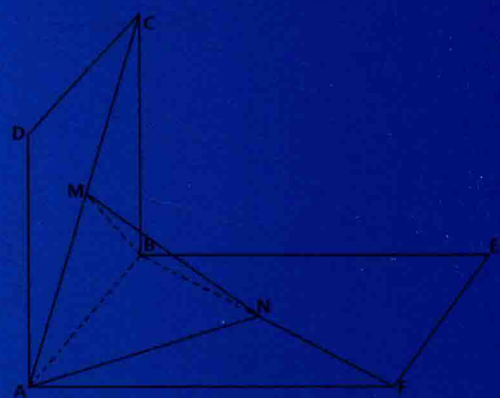
工科研究生数学类基础课程应用系列丛书

应用泛函分析

纪友清　郭　华
曹　阳　徐新军　编



科学出版社

工科研究生数学类基础课程应用系列丛书

应用泛函分析

纪友清　郭　华　曹　阳　徐新军　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为工学各专业研究生学习泛函分析课程编写的教材. 全书共分4章，分别介绍实分析基础、距离空间、Hilbert 空间、有界线性算子等内容，并在附录里介绍了上述知识的一些延伸内容：Sobolev 空间、正规正交基、二次变分问题等.

本书取材精炼，结构紧凑，关注应用，每章末都附有难易适度的习题. 在注重培养学生掌握泛函分析基本理论和方法的同时，也注重培养学生应用泛函分析的思想方法解决实际问题的能力.

本书可作为工学研究生的教学用书，也可作为对泛函分析的理论方法感兴趣的初学者的学习用书，读者只需具备高等数学和线性代数的基础知识便可以使用本书.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/纪友清等编. —北京：科学出版社，2018.3
(工科研究生数学类基础课程应用系列丛书)
ISBN 978-7-03-054228-1
I. ①应… II. ①纪… III. ①泛函分析-研究生-教材 IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第203180号

责任编辑：张中兴　梁　清／责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018年3月第 一 版　开本：720×1000　1/16
2018年3月第一次印刷　印张：13 1/2
字数：272 000

定价：39.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

“工科研究生数学类基础课程应用系列丛书”
编委会名单

序　言

“工科研究生数学类基础课程应用系列丛书”是根据教育部关于研究生培养指导规划和目标、结合当前研究生教育改革的实际情况, 借鉴国内外研究生教育的最新研究成果, 旨在规范和加强研究生公共基础课教学的一套研究生公共数学系列教材. 本套丛书经过对研究生公共数学课程整合、优化, 共编写 13 册教材, 具体包括:《现代分析基础》(上、下册)、《代数学基础》(上、下册)、《现代统计学基础》(上、下册)、《现代微分方程概论》(上、下册)、《现代数值计算基础》(上、下册)、《现代优化理论与方法》(上、下册)、《应用泛函分析》. 其中上册为非数学类硕士研究生教材, 下册为非数学类博士研究生教材.

本套丛书的编写体现了时代的特征, 本着加强基础、淡化证明、强调应用的原则, 力争做到科学性、系统性和实用性的统一, 着眼于传授教学知识和培养学生数学素养的高度结合.

本套丛书吸取国内外同类教材的精华, 参考近年来出版的一些新教材, 结合当前研究生公共数学教学改革的实际, 特别是综合性大学非数学类研究生公共数学的实际需求.

本套丛书体例科学、结构合理、内容经典且追求创新, 既是作者多年教学经验的总结, 又是作者长期教学研究和科学研究成果的体现. 每章后面既有巩固基本概念、基本理论、基本运算的基础题目, 又有提高学生抽象思维、逻辑推理和综合运用基础知识解题的提高题目, 为学生掌握教材基本内容, 运用教材基本知识开发创新思维提供了可行条件.

本套丛书适用面广、涉及专业全、教学内容新, 可作为综合性大学非数学专业研究生公共数学教材和教学参考书, 在教材体系与内容的编排上认真考虑不同专业、不同学时的授课对象的需求, 可选择不同的教学模块, 以满足广大读者的实际需要.

本套丛书的编写过程中, 得到了吉林大学研究生院、吉林大学数学学院和数学研究所的大力支持, 也得到了科学出版社的领导和编辑的鼎力帮助, 在此一并致谢.

由于编者水平有限, 书中的不妥之处在所难免, 恳请广大读者批评指正, 以期不断完善.

丛书编委会

2015 年 3 月于长春

前言

本书是“工科研究生数学类基础课程应用系列丛书”中的一个分册, 是面向综合性大学非数学专业研究生公共数学应用泛函分析方面的教材. 按照系列教材适用面广、涉及专业全、教学内容新的整体要求, 在内容的编排上认真考虑不同专业、不同学时的授课对象的需求, 力争在加大内容覆盖面与本科课程顺利衔接的同时, 做到内容的模块化设计, 尽量做到教材的自足性和教学的灵活性.

由于研究生来自不同的学校, 本科的学习内容不尽相同, 而实变函数的基础知识无论在理论上, 还是在应用上, 对研究生阶段学习泛函分析课程都是有意义的. 所以本书的第 1 章力图为不熟悉或没有接触过实变函数课程的学生迅速地补上这部分的必要知识和结论, 而系统学习过这方面内容的读者可以直接学习后继章节. 第 2 章侧重于讲解距离空间, 特别是 Banach 空间的基本结果. 第 3 章则包含了 Hilbert 空间理论的基础内容. 第 4 章主要介绍有界线性算子的较为常用的内容. 为了配合非数学专业研究生的实际需要, 本书的附录给出了 Sobolev 空间的简要介绍以及从泛函分析角度考察 Dirichlet 问题的初等结果, 以期为介绍泛函分析的实际应用给出更进一步的实例.

