专门用一个符号——希腊字母 π 来表示它。我不禁问自己，为什么像圆这么简单的形状会跟这么怪异的数有关联呢？那时的我当然不知道这个怪异的数已经困扰了科学家们近 4000 年，与它相关的某些问题甚至到现在都未曾得到解决。

几年后，我升入高二学习代数，另一个奇怪的数勾起了我的兴趣。那时，对数是代数课程中至关重要的一部分。在那个还不知计算器为何物的年代，对于学习高等数学的人来说，对数表是

不可或缺的。要完成几百道练习题，还无时无刻不提醒自己别查漏一行或查错一列，真是无聊之至。我们使用的对数称为“常用对数”，它们以 10 为底，说它们“常用”倒也非常自然。不过书中竟然还附了一页“自然对数表”。我问老师，还有什么数比 10 作为对数的底更“自然”呢？老师告诉我，还有一个用字母 e 表示的数，其值约为 2.718 28，它是高等数学的基石。为何是这个奇怪的数呢？在高三学习微积分的时候，我才找到了答案。

这也就意味着圆周率 π 还有一位“同门兄弟”，而且它们的值非常接近，所以人们对它们之间的比较在所难免。后来，又经过了几年的大学学习，我才搞明白这两兄弟之间的关系确实很密切，而且它们的关系因为另一个符号 i 的存在而显得更加扑朔迷离。这里的 i 就是著名的“虚数单位”，即 −1 的平方根。至此，这部“数学剧”的所有主角已悉数登场。

圆周率的故事早已广为流传，一来是因为它的历史可以追溯到远古时代，二来则是由于人们无需太高深的数学知识就可以很好地理解它。或许至今还没有任何一本书比彼得·贝克曼的《π 的历史》（*A History of π*）更通俗易懂、恰到好处。常数 e 的知名度则要逊色很多，这不仅是因为它的出现更晚，更因为它与微积分紧密相关（一般认为微积分是通往高等数学的大门）。据我所知，目前还没有哪本有关 e 的历史的书能够与贝克曼的书相媲美，希望本书能够填补这一缺憾。

我希望略具数学知识的读者都能读懂本书所讲述的 e 的故事。在本书中，我会尽量减少纯数学内容，并将一些证明和推导过程放在附录中。此外，我还会讲述一些有趣的历史事件，并简要介绍许多在 e 的发展史上发挥过重要作用的人物，其中有些人在教科书中很少提及。最重要的是，我还想与大家分享从物理、生物到艺术、音乐等多个领域中与指数函数 $y=e^x$ 有关的各种有意思的现象，这些现象远远超出了数学的范畴。

本书的风格与传统微积分教科书多有不同。比如，为了证明函数 $y=e^x$ 的导数与其自身相等，大多数教科书都是首先通过复杂的推导得到公式 $d(\ln x)/dx=1/x$，然后利用反函数的求导法则得到想要的结果。我一直认为

推导过程没必要这么复杂，因为可以直接推导出 $de^x/dx=e^x$（而且速度也要快得多）。具体做法是，首先证明指数函数 $y=b^x$ 的导数与 b^x 成正比，然后寻找合适的 b 值使得比例常数为 1（推导过程见附录 4）。对于高等数学中常见的表达式 $\cos x + i\sin x$，我将其简写为 $\operatorname{cis} x$（读作"ciss x"），希望这种简洁的写法将来能被人们广泛采用。关于圆函数和双曲函数的类比关系研究，最漂亮的一个结果是 1750 年左右文森佐·黎卡提发现的：从几何上将这两个函数中的独立变量解释为面积，可以使这两个函数在形式上的相关性更为直观。教科书中很少提及这一点，本书将在第 12 章和附录 7 中讨论。

