



当代世界中的数学

数学王国的新疆域(二)

朱惠霖 田廷彦○编

SHUXUE WANGGUO DE XINJIANGYU(ER)



非
外
借



当代世界中的数学

数学王国的新疆域(二)

朱惠霖 田廷彦○编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书详细介绍了数学在各个领域的精华应用,同时收集了数学中典型的问题并予以解答,本书适合高等院校师生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

当代世界中的数学. 数学王国的新疆域. 二/朱惠霖,田廷彦编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019. 1

ISBN 978-7-5603-7256-3

I. ①当… II. ①朱… ②田… III. ①数学—普及读物
IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 026678 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 李 欣

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 13.25 字数 259 千字

版 次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-7256-3

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序 言

如今,许多人都知道,国际科学界有两本顶级的跨学科学术性杂志,一本是《自然》(*Nature*),一本是《科学》(*Science*)。

恐怕有许多人还不知道,在我们中国,有两本与之同名的杂志^①,而且也是跨学科的学术性杂志,只是通常又被定位为“高级科普”。

国际上的《自然》和《科学》,一家在英国,一家在美国^②。它们之间,按维基百科上的说法,是竞争关系^③。

我国的《自然》和《科学》,都在上海,它们之间,却有着某种历史上的“亲缘”关系。确切地说,从1985年(那年《科学》复刊)到1994年(那年《自然》休刊)这段时期,这两家杂志的主要编辑人员,原本是在同一个单位、同一幢楼、同一个部门,甚至是在同一个办公室里朝夕相处的同事!

这是怎么回事呢?

这本《自然》杂志,创刊于1978年5月。那个年代,被称为“科学的春天”。3月,全国科学大会召开。科学工作者、教育工作者,乃至莘莘学子,意气风发。在这样的氛围下,《自然》的创刊,是一件大事。全国各主要媒体,都报道了。

这本《自然》杂志,设在上海科学技术出版社,由刚刚复出的资深出版家贺崇寅任主编,又调集精兵强将,组成了一个业务水平高、工作能力强、自然科学各分支齐备的编辑班子。正是这个编辑班子,使得《自然》杂志甫一问世,便不同凡响;没有几年,便蜚声科学界和教育界^④。

1983年,当这个班子即将一分为二的时候,上海市出版局经办此事的一位副局长不无遗憾地说,在上海出版界,还从未有过如此整齐的编辑班子呢!

一分为二? 没错。1983年,中共上海市委宣传部发文,将《自然》杂志调往上海交通大学。为什么? 此处不必说。我只想,这次强制性的调动,却有一项

① 其中的《自然》杂志,在创刊注册时,不知什么原因,将“杂志”两字放进了刊名之中,因此正式名称是《自然杂志》。但在本文中,仍称其为《自然》或《自然》杂志。此外,应该说明,在我国台湾,也有两本与之同名的杂志,均由民间(甚至个人)资金维持。台湾的《自然》,创刊于1977年,系普及性刊物,内容以动植物为主,兼及天文、地理、考古、人类、古生物等,1996年终因财力不济而停办。台湾的《科学》,正式名称《科学月刊》,创刊于1970年,以介绍新知识为主,“深度以高中及大一学生看得懂为原则”,创刊至今,从未脱期,令人赞叹。

② 英国的《自然》,创刊于1869年,现属自然出版集团(Nature Publishing Group),总部在伦敦。美国的《科学》,创刊于1880年,属美国科学促进会(American Association for the Advancement of Science),总部在华盛顿。

③ 可参见 [http://en.wikipedia.org/wiki/Science_\(journal\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Science_(journal))。

④ 可参见《瞭望东方周刊》2008年第51期上的“一本科普杂志的30年‘怪现象’”一文。

十分温情的举措,即编辑部每个成员都有选择去或不去的权利.结果是,大约一半人选择去交通大学,大约一半人选择不去,留在了上海科学技术出版社.

