高等数学（上册）

例题与习题

GAODENG SHUXUE LITI YU XITI

吴小涛　黄承绪　主编

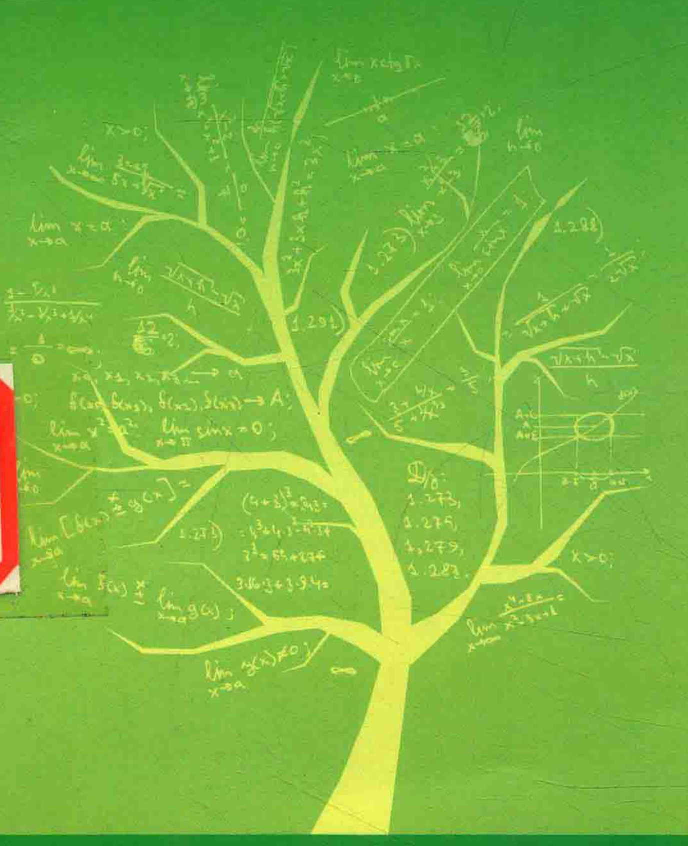
★ 知识要点梳理

★ 典型例题讲解

★ 疑难问题辨析

★ 练习巩固提高

★ 考研真题讲练



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等数学例题与习题

（上册）

吴小涛　黄承绪　主编

施露芳　胡　骏　杨姣仕　孙美满　张　丽　副主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

本书与同济第6版《高等数学》相配套，分为上、下两册。上册共7章，分别为：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程。每章首先理清教材的主要内容和基本要求，然后辅以典型例题讲解和释疑解难，最后通过练习题来巩固。本书还特别增加了考研真题的“讲”和“练”，让学生为考研打好基础。

本书可作为高等院校开设高等数学的各专业学生的学习辅导教材，也可作为考研学生的高等数学辅导书。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学例题与习题. 上册 / 吴小涛，黄承绪主编. —北京：电子工业出版社，2013.9

ISBN 978-7-121-21230-7

I. ①高… II. ①吴…②黄… III. ①高等数学—高等学校—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第186000号

策划编辑：王二华
责任编辑：郝黎明
印　　刷：三河市华成印务有限公司
装　　订：三河市华成印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：17.5　字数：448千字
版　　次：2013年9月第1版
印　　次：2017年9月第4次印刷
定　　价：35.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

高等数学是高等理工科院校的一门重要基础理论课，也是硕士研究生入学考试的重要部分。习题课是复习巩固基本概念、加深理解基本理论、提高学生运算和论证能力的重要环节，为此，我们结合教学中的实践经验，编写了此书。

本书是根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》的精神，并按照同济大学应用数学系主编的《高等数学（第六版 上册）》的章节顺序编写而成，读者也可将此书与其他高等数学教材配合使用。全书共 7 章，每章由“基本要求”、“主要内容”、“典型例题”、“释疑解难”、“部分习题解答”、“练习题”、“考研真题”组成。