我在研究期间发现了一个显而易见的事实：在微积分诞生之前至少半个世纪，常数 e 就已经在数学家的圈子里广为流传了，至少在 1616 年[①]出版的由爱德华·赖特翻译成英文的约翰·纳皮尔的对数著作（《奇妙的对数表的描述》）中已经提到了常数 e。怎么会这样呢？一种可能的解释就是，常数 e 的出现与复利的计算公式有关。一定有某个人（我们无法知道是谁，也不知道确切时间）发现了这个有趣的现象：假设本金为 P，年利率为 r，t 年中每年对 P 计算 n 次复利（n 可以无限增加），则由公式 $S=P(1+r/n)^{nt}$ 计算得到的总资金 S 将趋于某一极限值。而当 $P=1$，$r=1$ 且 $t=1$ 时，这个极限值约等于 2.718。这一来源于经验总结而非严格数学推导的结果，必定深深地震惊了 17 世纪初那些还不知道极限概念的数学家。因此，常数 e 和指数函数 $y=e^x$ 很有可能源自于一个平凡的生活实例：存款生息。然而我们必须看到，另外一些问题（比如双曲线 $y=1/x$ 下方区域的面积）也能引出这个常数，这就给 e 的真实起源蒙上了一层神秘的面纱。我们对 e 的另一用途——用作自然对数的底数——要熟悉得多，但这是到了 18 世纪前半叶才由欧拉完成的，他的工作确立了指数函数在微积分中的核心地位。

尽管很多资料中的信息常有所冲突，尤其是一些重大发现的先后顺序往往众说纷纭，但我在本书中还是会竭尽所能地提供尽可能准确的人名和日期。17 世纪初是数学空前发展的时期，常常会出现这样的情况：多位科学家彼此

① 原书为 1618 年，有误。——译者注

独立地形成相似的想法，并几乎在同一时间得到相近的结果。那个时期将研究成果发表于科学期刊上的做法并不流行，因此一些伟大发现都是通过书信、小册子或小范围发行的书流传于世的，这也使得我们很难判定到底谁才是真正的发现者或发明者。这种混乱的状态在有关微积分创立问题的争论上达到了顶峰——一些顶尖数学家陷入彼此攻击的论战中，英国的数学在牛顿之后的近一个世纪的时间内一直发展缓慢，不能不说与此有很大关系。

作为一名从事过大学各年级数学教学工作的教师，我非常清楚很多学生对数学这门课程持消极态度。造成这种态度的原因是多方面的，但有一点可以确定，那就是我们的教学方式太深奥、太枯燥。我们总是向学生灌输各种公式、定义、定理和证明，却很少提及这些内容的历史发展过程，让人感觉这些内容就像是直接传承给我们的，具有不容置疑的神秘感。了解数学的发展史有助于消除这种神秘感。我在课堂上就常常穿插一些数学史，简单介绍与公式、定理有关的数学家的故事。本书也在一定程度上采用了这种方法，希望能够达到预期的效果。

在这里，我要特别感谢妻子戴利亚在本书撰写过程中给予我无限的帮助和支持，儿子埃亚勒帮我绘制书中的插图。没有他们，也就不会有这本书。

伊莱·马奥尔

1993 年 1 月 7 日于伊利诺伊州斯科基市

目录

CONTENTS

第1章

约翰·纳皮尔

“看起来在数学运算中，最麻烦的莫过于大数字的乘法、除法、开平方和开立方，计算起来特别费事又伤脑筋，于是我开始构思有什么巧妙好用的方法可以解决这些问题。”

——约翰·纳皮尔，《奇妙的对数表的描述》[1]（1614）

在科学史上鲜有像对数这样受到整个科学界狂热追捧的抽象数学概念。人们难以想象，这一天才的创造来源于那个似乎不太靠谱的名叫约翰·纳皮尔的人。[2]

约翰·纳皮尔于1550年（具体日期不详）出生于苏格兰爱丁堡附近的小镇梅奇斯顿，是阿奇博尔德·纳皮尔与其第一任妻子简奈特·波斯维尔之子。约翰早年的生活详情现已不得而知，只知道13岁时他被送往圣安德鲁斯大学学习宗教，后曾旅居国外一段时间。1571年，约翰回到故乡与伊丽莎白·斯特林成婚，他们后来育有两子。1579年，伊丽莎白去世，随后约翰与艾格尼丝·奇泽姆结婚，二人又育有10个子女，其中第二个儿子便是

后来为约翰整理和撰写相关著作的罗伯特·纳皮尔。1608 年，在阿奇博尔德先生去世后，约翰回到了梅奇斯顿，并成为该城堡的第八世领主，直至终老。[3]

纳皮尔早年的职业几乎与他后来在数学上的创举毫无关系。彼时，他热衷于宗教。作为一个狂热的新教徒和教皇的坚定反对者，他在著作《圣约翰启示录的新发现》中发表了自己的观点，直接将矛头指向天主教教会，指责罗马教皇是反基督者，并且要求苏格兰国王詹姆士六世（后来成为英格兰国王詹姆士一世）清除皇室和宫廷里所有的“天主教徒、无神论者和无信仰人士”[4]。与此同时，他还预测最后审判日将会在 1688~1700 年间降临。这本书先后被翻译成多种语言，共有 21 个版本（在他有生之年就有 10 个版本），这也让他意识到自己还是能够“名垂青史”的。