我属去的那一半.留下的那一半,情况如何,一时不得而知.但是到1985年,便知道了:他们组成了《科学》编辑部,《科学》杂志复刊了!

《科学》,创刊于1915年1月,是中国历时最长、影响最大的综合性科学期刊,对于中国现代科学的萌发和成长,有着独特的贡献.中国现代数学史上有一件一直让人津津乐道的事:华罗庚先生当年就是在这本杂志上发表文章而崭露头角的.《科学》于1950年5月停刊,1957年复刊,1960年又停刊.1985年的这次复刊,其启动和运作,外人均不知其详,但我相信,留下的原《自然》杂志资深编辑,特别是吴智仁先生和潘友星先生,无疑是起了很大的甚至是主要的作用的.复刊后的《科学》,由时为中国科学院副院长的周光召任主编,上海科学技术出版社出版.

于是,原来是一个编辑班子,结果分成两半(各自又招了些人马),一半随《自然》杂志披荆斩棘,一半在《科学》杂志辛勤劳作.

《自然》杂志去交通大学后,命运多舛.1987年,中共上海市委宣传部又发文:将《自然》杂志从交通大学调出,“挂靠”到上海市科学技术协会,属自收自支编制.至1993年底,这本杂志终因入不敷出,编辑流失殆尽(整个编辑部,只剩我一人),不得不休刊了.1994年,上海大学接手.原有人员,先后各奔前程.《自然》与《科学》的那种“亲缘”关系,至此结束.

这段多少有点辛酸的历史,在我编这本集子的过程中,时时在脑海里浮现,让我感慨,让我回味,也让我思索……

好了,不管怎么说,眼前这件事还是让人欣慰的:在近20年之后,《自然》与《科学》的数学部分,竟然在这本集子里“久别重逢”了!

说起这次“重逢”,首先要感谢原在上海教育出版社任副编审的叶中豪先生.是他,多次劝说我将《自然》杂志上的数学文章结集成册;是他,了解《自然》和《科学》的这段“亲缘”关系,建议将《科学》杂志上的数学文章也收集进来,实现了这次“重逢”;又是他,在上海教育出版社申报这一选题,并获得通过.

其次,要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生.是他,当这本集子在上海教育出版社的出版遇到困难时,毅然伸手相助,接下了这项出版任务^①.

当然,还要感谢与我共同编这本集子的《科学》杂志数学编辑田廷彦先生.是他,精心为这本集子选编了《科学》杂志上的许多数学文章.

他们三人,加上我,用时下很流行的说法,都是不折不扣的“数学控”.我们

^① 说来有趣,我与刘培杰先生从未谋面,却似乎有“缘”已久.这次选编这本集子,发觉他早年曾向《自然》杂志投稿,且被我录用,即收入本集子的《费马数》一文.屈指算来,那该是20年前的事了.

以我们对数学的热爱和钟情,为广大数学研究者、教育者、普及者、学习者和爱好者(相信其中也有不少的“数学控”)献上这本集子,献上这些由国内外数学家、数学史家和数学普及作家撰写的精彩数学文章。

这里所说的“数学文章”,不是指数学上的创造性论文,而是指综述性文章、阐释性文章、普及性文章,以及关于人物和史实的介绍性文章。其实,这些文章,都是可让大学本科水平的读者基本上看得懂的数学普及文章。

按美国物理学家、科学普及作家杰里米·伯恩斯坦(Jeremy Bernstein, 1929—)的说法,在与公众交流方面,数学家排在最后一名^①。大概是由于这个原因,国际上的《自然》和《科学》,数学文章所占的份额,相当有限。

然而,在我们的《自然》和《科学》上,情况并非如此。在《自然》杂志上,从1984年起就常设“数林撷英”专栏,专门刊登数学中有趣的论题;在《科学》杂志上,则有类似的“科学奥林匹克”专栏。许多德高望重的数学大师,愿意在这两本杂志上发表总结性、前瞻性的综述;许多正在从事前沿研究的数学家,乐于将数学顶峰上的无限风光传达给我们的读者。在数学这个需要人类第一流智能的领域,流传着说不完道不尽的趣事佳话,繁衍着想不到料不及的奇花异卉。这些,都在这两本杂志上得到了充分的反映。