在“基本要求”中，向读者提出本次课要达到的要求；“主要内容”则扼要概括了有关定义、定理、公式等，条理清晰，重点突出；“典型例题”部分着重分析解题思路，引导学生思考，并加以评注，开拓思路，达到举一反三的效果；“释疑解难”采用问答的形式，指明概念中容易误解的疑点，帮助学生辨析在学习中常见的一些似是疑非的难点；“部分习题解答”针对课后习题中一些较难的题目给出解答过程；“练习题”附有答案，可供读者自我检查；“考研真题”将近几年的硕士研究生入学考试题编入各讲，希望通过对此类题目的分析，能够让读者对研究生入学考试的要求、命题的基本思路有一个基本的了解，并为以后考研打好基础。

本书可作为高等理工科院校的习题课教材，还可作为自学高等数学，特别是准备报考硕士研究生的读者复习参考书。

本书由武汉科技大学城市学院规划，由吴小涛、黄承绪担任主编。施露芳、胡骏、杨姣仕、孙美满、张丽担任副主编。本书旨在提高学生学习高等数学的兴趣，以及为考研数学奠定良好基础。具体分工如下：第 1 章由黄承绪编写；第 2 章由吴小涛编写；第 3 章由施露芳编写；第 4 章由胡骏编写；第 5 章由杨姣仕编写；第 6 章由孙美满编写；第 7 章由张丽编写，全书由吴小涛统稿。

武汉科技大学城市学院的陈建勋院长、王良刚部长对本书的编写提出了许多宝贵意见。电子工业出版社对本书的编审、出版做了大量工作，在此一并致谢！

由于编者水平有限，时间仓促，书中不足及错漏之处在所难免，望各位专家、同行、读者批评指正。

编　者

2013 年 8 月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

2. 实数集：高等数学研究的对象是数

数可分为：自然数集 N，整数集 Z，有理数集 Q，实数集 R，复数集 C.

实数集 R 由有理数集与无理数集组成，如果数与直线上的点一一对应，实数集 R 可认为是直线上点的全体，通常记为：$R=(-\infty,+\infty)$.

（1）区间：指直线上某一线段，常见的有：

开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$

左开右闭区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

左闭右开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$

无穷区间 $(-\infty,a)$，$(-\infty,a]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,+\infty)$

（2）邻域：$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$；去心邻域：$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$　$(\delta>0)$

（3）矩形：$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)|x\in[a,b],y\in[c,d]\}$，类似地，有 $[a,b]\times(c,d)$，$(a,b)\times(c,d)$，$(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 等.

3. 映射

（1）映射：设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 $f:X\to Y$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的像，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像. 集合 X 称作映射 f 的定义域，常用 $D_f=X$ 表示，称集合 $\{y\in Y|y=f(x),x\in D_f\}$ 为映射 f 的值域，常用 $R_f\subset f(X)$ 表示.

注意：$f:X\to Y$ 中应具备三个要素：集合 $X=D_f$，值域 $R_f\subset Y$，对应法则 f，且像元素 $y=f(x)$ 是唯一的.

（2）单射、满射及一一映射：设 $f:X\to Y$，若 $\forall x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是单射；若 $f(X)=Y$ 或 $Y=R_f$，则称 f 是满射；既是单射又是满射则称 f 为一一映射.

（3）逆映射与复合映射：设单射 $f:X\to Y$，若 $g:R_f\to X$，$g(y)=x$，则称 g 为 f 的逆映射，可记作 $g=f^{-1}$，即 $f^{-1}(y)=x$，$D_{f^{-1}}=R_f$，$R_{f^{-1}}=X$.

设 $g:X\to Y_1$，$f:Y_2\to Z$，$Y_1\subset Y_2$，令 $f\circ g:X\to Z$，$(f\circ g):(x)=f[g(x)]$，称 $f\circ g$ 为由 g 和 f 构成的复合映射. 显然映射 g 和 f 构成复合映射 $f\circ g$ 的必要条件是：$R_g\subset D_f$. 注意：$f\circ g$ 和 $g\circ f$ 是有差异的.

