LINEAR ALGEBRA

线性代数

晏瑜敏　主编

厦门大学出版社 国家一级出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS 全国百佳图书出版单位

LINEAR
ALGEBRA

线性代数

主　编：晏瑜敏
副主编：陈梅香　曾月迪
参　编：张新军　江　良　黄　琴　林丽芳

厦门大学出版社　国家一级出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS　全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/晏瑜敏主编. —厦门:厦门大学出版社,2017.8

ISBN 978-7-5615-6591-9

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①晏…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 155437 号

出 版 人　蒋东明

责任编辑　郑　丹

封面设计　蒋卓群

技术编辑　许克华

出版发行　厦门大学出版社

社　　址　厦门市软件园二期望海路 39 号

邮政编码　361008

总 编 办　0592-2182177　0592-2181406(传真)

营销中心　0592-2184458　0592-2181365

网　　址　http://www.xmupress.com

邮　　箱　xmupress@126.com

印　　刷　三明市华光印务有限公司

开本　787mm×1092mm　1/16

印张　13.75

字数　326 千字

版次　2017 年 8 月第 1 版

印次　2017 年 8 月第 1 次印刷

定价　35.00 元

厦门大学出版社
微信二维码

厦门大学出版社
微博二维码

前 言

线性代数是一门重要的公共基础课，其知识理论和方法在自然科学、工程技术和经济管理等诸多领域有着广泛的应用。本书旨在帮助学生掌握线性代数的基本理论和基本运算技能，为后继课程的学习奠定必要的数学基础。本书根据普通高等学校非数学专业线性代数教学大纲的要求而编写，注重素质教育和能力培养。编写过程中参考了国内外许多同类教材和近年来线性代数课程的建设成果，认真分析了普通高等学校许多不同专业使用线性代数知识的共同点和学生的实际需要，结合编者多年来从事线性代数课程教学和研究的体会进行编写。本书分为五章，主要内容包含行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和二次型及其标准形等，力求由浅入深、循序渐进地阐述线性代数的观点和方法，并且强调概念和计算同等重要。本书内容的阐述符合教学规律和认知规律，富有启发性，有利于激发学生的学习兴趣，使线性代数成为对大学生有用而且有趣的数学课程之一。

本书可作为普通高等院校工科及相关专业的线性代数课程教材，也可作为相关专业研究生入学考试数学复习的参考资料。本书讲授约 40 学时。

本书由晏瑜敏、陈梅香、曾月迪共同编写。具体分工如下：第一章、第二章、第四章由晏瑜敏编写；第三章由曾月迪编写；第五章由陈梅香编写。全书由晏瑜敏统稿、定稿。

本书出版得到了福建省高校应用数学重点实验室经费资助及莆田学院在线开放课程（线性代数）建设项目和莆田学院应用型课程（线性代数）建设项目的大力支持，在此深表感谢！

由于编者水平有限，虽经多次修改，书中内容不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2017 年 7 月

目　　录

第一章　行列式 …… 1

§1.1　排列和逆序 …… 1

习题 1.1 …… 3

§1.2　n 阶行列式 …… 3

习题 1.2 …… 11

§1.3　行列式的基本性质 …… 12

习题 1.3 …… 17

§1.4　行列式按行(列)展开定理及拉普拉斯定理 …… 18

习题 1.4 …… 30

§1.5　克拉默法则 …… 32

习题 1.5 …… 36

复习题一 …… 37

第二章　矩　阵 …… 39

§2.1　矩阵的概念 …… 39

§2.2　矩阵的运算 …… 42

习题 2.2 …… 51

§2.3　分块矩阵 …… 52

习题 2.3 …… 56

§2.4　方阵的行列式、逆矩阵 …… 56

习题 2.4 …… 66

§2.5　初等变换与初等矩阵 …… 67

习题 2.5 …… 74

§2.6 矩阵的秩 …… 75
习题 2.6 …… 80
复习题二 …… 81

第三章 向量空间 …… 86
§3.1 向量的概念及运算性质 …… 86
习题 3.1 …… 91
§3.2 向量组的线性相关性 …… 92
习题 3.2 …… 97
§3.3 向量组线性相关性的判别定理 …… 98
习题 3.3 …… 101
§3.4 向量组的秩与极大无关组 …… 102
习题 3.4 …… 106
§3.5 向量空间的基本概念 …… 107
习题 3.5 …… 112
复习题三 …… 113