在编这本集子的时候,我们发觉,《自然》(在下文所说的时期内)和《科学》上的数学好文章是如此之多,多得简直令人苦恼:囿于篇幅,我们必须屡屡面对“熊掌与鱼”的两难,最终又不得不忍痛割爱。即使这样,篇幅仍然宏大,最终不得不考虑分册出版。

现在这本集子中的近200篇文章,几乎全部选自从1978年创刊至1993年年底休刊前夕这段时期的《自然》杂志,和从1985年复刊至2010年年底这段时期的《科学》杂志。它们被分成12个版块,每个版块中的文章,基本上以发表时间为序,但少数文章被提到前面,与内容相关的文章接在一起。

还要说明的是,在“数学的若干重大问题”版块中,破例从《世界科学》杂志上选了两篇本人的译作,以全面反映当时国际数学界的大事;在“数学中的有趣话题”版块中,破例从台湾《科学月刊》上选了一篇“天使与魔鬼”,田廷彦先生对这篇文章钟爱有加;在“当代数学人物”版块中,所介绍的数学人物则以20世纪以来为限。

这本集子中的文章,在当初发表时,有些作者和译者用了笔名。这次选入,仍然不动。只是交代:在这些笔名中,有一位叫“淑生”的,即本人也。

照说,选用这些文章,应事先联系作译者,征求意见,得到授权。但有些作译

^① 参见 Mathematics Today: Twelve Informal Essays, Springer-Verlag(1978) p. 2. Edited by Lynn Arthur Steen.

者,他们的联系方式,早已散失;不少作译者,由于久未联系,目前的通信地址也不得而知;还有少数作译者,已经作古,我们不知与谁联系.在这种情况下,我们只能表示深深的歉意.更有许多作译者,可说是我们的老朋友了,相信不会有什么意见,不过在此还是要郑重地说一声:请多多包涵.

在这些文章中,也融入了我们编辑的不少心血.极端的情况是:有一两篇文章是编辑根据作者的演讲提纲,再参考作者已发表的论文,越俎代庖地写成的.尽管我们做编辑这一行的,“为他人作嫁衣裳”,似乎是份内的事,但在这本集子出版的时候,我还是将要为这些文章付出过劳动、做出过贡献的编辑,一一介绍如下,并对其中我的师长和同仁、同行,诚致谢忱.

《自然》上的数学文章,在我 1982 年 2 月从复旦大学数学系毕业到《自然》杂志工作之前,基本上由我的恩师陈以鸿先生编辑;在这之后到 1987 年先生退休,是他自己以及我在他指导下的编辑劳动的成果.此后,又有张昌政先生承担了大量编辑工作;而计算机方面的有关文章,在很大程度上则仰仗于徐民祥先生.

《科学》上的数学文章,在复刊后,先是由黄华先生负责编辑,直至 1996 年他出国求学;此后便是由田廷彦先生悉心雕琢,直到现在;其间静晓英女士也完成了一些工作.当然,《科学》杂志负责复审和终审的编审,如潘友星先生、段韬女士,也是付出了心血的.

回顾往事,感悟颇多.但作为这两本杂志的编辑,应该有这样的共同感受:一是荣幸,二是艰辛.荣幸方面就不说了,而说到艰辛,无论是随《自然》杂志流离,还是在《科学》杂志颠沛,都可用八个字来概括:“筚路蓝缕,以启山林”.

是的,筚路蓝缕,以启山林!

如今,蓦然回首,我看到了:

一座巍巍的山,一片苍苍的林!