4. 函数

（1）函数：设 $D\subset R$，映射 $f:D\to R$ 称作定义在数集 D 上的函数. 通常记作

$$y=f(x),\quad x\in D\subset R$$

这里 x 称为自变量，y 称作因变量，D 称作定义域，即 $D=D_f$，值域 $R_f=f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

（2）反函数与复合函数：设函数 $f:D\subset R\to R$ 是单射，其逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$ 称作 f 的反函数，即 $f^{-1}(y)=x\in D$，或记作 $f^{-1}(x)=y\in D$，$x\in f(D)$.

复合函数是复合映射的一种特例,即设 $y=f(u)$, $u\in D_f\subset R$, $u=g(x)$, $x\in D_g$,若 $R_g\subset D_f$,那么由函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成复合函数 $y=f[g(x)]$,其定义域为 D_g, u 常称中间变量.

(3)函数的运算:设函数 $f(x)$, $x\in D_f$, $g(x)$, $x\in D_g$, $D_f\cap D_g\neq\varnothing$,可定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的运算如下:

① 和(差)运算:$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$

② 积运算:$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

③ 商运算:$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\quad x\in R_f\cap\left(R_g-\{x|g(x)=0,x\in R_f\cap R_g\}\right)$

(4)基本初等函数与初等函数:

① 基本初等函数:常数函数 $y=C$ (C 为常数);幂函数 $y=x^{\mu}\quad \mu\in R$;指数函数 $y=a^x$ $(a>0$,且 $a\neq1)$;对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$,且 $a\neq1)$,特别地,当 $a=\mathrm{e}$,记为 $y=\ln x$,称之为自然对数;三角函数 $y=\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ 等;反三角函数:$y=\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ 等.

② 初等函数:由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并用一个解析式子表示的函数. 例如:$y=\sqrt{\tan(x^2+2)}$.

(5)几个重要的非初等函数.

① 符号函数:$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$;

② 取整函数:$y=[x]$, $x\in R$;

③ Dirichlet 函数:$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$, $x\in R$.

5. 函数的几种特性

(1)函数的有界性和无界性:设 $y=f(x)$, $x\in D_f$, D_f 是实数集,如果存在常数 M,使当 $x\in D_f$ 时, $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D_f 上有上界;如果存在常数 m,使当 $x\in D_f$ 时有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$ 在 D_f 上有下界;如果 $f(x)$ 在 D_f 上既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 在 D_f 上有界;显然有界函数的图像位于条形带域 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 之中. 这里常数 M、m 分别称为 $f(x)$ 在 D_f 上的上界、下界.

有界函数的对立面便是无界函数,即不论 M 有多大,总有 $x\in D_f$,使 $f(x)>M$,则称 $f(x)$ 在 D_f 上无上界;又不论 m 如何小,总有 $x\in D_f$,使 $f(x)<m$,则称 $f(x)$ 在 D_f 上无下界.

例如:$f(x)=\sin 3x$, $x\in R$, $-1\leqslant\sin 3x\leqslant 1$,有界;

$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $-1<x<+\infty$,有下界 $m=0$,无上界;

$f(x)=\tan x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,无界.

(2)函数的单调性:设 $y=f(x)$, $x\in D_f$,若对任意的 x_1, $x_2\in D_f$, $x_1<x_2$ 有

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad（或 f(x_1)\geqslant f(x_2)）$$

则称 $f(x)$ 在 D_f 上是单调递增（或称 $f(x)$ 是不减的）的（或称 $f(x)$ 在 D_f 上单调递减（或称 $f(x)$ 不增的）的）. 如果一定有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 D_f 上是严格递增的（或严格递减的）. 例如取整函数 $y=[x]$，$x\in R$，是单调递增的，$y=\tan x$，$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，是严格单调递增的.

（3）函数的奇偶性：设函数 $f(x)$ 在对称于原点的数集 D 上有定义，并且对于任意 $x\in D$，必有 $f(-x)=f(x)$（$f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 在 D 上是偶（奇）函数. 例如 $y=\tan x$，$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是奇函数，$y=\cos x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 是偶函数. 显然，在直角坐标系中，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

（4）函数的周期性：设 $y=f(x)$，$x\in D_f\subset R$，如果存在常数 $T>0$，当 $x\in D_f$ 时，有 $x\pm T\in D_f$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为它的一个周期，通常称周期 T 是指使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T（如果存在的话）. 例如 $y=\sin\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty]$ 不是周期函数，$y=[x]-x$，$x\in R$，$T=1$.