第四章 线性方程组 …… 117
§4.1 线性方程组的基本概念 …… 117
§4.2 解线性方程组 …… 119
习题 4.2 …… 127
§4.3 齐次线性方程组解的结构 …… 129
习题 4.3 …… 136
§4.4 非齐次线性方程组解的结构 …… 137
习题 4.4 …… 143
复习题四 …… 144

第五章 二次型 …… 149
§5.1 向量的内积 …… 149
习题 5.1 …… 160
§5.2 方阵的特征值与特征向量 …… 161
习题 5.2 …… 169
§5.3 相似矩阵 …… 170

习题 5.3 …… 174
§5.4 实对称矩阵的相似对角化 …… 176
习题 5.4 …… 180
§5.5 二次型及其标准形 …… 181
习题 5.5 …… 196
§5.6 正定二次型 …… 197
习题 5.6 …… 204
复习题五 …… 205

参考文献 …… 209

第一章　行列式

行列式来源于线性方程组的求解，它最早是一种速记的表达式，如今发展为数学理论中一种非常有用的基本工具.在中学代数里，我们已经接触到用二阶、三阶行列式求解二元、三元线性方程组.在实际应用中，对经济管理、工程技术中的案例，往往会出现未知量较多的情形——n 元线性方程组的求解问题，这需要 n 阶行列式的相关理论.本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法及求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1　排列和逆序

我们已经学过，由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的一个有序数组称为一个 n 级(阶)排列，并且这样的 n 个数共可以组成 $P_n^n=n!$ 个不同的排列.

在数学中把考察的对象，例如上面的 $1,2,\cdots,n$ 叫作**元素**.对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序，特别地，我们规定 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数由小到大的标准次序为**自然排列**(一般也称作**标准排列**).

定义 1.1.1　在一个 n 阶排列中，如果一个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这 2 个数构成一个**逆序**.一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中所有逆序的总和叫作这个排列的**逆序数**，记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列叫作**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫作**偶排列**.

例如，由数字 1,2,3,4,5 共可以组成 $P_5^5=5!=120$ 种不同的排列，45321 和 23514 是其中的 2 个排列.在 45321 中 43,42,41,53,52,51,32,31,21 是逆序，逆序数 $\tau(45321)=9$，所以 45321 为奇排列.在 23514 中，逆序有 21,31,51,54，逆序数 $\tau(23514)=4$，所以 23514

为偶排列.显然,此时 12345 也为其中的一个排列,它是自然排列,其逆序数 $\tau(12345)=0$,也是偶排列.

把一个排列中某 2 个数的位置交换,而其余的数不动,就得到另一个排列.这样的一次变换称为一次**对换**.例如,经过 1,2 对换,排列 2431 就变成了 1432,排列 2134 就变成了 1234. 显然,如果连续施行 2 次相同的对换,那么,排列就还原了.

定理 1.1.1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说,经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

证 先证相邻对换的情形.设排列

$$a_1\cdots a_k abb_1\cdots b_m,$$

经对换 a 与 b,得排列

$$a_1\cdots a_k bab_1\cdots b_m,$$

那么,$\tau(a_1\cdots a_k abb_1\cdots b_m)=\tau(a_1\cdots a_k bab_1\cdots b_m)\pm 1$.因此,经一次相邻对换,排列改变奇偶性.

再证一般对换的情形.设排列

$$a_1\cdots a_k ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n, \tag{1.1.1}$$

经对换 a 与 b,得排列

$$a_1\cdots a_k bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n, \tag{1.1.2}$$

不难看出,这样一次对换可以经过一系列的相邻对换来实现,从(1.1.1)式出发,把 b 与 b_m 对换,再与 b_{m-1} 对换……即 b 经 $m+1$ 次相邻位置的对换后,(1.1.1)式变为

$$a_1\cdots a_k bab_1\cdots b_m c_1\cdots c_n, \tag{1.1.3}$$

再把(1.1.3)式中的 a 一位一位向右做 m 次相邻对换,即得(1.1.2)式,这样,从(1.1.1)式变到(1.1.2)式共经过了 $2m+1$ 次相邻对换,而 $2m+1$ 为奇数,故这样的对换的最终结果还是改变了奇偶性.