《自然》杂志原副主编兼编辑部主任
朱惠霖

2017 年 5 月于沪西半半斋

第一编 数学与计算机科学 // 1

- 从黑箱到计算机——对计算机本质的一个剖析 // 3
- 什么是理论计算机科学 // 15
- 理论计算机科学中的一些问题 // 25
- 拓扑学理论与计算方法 // 33
- 映像度机器算法平话 // 42
- 知识的不确定性与不确定推理 // 49
- 计算机科学与逻辑学 // 59
- 数学对象的计算机搜索 // 68
- 数论中的计算问题 // 75
- 理解计算 // 84
- 量子计算动摇了丘奇—图灵论点吗——兼纪念图灵逝世 50 周年 // 92

第二编 数学与人文艺术 // 99

- 文学·数学·计算机…… // 101
- 文学、数学与电子计算机 // 109
- 乐音体系的数学原理 // 117
- 数学与诗 // 132
- 埃舍尔作品的数学趣味 // 135
- 京都弦学之会记 // 144
- 数学与中国文学的比较 // 149
- 第四维、立体主义与相对论——庞加莱时代的文化与科学 // 162
- 数学文化之魅力——西方数学影视大观 // 168
- 统计科学及其文化魅力 // 178
- 编辑手记 // 188

第一编

数学与计算机科学

从黑箱到计算机

——对计算机本质的一个剖析^①

一、引言

自从电子数字计算机出现后,在一定意义上可用机器代替人们计算、推理,等等,一句话,代替人们思维,这和以前用机器代替人们劳动一样,使人类的活动起了一个大变革.由于机器功能很强,不但在很多方面可以帮助人们的思维,减轻人们的负担,而且在速度上、准确性上处处都胜过人类,于是便使人们对机器产生了一些神秘之感.其实计算机是为了要利用机器来解决计算问题而必然产生的,并没有任何神秘的地方.本文想从数理逻辑的观点,来对计算机(尤其是电子数字计算机)的本质做一番剖析.

二、黑箱

要想利用机器来计算一个函数,最容易想到的是制造一架机器,当把自变元的值输入机器以后,机器立即便把函数值输送出来.例如,要想计算三元函数 $f(x, y, z)$, 我们便造出一种通常叫作黑箱的机器(图 1):

^① 本文摘自《自然杂志》第 4 卷(1981 年)第 6 期,作者莫绍揆.



图 1

所谓黑箱,并不是说不准拆开看,而是强调我们不考虑这种机器的结构,不考虑机器如何把输入变成输出,我们只要求它的功能正确,当给定输入后,它能把正确的函数值输送出来便成了。

由于只考虑机器的功能而不管其结构,因此黑箱实质上等同于一张函数表.函数表只列出自变元的什么值对应于函数的什么值,既没有计算公式也不提供计算步骤.可以说,黑箱实际上是里面装有一张函数表,把自变元的值输入后,黑箱便去“查”函数表而把查出来的函数值输出.可见,有了函数表便可以造一个黑箱;反之,买了一个黑箱以后,我们逐次变动输入值而记录相应的输出值,便可以得出一张函数表.但除了函数表以外,与函数有关的其他性质,什么也得不到。

就函数表来说,一元函数的表最容易构造并印出.构造二元函数的表已经有些困难,但仍可以在平面上印出.构造三元以上函数的表非常困难,理论上说,需印在立方体中,这当然是不可能的,必须割裂开来才能印出.这时自变元相邻的值不能印在相邻的地方,可以说无法照其“本来面貌”印出来,因此在作函数表时,最好把多元函数化成一元函数.此外,函数表只能记载有限个值(无论自变元的或函数的),即使自变元或函数的值是连续变化的(如采取实数为值),也只能记载若干个离散的值,其余的值则靠插补而得。