对于周期函数的图像（在直角坐标系中）可以从下列方式得到：先作出一个周期内的图像，然后左右按周期平移，便得到整个函数图像.

1.1.3 典型例题

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}2 & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}0 & |x|\leqslant 2\\ 1 & |x|>2\end{cases}$，试求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解：由 $f(x)$ 表达式，有 $f[g(x)]=\begin{cases}2 & |g(x)|<1\\ 0 & |g(x)|\geqslant 1\end{cases}$

再由 $g(x)$ 的表达式知 $|g(x)|<1\Leftrightarrow |x|\leqslant 2$；$|g(x)|\geqslant 1\Leftrightarrow |x|>2$

由此可得

$$f[g(x)]=\begin{cases}2 & |x|\leqslant 2\\ 0 & |x|>2\end{cases}$$

由 $g(x)$ 的表达式，有

$$g[f(x)]=\begin{cases}0 & |f(x)|\leqslant 2\\ 1 & |f(x)|>2\end{cases}$$

再由 $f(x)$ 的表达式可知

$$|f(x)|\leqslant 2\Rightarrow x\in(-\infty,+\infty)；\ |f(x)|>2\Rightarrow x\in\varnothing$$

所以，$g[f(x)]=0$.

评注：求复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式时，由外层 f 写出复合函数的表达式，并同时写出中间变量（即内层函数 g）的取值范围，然后按内层函数，即 $g(x)$ 的分段表达式，过渡到自变量的取值范围，可得分段函数表达式.

例 2　已知 $f[\ln x]=\begin{cases}x-1 & x>1\\ \ln x & 0<x\leqslant 1\end{cases}$，求 $f(x)$.

解：令 $u=\ln x$，有 $x=\mathrm{e}^u$，由 $f[\ln x]$ 表达式可得

$$f(u)=\begin{cases}\mathrm{e}^u-1 & \mathrm{e}^u>1\\ u & 0<\mathrm{e}^u\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^u-1 & u>0\\ u & u\leqslant 0\end{cases}$$

即

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-1 & x>0\\ x & x\leqslant 0\end{cases}$$

例 3　已知 $f(\sqrt{x}-1)=x+2$，求 $f\circ f$ 的值域.

解：设　　$u=\sqrt{x}-1$，有 $x=(u+1)^2$，$f(u)=(u+1)^2+2$　　（1.1）

先求 f 的定义域 D_f 和值域 R_f，事实上，在 $u=\sqrt{x}-1$ 中，$x\geqslant 0\Rightarrow u\geqslant -1$，从而 f 的定义域 $D_f=[-1,+\infty)$，值域 $R_f=[2,+\infty)$

再求 $f\circ f$ 的表达式：由（1.1）得

$$f[f(u)]=[f(u)+1]^2+2=[(u+1)^2+2+1]^2+2=[(u+1)^2+3]^2+2 \qquad (1.2)$$

当 $u\in D_f$ 时，$f(u)\in R_f\subset D_f\Rightarrow f\circ f$ 的定义域 $D_{f\circ f}=D_f=[-1,+\infty)$

由（1.2）知，当 $u=-1$ 时，$f[f(-1)]=3^2+2=11$ 是 $f\circ f$ 的最小值，即 $f[f(u)]\geqslant 11$，而 $f[f(u)]$ 在 $D_{f\circ f}$ 上无上界，于是函数 $f\circ f$ 的值域是 $R_{f\circ f}=[11,+\infty)$.

评注：通过引入中间变量 u，找出 $f\circ f$ 的表达式，利用构造复合函数的必要条件求出 $f\circ f$ 的定义域；考虑到 $R_{f\circ f}$ 无上界，但函数 $f\circ f$ 可取得最小下界，从而求得 $R_{f\circ f}$

例 4　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，是周期为 2 的奇函数，已知 $x\in(2,3)$ 时，$f(x)=x^2+x+1$，求当 $x\in[-2,0)$ 时，$f(x)$ 的表达式.