推论 1.1.1 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1.1 知对换次数就是排列奇偶数的变化次数,而标准排列为偶排列(逆序数为 0),因此,推论成立.

推论 1.1.2 由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数构成的所有排列中(共 $n!$ 个),奇、偶排列各占一

半,即各为$\frac{n!}{2}$个.

证明留作练习,请读者自行证明.

习题 1.1

1. 求下列各排列的逆序数,并指出它们是奇排列,还是偶排列:

(1)41325;

(2)24531876;

(3)n 级排列 $n(n-1)\cdots321$;

(4)n 级排列$(n-1)\cdots321n$;

(5)$2n$ 级排列 $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$;

(6)$2n$ 级排列$(2n)1(2n-1)2(2n-2)3\cdots(n+1)n$.

2. 证明:由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数构成的 $n!$ 个排列中,奇偶排列各半.

3. 假设 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 k,求排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数.

§1.2　n 阶行列式

先看 2 个简单的例子.

解二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}\tag{1.2.1}$$

a_{ij} 叫作 x_j 的**系数**,它有 2 个下脚标(指标).前一个脚标 i 表示它在第 i 个方程,后一个脚标 j 表示它是第 j 个未知量的系数,如 a_{21} 即是第二个方程中第一个未知量的系数.用消元法消去(1.2.1)式中的 x_2,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

同样，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

因此，当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，(1.2.1)式有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了便于记忆，我们引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，叫作**二阶行列式**，它含有两行、两列.二阶行列式是这样的两项的代数和：一个是在从左上角到右下角的对角线(主对角线)上 2 个数的乘积，取正号；另一个是从右上角到左下角的对角线(次对角线)上 2 个数的乘积，取负号.例如

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2\times 5-(-3)\times 1=13.$$

根据以上记法

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.2.1)有唯一解，且解可以写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}.$$

像这样用行列式来表示解，形式简便，容易记忆.

例 1.2.1 解线性方程组

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 3x+4y=6. \end{cases}$$

解　这时

$$D=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2,\quad D_1=\begin{vmatrix}5&2\\6&4\end{vmatrix}=8,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&5\\3&6\end{vmatrix}=-9.$$

因此,所给方程组的唯一解是

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{8}{-2}=-4,\\ y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-9}{-2}=\dfrac{9}{2}.\end{cases}$$

我们再来解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.2.2}$$

还是用加减消元法,类似地可求得方程组(1.2.2)的解的公式.

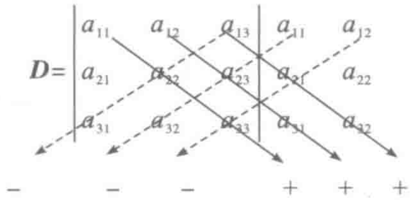
当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$ 时,有

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}a_{32}b_2-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},\\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},\\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}.\end{cases}$$

这样的式子很复杂,为了便于记忆,我们引进三阶行列式记号

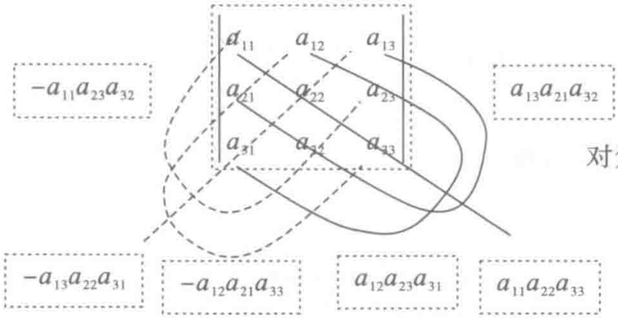
$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

它含有三行、三列,共有 $3^2=9$ 个数.三阶行列式的值应为 $3!=6$ 项的代数和.下面两种方法可以帮助记忆三阶行列式的计算.



沙路法

或



对角线法

实线上三个数的乘积构成的三项取正号,虚线上三个数的乘积构成的三项都取负号.于是,例 1.2.1 所示三元线性方程组的解 x_1,x_2,x_3 就可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$

这种解的结构与前面二阶行列式的解的结构类似.