黑箱是物质机器,利用具体的物质来表示自变元与函数的值,因此只能表示有限个值,在这一点上它与函数表完全相同.一般是利用输入线、输出线的状态来表示输入、输出值.输入、输出值都只能是有限多个.设输入值可能有 m 个,而输出值可能有 n 个,这个黑箱便叫作 $m-n$ 黑箱.如果有 h 条输入线,而第 i 条输入线可能有 $m_i (i=1,2,\dots,h)$ 个输入值,则总输入值可能有 $m_1 m_2 \cdots m_h$ 个。

造函数表时,最希望而又最困难的是减少自变元的个数,而以能减少到一元为最好.对黑箱来说,至少在理论上,要减少输入线并不困难.我们尽可以只用一条输入线(相当于一个变元),而设法使它可以具有 $m_1 m_2 \cdots m_h$ 个状态(相当于可能的输入值总数)便成了。

事实上,要想使一条线上具有这么多状态,而且要能构造机器,使在输入线上给出某种状态后输出线上便给出某种状态,当状态个数较多时,这是很难办到的,事实上可以说无法办到.例如对加法而言,加数与被加数与和都可以是好多位数,要想在输出、输入线上具有几千万种乃至几万万种状态,事实上是不可能的。

在现实中,与其减少输入线个数(相当于减少自变元个数)而增加每条线

上的状态个数,不如采用相反的做法,即增加输入线个数而减少每条线上的状态个数.最极端也最可取的办法是:每条线上只有两种状态,而尽量增加输入线(以及输出线)的个数.

例如,如果我们想造计算加法的黑箱,我们又已知道这个黑箱最多是从事六位数的加法(其和最多为七位,但最高位只为1).我们与其使用两条输入线和一条输出线,而输入线可具一百万个状态(等于 10^6),输出线可具二百万个状态(等于 2×10^5),不如每条线只具两个状态,而使用40条输入线,20条表示加数,20条表示被加数($2^{20} = 1\,048\,576 > 10^6$),用21条输出线表示和($2^{21} = 2 \times 2^{20} > 2 \times 10^6$).

每个变元只用一条线来管,或全体输出、输入的值都各用一条线的状态来表示,这种黑箱可叫作独行式黑箱,简称独行黑箱.如果使用多条线互相配合,用多条线的联立状态来表示输出、输入值,这种黑箱可叫作并行式黑箱,简称并行黑箱.下面假定并行黑箱中各线只具有两种状态,可叫作通、断状态,以1,0表示之.

在并行黑箱中,如果只有八个输入值,可用三条输入线,而八个输入值可分别用(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)表示.这里自左至右的数字依次表示第一、二、三输入线的通断状态.

要制造黑箱,不外乎是要造一个机器,当给以某个输入值以后,能够给出正确的输出值.换句话说,当各输入线的通断状态确定后(相当于输入值确定),各输出线便获得正确的通断状态.换句话说,我们要设计出一些开关线路,根据它,当对输入线给以一定的通断状态时,输出线便具有我们所要求的通断状态.

这便是通常所说的开关电路设计,也叫作电路逻辑设计,可用开关代数来解决.采用并行式后,制造黑箱的问题在理论上、现实上可说都已解决了.

但是制造黑箱并不能解决“用机器来计算一个函数”的问题.这是因为黑箱有两个致命的缺点:

第一,黑箱只能代人查表而不能代人计算.换句话说,人们必须把各函数值一一计算完毕,才能根据计算所得制造黑箱,这等于把计算结果列成函数表放入黑箱中,黑箱则代人查表,很快地把查表所得输送出来.如果人们只知道该函数的计算方法(计算公式),而各函数值还未逐一计算出来,那么是无法制造黑箱的.可见,辛辛苦苦地制造黑箱,它只起到代人查表的作用,根本不能代人计算,未免太不值得了.

第二,我们日常所计算的函数的输出、输入值并不是有限多个而是无限多个.例如加法函数 $a+b=c$,输入为 a, b 而输出为 c ,它们都以整个自然数集作为变域(这是就黑箱所能计算的情况立论,其实一般地它们都以整个复数为变域,这更是黑箱所不能计算的),自然数有无限多个,故输出、输入值的可能个数也

有无限多个,无论输出、输入线如何增加,始终不能全部计算.