然而，纳皮尔的兴趣并不仅仅局限于宗教。作为一个地主，他还需要关心如何提高农作物及禽畜的产量，为此他尝试用不同的盐分和肥料来使土壤变得肥沃。1579 年，他发明了一种可以控制煤矿中水位的水压泵。他的另一个浓厚兴趣则是军事，也难怪传言在西班牙国王菲利普二世即将侵略英格兰的时候，他企图依照 1800 年前阿基米德保卫锡拉库扎的计划设计出使敌舰着火的巨镜。他想建造一种可以“清除方圆 4 英里（约 6.44 千米）之内所有高度超过 1 英尺（30.48 厘米）的生物”的大炮、一种可以“清除周遭所有障碍物”的“带有可移动火力点”的战车，甚至还想制造一种可以“潜行于水下、自带驱动系统并配备其他破敌设施”的装置[5]。尽管迄今为止我们都无法得知当时他是否成功地造出了这些武器，但毋庸置疑，这些武器已经具备了现代兵器的雏形。

也正因为纳皮尔具有如此广泛的兴趣，他才成了许多传奇故事的主人公。他似乎是个爱争论的人，经常卷入与邻里或房客的纠纷中。有一个故事说的是，邻居家的鸽子飞到纳皮尔的地里偷食，纳皮尔为此极为愤怒，于是警告邻居，如果再管不住这些鸽子，他就会逮了它们。邻居并不买账，回应纳皮尔“悉听尊便”。次日，邻居便发现自家的鸽子都半死不活地躺在纳皮

尔家的草坪上，原来鸽子吃过纳皮尔用烈酒泡过的谷物后全部醉倒了。还有一个故事，纳皮尔怀疑他的仆人暗地里偷他的东西。为了找出小偷，纳皮尔宣称自己的黑公鸡有识别罪犯的特异功能。随后，他要求仆人按顺序进小黑屋轻拍黑公鸡的背，当然他私下已在黑公鸡身上涂了一层烟灰。等所有的仆人出门后摊开双手的那一刻，小偷自然原形毕露，因为只有他的手是干净的——不知情的小偷害怕自己的劣迹被发现而不敢触摸那只“神奇”的黑公鸡。[6]

人们早已淡忘了纳皮尔的这些事迹，包括他狂热的宗教信仰。如果说纳皮尔已经名垂青史的话，那绝不是因为他那本畅销书或是他在机械设计方面的天赋，而是他花费了 20 年才形成的抽象数学概念——对数。

16 世纪至 17 世纪初，各科学领域都在蓬勃发展。地理、物理、天文等突破了古老教条的束缚，急剧地改变着人们的世界观。哥白尼的“日心说”在经过与教会近一个世纪的斗争后终于渐渐被人们所接受。1521 年，麦哲伦的环球旅行宣告了游遍地球每个角落的崭新的大航海时代的到来。1569 年，格哈德·麦卡托发表了为世人所称道的新版世界地图，这对当时的航海定向技术产生了巨大的影响。而在同一时期，意大利人伽利略（1564—1642）奠定了力学的基础，德国人约翰尼斯·开普勒创立了行星运动的三大定律，从此彻底颠覆了中世纪希腊的“地心说”。这些科学发展也带来了庞大的数学计算需求，科学家们不得不花大量时间专注于烦琐的数字运算，他们迫切地需要一种新发明，能够将他们从这些烦琐的运算中解救出来。而此时纳皮尔挺身而出，勇挑重担。

我们无法知道纳皮尔开始时是如何想到这一发明的。他既然精通三角学，无疑也应该对下面的公式非常熟悉。

$$\sin A \times \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

这个公式及类似的公式 $\cos A\times\cos B$ 和 $\sin A\times\cos B$ 就是大家所熟知的积化和差（来自希腊语 Prosthaphaeretic，意思是“加法与减法”）公式。这一公式的重要性体现在：两个三角函数的乘积（如 $\sin A\times\sin B$）可以用其他三角函数的和或者差表示 [如 $\cos(A-B)$ 与 $\cos(A+B)$]。而加减运算比乘除运算简便得多，因此这个公式也提供了一种原始的运算优化方法，或许就是这个公式激发了纳皮尔的灵感。