解：由题设条件可知，将 x 向左平移 2 个单位，即 $x\in(0,1)$ 时，函数 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=f(x+2)=(x+2)^2+(x+2)+1=x^2+5x+7$$

又　当 $x\in(-2,-1)$ 时，有 $x+4\in(2,3)$，由周期性知

$$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2+(x+4)+1=x^2+9x+21$$

当 $x\in(-1,0)$ 时，有 $-x\in(0,1)$，由奇函数性质，有

$$f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2+5(-x)+7]=-x^2+5x-7$$

注意：$D_f=(-\infty,+\infty)$，$f(x)$ 是奇函数，从而 $f(0)=0$，而 $T=2$，故 $f(-2)=-f(2)=0$，且 $f(-1)=-f(1)=-[f(-2+1)]=-f(-1)\Rightarrow f(-1)=0$

综合上述讨论，有　$f(x)=\begin{cases}x^2+9x+21 & -2<x<-1\\ 0 & x=-2,-1\\ -x^2+5x-7 & -1<x<0\end{cases}$

评注：利用题设中周期 $T=2$ 的周期函数，将定义在 $(2,3)$ 上函数表达式平移到在 $(0,1)$ 上，

从而求得到函数在 $(0,1)$ 上的表达式，再由 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)$ 表达式及奇函数的性质，求出 $f(x)$ 在 $(-2,-1)\cup(-1,0)$ 的表达式，最后再计算出 $f(-2)$ 和 $f(-1)$ 的值.

例 5　设 $y=f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} & x>0\\ x^2 & x\leqslant 0\end{cases}$，求其反函数 $x=f^{-1}(y)$.

解：当 $x>0$ 时，$f(x)=-\dfrac{1}{x}=y\Rightarrow x=-\dfrac{1}{y}$，$y<0$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2=y\Rightarrow x=-\sqrt{y}$，$y\geqslant 0$；

$$\therefore\quad x=f^{-1}(y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{y} & y<0\\ -\sqrt{y} & y\geqslant 0\end{cases}$$

$$\text{或}\quad y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} & x<0\\ -\sqrt{x} & x\geqslant 0\end{cases}$$

评注：求反函数的一般方法是先验证反函数存在条件（即验证单射性：当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x)_1\neq f(x_2)$），确定反函数存在后，由关系式 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，然后 x 与 y 互换便可求出反函数 $f^{-1}(x)$. 对于分段函数而言，按分段函数处理.

例 6　设 $y=f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ 的反函数及其定义域.

解：（1）求出 D_f. 因为 x^2+x+1 和 x^2-x+1 的判别式均为负，故对任意的 $x\in R$，均有 $x^2+x+1>0$ 和 $x^2-x+1>0$，从而 $D_f=(-\infty,+\infty)$.

（2）求 $f^{-1}(x)$ 的表达式. 注意到 $f(x)=-f(-x)$，于是只考虑 $x\in(0,+\infty)$ 的函数表达式. 因为当 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)>0$，有

$$y^2=(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})^2=2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1}\tag{1.3}$$

移项再平方化简得

$$4x^2(1-y^2)=(4-y^2)y^2\tag{1.4}$$

因当 $x>0$，$y>0$，上式两端取算术根，得 $x=\dfrac{y}{2}\sqrt{\dfrac{4-y^2}{1-y^2}}$.

当 $x<0$ 时，由（1.4）有 $x=-\dfrac{y}{2}\sqrt{\dfrac{4-y^2}{1-y^2}}$.

（3）反函数的定义域. 先求 $f(x)$ 的值域 D_f. 由（1.3）得

$$y^2=2[(x^2+1)-\sqrt{x^4+x^2+1}]=\frac{2x^2}{(x^2+1)+\sqrt{x^4+x^2+1}}<1$$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}y^2=1$，从而 $R_f=\{y\,|\,|y|<1\}$，因而 $f^{-1}(x)$ 的定义域是 $D_{f^{-1}}=\{x\,|\,|x|<1\}$.

综上所述，$y=f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{4-x^2}{1-x^2}}$，$|x|<1$.