三、有限自动机

面对这两个困难,我们怎样去克服呢?

我们先讨论第二个缺点,因为它较普遍,带根本性,而且也较易解决.严格说来,当输出、输入值可能有无限多个时,是不能用物质机器来计算的,因为地球上的物质是有限多的,绝不能具有无限多种状态(用以表示无限多个输出、输入值),从而绝不能用以完全计算该函数的值.但是我们又须注意,我们绝不需无限多个函数值,我们只是有限次地使用该函数,每次使用时都是使用该函数的有穷值,例如每次做加法时,都只是两个有穷数相加,得出一个有穷数以为和.这时我们可以说,每次做加法都可用黑箱来实现.

这样,是否把“无穷性”问题解决了呢?我们还是不能乐观.因为,我们虽然可以说,“人们每次用到的”加法都可以用黑箱来实现,但我们却不能从而便下结论说,“人们所用到的一切加法”都可以用(一个给定的)黑箱来实现,这两句话的差异在什么地方呢?

第一句话是说,人们每次用到什么数的加法,都可以根据所用的加数而造成黑箱来计算,显然这个黑箱是随所用到的加数而变的,加数、被加数大些,便多用些输入线,否则便少用些输入线.当然,每次的加法都有适当的黑箱来计算.第二句话是说,可以预先造出一个黑箱,它能够实行人们所用到的加法.除非事先做出调查,知道人们所用到的加法必不超过若干位数,否则无论你配备多少条输出、输入线,所能实行的加法始终有限,始终有可能满足不了人们的需要.

我们能否满足于第一句话所说的情况呢?不能,对于黑箱尤其不能.如果要知道相加的两数才临时制造黑箱,如上所述,必须先计算结果.当已把结果计算出来了,目的已经达到,还造黑箱做什么?黑箱(以及函数表)的功用,完全在于一次过地把函数值计算完毕,编成一表或制成黑箱,以供今后人们反复使用,而绝不能临时制造.人们既然无法预先制造能够满足人们需要的黑箱,那么对于无穷性问题必须另行设法克服.

独行黑箱的特点是每条输出、输入线可具有多种状态(用以表示多个输出、输入值),它是功能较强的机器.并行黑箱则是每条线的状态个数都是固定的、很少的,它靠增加输出、输入线来表示多个输出、输入值,即靠空间之助来完成任务,功能较弱.能否不靠空间而靠时间之助来完成任务呢?能.这时每条输出、输入线的状态个数仍是固定的,比如仍只是通、断两状态.但它不靠增加输出、输入线个数而靠在每条线上继续出现的通断状态来表示输出、输入值.比如

有八个输入值时,它不用三条输入线,利用它们的通断状态而得 $(0,0,0)$, $(0,0,1)$ 等以表示八个输入值,而是在一条输入线上继续输入三次,得出 $(0,0,0)$, $(0,0,1)$ 等以表示输入值.这种靠时间帮助的黑箱可以叫作串行式黑箱,简称串行黑箱.

用了串行黑箱,便可克服上述的无穷性困难,我们可造一个固定的黑箱,它能计算任何两数的加法,因为位数增多时,它只需在两条输入线上多输入几次状态,不必增加输入线,从而不必另造黑箱(输出、输入线有所增减时,便是另造新的黑箱).我们说,用并行黑箱所能计算的数是有界的(n 条输入线的黑箱所计算的数至多为 2^n),用串行黑箱所能计算的数是无界的(同一线上多输入几次状态,所计算的数便增大).由于现实所需计算的数都是有限的,因此我们认为,能计算的数如果是无界的,则事实上就等于可计算无穷多个数.换句话说,用“能计算无界多个”来代替“计算无穷多个”,从而解决了无穷性困难.这是串行黑箱的特有优点,独行黑箱与并行黑箱都是没有的.