与纳皮尔发明有关的另一个更为直接的因素与几何级数有关，几何级数就是有固定公比的、连续的数值序列，例如序列 1, 2, 4, 8, 16,…就是一个以 2 为公比的几何级数。如果我们将公比表示为 q，则从 1 开始构建得到几何级数 $1, q, q^2, q^3,\cdots$，第 n 项为 q^{n-1}。其实在纳皮尔之前很久，人们就注意到几何级数的各项与相应的幂（或指数）存在简单的对应关系。德国数学家迈克尔·斯蒂弗尔（1487—1567）在他于 1544 年出版的专著《整数算术》（*Arithmetica Integra*）中将这种关系表述为：如果将序列 $1, q, q^2,\cdots$中的任意两项相乘，其结果与我们直接将指数相加所得到的值相同。[7] 例如：$q^2\times q^3=(q\times q)\times(q\times q\times q)=q\times q\times q\times q\times q=q^5$，而直接将指数 2 和 3 相加，我们也会得到相同的结果。与此类似，在两个数相除的时候，将指数相减即可。例如，$q^5/q^3=(q\times q\times q\times q\times q)/(q\times q\times q)=q\times q=q^2=q^{5-3}$。因此，我们得到 $q^m\times q^n=q^{m+n}$ 和 $q^m/q^n=q^{m-n}$。

但随之出现了另外一个问题：当指数项相减，而减数比被减数大时，如 q^3/q^5，按照上述法则表示为 $q^3/q^5=q^{-2}$，而这一情形我们在前文中并未定义。因此，为了解决这一问题，我们定义 q^{-n} 即为 $1/q^n$，于是 $q^{3-5}=q^{-2}=1/q^2$，这样也就与上述结果保持一致了。[8] 同时，我们还定义，在 $m=n$ 时，$q^{m-n}=q^0=1$。这样一来，我们就可以在两个方向上将几何级数扩展为无穷大：$\cdots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0=1, q^1, q^2, q^3,\cdots$。由此可以看出，数列中的每一项可以分别表示为公比 q 的…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …（等差级数，相邻项相差 1）次幂。这就是对数背后的主要思想，但斯蒂弗尔仅仅考虑到指数为整数的情况，而纳皮尔则将指数的范围拓展为连续的值。

他对这一规律的描述为：假如我们能将任何正数写成某个固定值（后来称为底数）的幂，那么计算数的乘除法就可以转换为计算它们指数的加减法。例如，计算一个数的 n 次幂（该数自乘 n 次）等效于将指数相加 n 次（即指数乘以 n）。简而言之，一切算术运算都可以降级为比该运算低一级的运算，从而极大地降低数学运算的复杂度。

为了更形象地描述这一法则的运算规律，我们以 2 为底进一步说明。表 1-1 给出的是以 2 为底，以 n（取 −3～12 的整数）为指数所构成的几何级数。假设我们要用 32 乘以 128，通过查表我们找到相对应的指数分别为 5 和 7，二者之和为 12；在表中反过来找到指数为 12 的数对应于 4 096，这就是我们想要的答案。再举一个例子，如果要计算 4^5，我们会发现 4 对应的指数为 2，因此我们只要用 2 乘以 5 得到 10，然后从表中找到 10 对应的数为 1 024，所以结果就是 $4^5=(2^2)^5=2^{10}=1\ 024$。

表 1-1　2 的幂

n	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

当然，这样精密的计算对纯整数运算而言是没有必要的，但对包括整数和分数在内的任意数的计算则非常实用，前提是要找到一个庞大到无所不包的数表。实现这一方法有两种途径：一是以分数作为指数；二是找到一个足够小的数作为底数，使相应的幂缓慢增长。以分数指数为例，我们定义 $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$（例如$2^{5/3}=\sqrt[3]{2^5}=\sqrt[3]{32}\approx 3.174\ 80$）。但纳皮尔时代的人们还没有认识到这一点[9]，因此他只能选择第二种途径。问题是，选择多小的底数呢？显然不能太小，否则它的幂增长太慢，数表同样会失去实用价值。似乎选择一个接近 1 但又不等于 1 的数比较合适，经过数年的斟酌，纳皮尔决定选用 0.999 999 9，即 $1-10^{-7}$。

但为何偏偏选这个数呢？答案似乎可以解释为纳皮尔想尽量避免使用小数。分数到了纳皮尔时代大概已经被使用了几千年，只不过都写成简分数即