例 1.2.2 求解三元线性方程组$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=2, \\ x_1+x_2+4x_3=0, \\ 3x_1-7x_2+5x_3=-1. \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}=10-12+7+3+56+5=69\neq 0,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix}=10+4+0-1+56+0=69,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 4\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=23, D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -7 & -1\end{vmatrix}=-23.$$

故 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{1}{3}, x_3=\dfrac{D_3}{D}=-\dfrac{1}{3}$.

从上面二阶、三阶行列式的记法中可以看出行列式是一个数，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同行和不同列的数构成的（二阶行列式每一乘积项有 2 个因子，三阶行列式每一乘积项有 3 个因子），并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成的（二阶行列式有 2！项乘积，三阶行列式有 3！项乘积）。另外，每一项乘积都带有符号，这个符号的确定需要用到逆序数，在三阶行列式（1.2.3）式中，项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 j_1, j_2, j_3 是 1，2，3 的一个排列. 可以看出：当 j_1, j_2, j_3 是偶排列时，对应的项在（1.2.3）式中取正号；当 j_1, j_2, j_3 是奇排列时，对应的项在（1.2.3）式中取负号. 于是三阶行列式（1.2.3）式可以写成

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

用以上记法表示二阶行列式也成立

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

现在，我们就根据这些规律定义 n 阶行列式.

定义 1.2.1　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，并冠以符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，得

到形如$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的项，其中$j_1,j_2,\cdots,j_n$是$1,2,\cdots,n$的排列，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为这个排列的逆序数.由于这样的排列共有$n!$个，因而形如$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的项共有$n!$个，所有这$n!$项的代数和$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$称为**$n$阶行列式**，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (1.2.4)$$

简记作$D=\Delta(a_{ij})$（或记为$D=\det(a_{ij})$）.数a_{ij}称为行列式D中的**元素**，或简称为**元**.这里，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有$n$级排列求和.

当$n=1$时，规定$|a|=a$.当$n=2,3$时，按此定义与前面用对角线法则定义的二、三阶行列式是一致的.

注意：四阶或四阶以上的行列式就不像二、三阶行列式那样可以直接用对角线法则计算.

例 1.2.3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式.计算的结果应该为$4!=24$项的代数和，但是这个行列式的零元素较多，所以不为零的项就不多了.第一行能取$a_{11}=3$和$a_{13}=-1$，第二行仅能取$a_{22}=2$和$a_{24}=-1$.当取$a_{11}=3,a_{22}=2$时，第三行必取$a_{33}=3$.第四行也仅有一种取法$a_{44}=1$.故而，这个行列式有

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=3\times2\times3\times1=18,$$

$$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}=(-1)\times(-1)\times1\times(-3)=-3,$$

而第一项的列标排列为1234，逆序数为0，为偶排列，取正号；第二项的列标排列为3421，逆序数为5，为奇排列，取负号.

所以原行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^5 a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} = 18-(-3)=21.$$

例 1.2.4 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 在这个行列式中,第 n 行仅有一个不为零的元素 a_{nn},故这一行只能取 a_{nn} 项;在第 $n-1$ 行中有 2 个不为零的元素 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$,由于已经取了第 n 列的 a_{nn},故此时就不能再取第 n 列的元素 $a_{n-1,n}$ 了,而只能取 $a_{n-1,n-1}$,依此类推,第一行也仅有一种取法 a_{11},故而这个行列式的结果除了 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 项外,其余全为零,而这一项的列指标排列是偶排列.

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

换句话说,这个行列式就等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上元素的乘积,同样可求下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \quad \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

这种除主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角形行列式**.

例 1.2.5 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

证 同例 1.2.4 一样，此行列式也仅有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$，而它的符号由列指标的逆序数而定，其列指标排列为 $n(n-1)\cdots 21$，逆序数为 $\tau=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

需要指出的是，对于行列式的定义中一般项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，行指标已经按自然顺序排好，它的逆序数已为零，为偶排列.所以在取符号时，$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ 的指数并未把行指标所成排列的逆序数计算在内，而只计算列指标的逆序数.而在这 n 个数的乘法中，因子满足交换律，适当调整次序后可把列指标 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成自然排列，即有 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，此时原来的行指标由自然排列变成了排列 $i_1i_2\cdots i_n$，由推论 1.1.1 可知，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 相同，所以行列式的一般项也可以写成 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$，$n$ 阶行列式定义也等价于

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.2.5}$$