但是串行式却有一个致命的缺点,那便是:前后输入的值虽然联合起来表示一个输入值,却不能联合起来以决定输出值.换句话说,黑箱是没有“记忆”的,当第二次输入时,第一次的输入值已经完全“忘却”了,即不再起作用了.正如电子数字计算机中的存储器那样,新数存入后,旧数便自然而然地被冲刷掉.在输出方面,也有同样的情况,每次的输出,都是“最后”的结果而不容有所更改,即不能用第二次的输出来修改第一次的输出.就不能更改这点来说,黑箱真正是“一言既出,驷马难追”,一经输出是绝对不能更改的了.具有这样特点的串行黑箱能够计算什么样的函数呢?

我们暂时把每次输出、输入线的状态看作一个数字(或一个字母),由前后输出、输入的数字组成一个多位数(或由字母组成一个字母行)作为输出、输入的值.我们姑且假定第一次输出、输入的是个位数字(零幂位),第二次输出、输入的是十位(一幂位),等等.串行式黑箱的特点是:只能由输入数的个位决定输出数的个位,由输入数的十位决定输出数的十位,即所谓按位计算(例如所谓按位相加等).为什么呢?当把输入数的十位数字输进来时,个位数字已经被忘却,无法参考,而输出数的个位数字已经输出,无法追改,因此自然只能由输入数的十位来决定输出数的十位了.能够采用按位计算的函数具有下列特性——可以叫作保持毗连性或按位计算性:

对一元而言, $f(xy) = f(x)f(y)$;

对二元而言, $f(xu, yv) = f(x, y)f(u, v)$;

.....

即只能由输入数的个位 x (或 x, y)来决定输出数的个位 $f(x)$ (或 $f(x, y)$),由输入数的十位 y (或 u, v)来决定输出数的十位 $f(y)$ (或 $f(u, v)$),等等.

能够采用按位计算的函数不能说没有,但事实上的确是少之又少的.连最简单的加法($x+y$),乃至求继数的运算($x+1$),都牵涉到进位而不能完全按位计算.因此串行式黑箱虽然解决了无穷性困难,但所能计算的函数极少,事实上它几乎没有什么实用价值.

我们怎么办呢?我们必须给黑箱以记忆的能力,让它能够记起以往的输入(从而记忆起全部以往的输入),这样它的输出便不单纯由目前的输入决定,而可由整个以往的输入来决定.于是,那些不可以按位计算的函数便有可能用它来计算了.

怎样给黑箱以记忆呢?在探讨这个问题之前,我们要问:添入记忆能力是否必要?能否沿另一途径(不用串行法)解决无穷性困难,从而无须添入记忆能力?

串行式之所以需要记忆,是由于它利用时间的排列,由前后输入的数字组成输入数,当输入后面的数字时,前面的数字容易被忘却而必须依靠记忆.并行式黑箱是没有记忆问题的.我们能否把输入数的各位数字印在一条输入带上,黑箱依次阅读输入带上的各位数字(这点与串行式相同),从而决定输出?全部输入数字都在带上,是不会消失的.当阅读到后面的数字时,如果需要参考前面的数字,尽可以回头重新阅读,参考前面的数字以后,再决定输出.这样既无须增加输入线,有串行式之利;又无须记忆,有并行式之利,这不是最好的办法吗?

其实这种想法是不对的.输入带中所输入的字,如果黑箱可以一次辨认,那么输入带上的多位数实际上等于一位数(一个字母),黑箱根据这个字母决定输出,这实际上等于使用独行法(减少输入线个数,增强每条输入线功能).如果黑箱每次只辨认一个字母,根据逐次辨认各个字母而决定输出,那么辨认第二个字母时,第一个字母便被忘却(如果不给以记忆能力的话),即使输入带上仍记录着该字母,并未消失,但黑箱既已忘却,有也等于没有了.可见,即使使用输入带,如果没有记忆能力,仍然只能按位计算,与串行黑箱无异.