例 7　证明 $g(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $\mathring{U}(0)$ 内无界，但 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq\infty$

证明：对于任意给定的充分大的正数 M，取点 $x_M=\dfrac{1}{2\left(\left[\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}\right]+1\right)\pi+\dfrac{\pi}{2}}\in\mathring{U}(0)$ 代入 $g(x)$ 表达式中，有

$$g(x_M)=2\left(\left[\frac{M}{2\pi}-\frac{1}{4}\right]+1\right)\pi+\frac{\pi}{2}>2\left(\frac{M}{2\pi}-\frac{1}{4}\right)\pi+\frac{\pi}{2}=M$$

这表明 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(0)$ 内是无界的. 又取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$n\in N$，有 $g(x_n)=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq\infty$.

评注：事实上在 $\mathring{U}(0)$ 内有无穷多个点满足 $g(x)>M$，只需取 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$，$n\in N$ 即可. 此例也表明函数无界与函数无穷大有本质区别. 其次即使两个在数集 X 上的无界函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，其积不一定是无界函数. 例如 $f(x)=\tan x$，$g(x)=\cot x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，均无界，但 $f(x)\cdot g(x)=1$ 有界.

例 8　某商场以每件 a 元的价格出售某种商品，若顾客一次购买 50 件以上，则超过 50 件商品以每件 $0.8a$ 元的价格优惠出售.（1）试将一次成交的销售收入 R 表示为销售量 x 的函数；（2）若每件商品进价为 b 元，试写出一次成交的销售利润 L 与销售量 x 之间的函数关系.

解：注意：销售收入 = 销售单价 × 销售量；销售利润 = 销售收入 − 销售商品成本.（1）由题设可知，当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，销售价为 a 元/件，故 $R(x)=ax$，当 $x>50$ 时，其中 50 件商品的销售价为 a 元/件，而多于 50 件的商品即件商品的销售价为 $0.8a$ 元/件，故

$$R(x)=50a+(x-50)\times 0.8a=0.8ax+10a$$

综合可得 $R(x)=\begin{cases}ax & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.8ax+10a & x>50\end{cases}$

（2）易知，销售 x 件商品的商品成本为 bx 元，故

$$L(x)=R(x)-bx=\begin{cases}ax-bx & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.8ax+10a-bx & x>50\end{cases}$$

1.1.4　释疑解难

1. 从映射出发定义的函数与传统的函数定义不一致，如何解释？

答：由教材第 7 页给出由映射出发定义函数是："设数集 $D\subset R$，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数."按定义，它由三部分构成：一是定义域 D；二是函数值所在的范围：实数集 R；三是对应法则 f，并称法则 f 是定义在 D 上的函数. 该定义突出对应法则 f，它是函数定义的核心.

传统的函数定义是："设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个 $x\in D$，变量 y 按一定的法则，总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数". 依此定义，它由两部分组成：一是定义域 D；二是变量 y 与变量 x 之间的对应法则. 如果确定的数值总是唯一的（即

单值函数），则第二部分的内容也隐含了函数值在实数集 R 内，因此，传统的函数定义，如果是单值函数，那么它所包含的函数的要素与从映射出发定义的函数的要素是完全一致的.

两个定义也有不一致的地方. 其一，从映射出发定义的函数，必是单值函数，而传统的函数定义包含单值函数和多值函数；其二，传统的函数定义是有缺陷的，它称“y 是 x 的函数”，而同时又称“y 是 x 对应的函数值”. 这就把函数与函数值混在一起；其三，传统函数记号与映射记号不尽相同，但它也有使用的方便之处. 以正弦函数为例，如用映射记号表示，则写作：映射 $f:R\to R$，$\forall x\in R$，$y=f(x)=\sin x$，而传统的函数只须用 $f(x)=\sin x$ 表示即可. 这里省略大家明确的 $f:R\to R$，比较简明. 所以教材除了利用映射的记号外，还采用传统记号.

2. 单调函数必存在反函数，不单调的函数是否一定不存在反函数?

答：不是的. 函数的单调性只是函数存在反函数的充分条件，并不是必要条件. 函数是 f 否存在反函数，只取决于其定义域 D_f 到其值域 R_f 是否是单射. 如果 f 是单射，那么一定存在 $f^{-1}:f(D)\to D_f$；否则不存在反函数. 如此，即使非单调函数，只要满足其定义域 D_f 到 $f(D_f)$ 上是单射，它必然存在反函数，例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x^2+1 & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

其图像如图 1-1 所示.