事实上,如果对输入数整个地认识而不加分析,则与独行黑箱无异.如果对输入数加以分析,辨认出它是由什么字母(更小的输入成分)组成,根据其组成而决定输出,这便是计算(不局限于查表),便需要记忆.

顺便还可指出,并不需要记忆以往的输出.新输出当然也可与以往的输出有关,但以往的输出归根到底由以往的输入决定,只要我们记得以往的输入,如有必要,尽可以先得出以往的输出再决定新输出.所以在下文中我们只要求记忆以往的输入,不必记忆以往的输出.

有了记忆,便可以代人计算,上面所提到的第一个问题也同时可得到解决.

如何记忆呢?现在一般用“内心状态”法,简称内态法.假定黑箱本身可具

有一种内态,每次输入不但决定当时的输出而且决定黑箱的内态,但不是仅由输入决定而是由输入与当时的内态联合决定.即使输入相同,如果当时的内态不同,也会得出不同的输出与不同的新内态.可以说,有了内态,输出便不仅由当前的输入决定,而且也由过去的输入(通过内态)来决定.所以黑箱有了内态,便能“记忆”过去的输入了.

由输入与内态决定输出,就这点说,内态与输入处于同等地位;由输入与旧内态决定输出与新内态,就这点说,内态与输出处于同等地位.可以说,内态具有两重身份,它既是输出(上阶段的输出)又是输入(本阶段的输入);但又可以说,它既不是输入又不是输出,因为人们既未将它输入给黑箱(故不是输入),黑箱也未输出它们给人们看(故不是输出),它们只是一些计算的中间结果,黑箱暂时把它们保存下来(以免忘却)作为下一阶段计算的参考罢了.

具有内态的黑箱与没有内态的黑箱是有本质的区别的,为此前者特名曰自动机(以强调它能够自动地更改它的内态).如果内态只有有限多个,便叫作有限自动机.

以全加器为例.输入数(加数与被加数)的各位数字是纯粹的输入,输出数(和数)的各位数字是纯粹的输出,各次的进位数字(无进位时为0,有进位时为1)便是内态,它既是由上一位的输入数字作计算的结果(故是输出),又用以决定下一位数字(故是输入).

再以按钮开关为例.人们逐次将开关按压,电灯便一亮一熄.这里“按”是输入,电灯的一亮一熄是输出.同是“按”,输出却有亮熄之异,足见这个按钮开关是一个自动机,它具有内态.在本例中,内态与输出相同.根据电灯的“亮、熄”(输出,亦是内态),再加以“按”(输入),便得出新的输出与新内态:“熄、亮”.

每个自动机的内态既然不是人们输入的,那便只能是:在制造自动机时便已确定了的.由于自动机是物质机器,因此内态只能是有限多个,而且每一架自动机的内态个数也是固定的.如想更改内态个数,便等于造一架新的自动机.

由于有限自动机的内态个数必须固定,这便使得自动机的功能受到极大的限制,有很多函数不能用它来计算.设自动机的内态只有 m 个,它便只能记忆 m 个不同的过去输入,如果某一位的输出数字,除依靠当前的输入数字外,还依靠过去的输入,而可能的过去输入不止 m 种,则这位输出数字便无法用该自动机计算.例如两数相乘时便出现这种情况.设

$$a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0 \times b_k b_{k-1} \cdots b_2 b_1 b_0 = c_l c_{l-1} \cdots c_2 c_1 c_0$$

显然积的第 i 位数字 c_i 应如下求(暂不计进位)

$$c_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{i-1} + a_0 b_i$$

因此计算 c_i 时除记起前一位的进位外,还必须记起 a_0 到 a_i , b_0 到 b_i 各位数字, a_i 与 b_i 是当前的输入,不必记忆,但 a_0 到 a_{i-1} , b_0 到 b_{i-1} 却是过去的输入,必须借助