函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上并不单调，然而 f 是 $[-1,1]$ 到 $[0,2]$ 上的单射，其反函数是

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \sqrt{x-1} & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

其图像如图 1-2 所示.

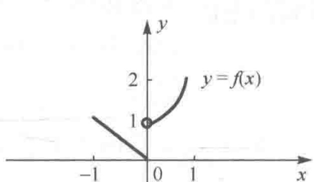


图 1-1

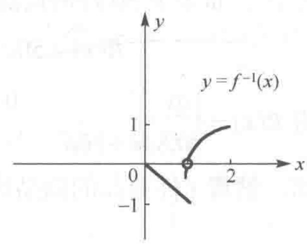


图 1-2

3. 如何理解函数 $y=\ln(x+1)$ 是由函数 $u=x+1$ 与函数 $y=\ln u$ 复合而成的说法?

答：按照复合函数的定义，函数 g 与函数 f 能够构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域 D_f 之中，即 $R_g\subset D_f$，表述函数 $y=\ln(x+1)$ 是由函数 $u=x+1$ 与函数 $y=\ln u$ 复合而成是通常习惯性较简便叙述而已. 这种说法未将 $u=x+1$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $u=g^*(x)=x+1$，$x\in(-1,+\infty)$ 严格区分. 事实上，$y=\ln(x+1)$ 应当理解成 $u=g^*(x)$ 与 $y=f(u)=\ln u$ 复合而成的，这里 $R_{g^*}\subset D_f$

1.1.5 部分习题解答

习题 1-1

3. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset Y$，证明

（1）$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

（2）$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明：（1）按集合相等的定义证明. $\forall y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow \exists x\in A\cup B$，$y=f(x)\Leftrightarrow \exists x\in A$ 或 $x\in B$，$y=f(x)\Leftrightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$.

（2）$\forall y\in f(A\cap B)\Rightarrow \exists x\in A\cap B$，$y=f(x)\Rightarrow \exists x\in A$ 且 $x\in B$，$y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)\Rightarrow f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

注意：反之，由 $y\in f(A)\cap f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow \exists x\in A$ 且 $x\in B$，$y=f(x)$，$\exists x'\in B$，$y=f(x')$ 且. 由于 f 不一定是单射，未必有 $x\neq x'$. 例如，函数 $f(x)=x^2$，$x\in R$，$A=(-\infty,0]$，$B=[-1,+\infty)$，$A\cap B=[-1,0]$，$f(A\cap B)=[0,1]$，但 $f(A)\cap f(B)=[0,+\infty)$.

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性.

（1）$y=\dfrac{x}{1-x}$，$x\in(-\infty,1)$

（2）$y=x+\ln x$，$x\in(0,+\infty)$

证明：（1）$y=\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}-1$，$\forall x_1,x_2\in(-\infty,1)$，$x_1<x_2$，

因为 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{1-x_2}-\dfrac{1}{1-x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调递增.

（2）$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1<x_2$，因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\ln x_2-\ln x_1+x_2-x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}+(x_2-x_1)>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

8. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也是单调增加.

证明：设 $-l<x_1<x_2<0\Rightarrow 0<-x_2<-x_1<l$，由 $f(x)=-f(-x)\Rightarrow$

$$f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$$

因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内是单调增加的.

9. 设下面所考虑的函数都定义在区间 $(-l,\ l)$ 内，证明：

（1）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

（2）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是奇函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明：设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是定义在 $(-l,\ l)$ 内的偶函数，$g_1(x)$，$g_2(x)$ 是定义在 $(-l,\ l)$ 内的奇函数，则有 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$，$g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$

（1）设 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，因为 $F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$

所以 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 是区间 $(-l,\ l)$ 内的偶函数，

又设 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，因为 $G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$，所以 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$ 是区间 $(-l,\ l)$ 内的奇函数.

（2）设 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，$G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$，$H(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$，因为

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com