本教材在编写过程中得到了吉林大学数学学院和数学研究所的大力支持，也得到了科学出版社的领导和编辑的鼎力帮助，在此一并致谢.

由于编者水平有限，书中的不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

编　者

2016 年 9 月于长春

目　录

第 1 章　实分析基础

实分析理论是实变量的分析学, 是微积分学的进一步发展. 本章主要介绍其中的集合论、实数理论、点集论、测度论和积分论的一些基本知识, 为后面学习泛函分析奠定基础.

1.1　集合与映射

1.1.1　集合

集合是数学中的一个基本概念. 在现代数学中已被普遍采用. 通常将具有某种特定性质的具体或抽象对象的全体称为**集合**, 简称为**集**, 其中的每个对象称为该集的**元素**. 例如, 有理数集, 实数集, 连续函数集等都是常用的集合.

常用大写字母 $A, B, C, X, Y, Z, \cdots$ 表示集合, 用小写字母 $a, b, c, x, y, z, \cdots$ 表示元素. 当集合 A 为具有某种性质 P 的元素全体时, 可表示为

$$A = \{x | x\text{具有性质}P\},$$

或

$$A = \{x : x\text{具有性质}P\}.$$

如果元素 x 属于集合 A, 则记为 $x \in A$; 如果 x 不属于 A, 则记为 $x \notin A$. 不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\varnothing$; 含有有限个元素的集合称为**有限集**; 含有无限个元素的集合称为**无限集**.

如果集合 A 的元素都属于集合 B, 则称 A 是 B 的**子集**, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 显然 $A \subset A$, 规定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集. 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的**真子集**; 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与 B**相等**, 记为 $A = B$.

集合的运算定义如下.

定义 1.1.1　设 A, B 为两个集合, 由 A 与 B 的全体元素所组成的集合称为 A 与 B 的**并集**或**和集**, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A\text{或}x \in B\};$$

由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**, 记为 $A\cap B$, 即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{且}x\in B\};$$

由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**, 记为 $A\backslash B$ 或 $A-B$, 即

$$A\backslash B=\{x|x\in A\text{且}x\notin B\};$$

当 $A\supset B$ 时, 称 A 与 B 的差集 $A\backslash B$ 为 B 关于 A 的**余集**或**补集**, 记为 B^C 或 C_AB.

集合的并与交运算可以推广到任意多个(有限或无限)集合的情形. 设 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 是一集族, 其中 α 为集合的指标, 它在指标集 I 中变化, 则由一切 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的所有元素组成的集合称为这族集合的**并集**或**和集**, 记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 即

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\exists\alpha\in I,x\in A_\alpha\};$$

同时属于每个集合 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的所有元素组成的集合称为这族集合的**交集**, 记为 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 即

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\forall\alpha\in I,x\in A_\alpha\}.$$

集合的运算满足如下的运算规律:

(1) 幂等律 $A\bigcup A=A,\ A\bigcap A=A$;

(2) 交换律 $A\bigcup B=B\bigcup A,\ A\bigcap B=B\bigcap A$;

(3) 结合律 $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C),\ (A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$;

(4) 分配律 $A\bigcup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\bigcup A_\alpha),\ A\bigcap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A\bigcap A_\alpha)$,

$(A-B)\bigcap C=(A\bigcap C)-(B\bigcap C)$;

(5) 对偶律 (De Morgan 律) $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^C=\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^C,\ \left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^C=\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^C$.

定义 1.1.2 设 A 与 B 是两个非空集合, 由所有有序元素组 $(x,y)(x\in A,y\in B)$ 组成的集合称为 A 与 B 的**直积**, 记为 $A\times B$, 即

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}.$$

例如, 二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 与其自身的直积. $A\times B$ 中的元素为有序对, 当 $x\neq y$ 时, $(x,y)\neq(y,x)$, 而且 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2$, 因此, 一般情况下, 有 $A\times B\neq B\times A$.

直积的概念可以推广到有限多个非空集合的情形. 设集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个非空集合, 则称集合

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_k \in A_k, k = 1, 2, \cdots, n\}$$

为它们的**直积**. 若 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, 则记 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A^n$.

1.1.2 映射

定义 1.1.3 设 X, Y 是两个非空集合, 如果存在一个对应法则 f, 使得对于 X 中的任何一个元素 x, 按照法则 f, 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 是 X 到 Y 的一个**映射**或**算子**, 记为 $f: X \to Y$, 并称 y 为 x 在映射 f 下的**像**, 记为 $y = f(x)$. 对于任意一个固定的 y, 称集合 $\{x | y = f(x)\}$ 为 y 在映射 f 下的**原像**, 记为 $f^{-1}(y)$. 称 X 为 f 的定义域, 记为 $D(f)$; 称集合 $f(X) = \{y | y = f(x), x \in X\}$ 为 f 的**值域**, 记为 $R(f)$; 称集合 $\{(x, y) | y = f(x), x \in X\} \subset X \times Y$ 为映射 f 的**图像**.

一般地, $R(f)$ 是 Y 的一个子集, 不一定等于 Y. 在上述定义中, 如果 X 为 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$, Y 为实数集合 $\mathbf{R}$(一维欧氏空间), 则 $y = f(x)$ 就是高等数学中已学过的一元或多元函数, 因此, 映射的概念是函数概念的推广, 是将函数的定义域和值域推广到一般集合上了. 当 $Y = X$ 时, 也称 f 为定义在 X 上的**变换**; 当 Y 是数集 (实数集 $\mathbf{R}$ 或复数集 $\mathbf{C}$) 时, 也称 f 为定义在 X 上的**泛函**.

例 1.1.1 设 X 为 $\mathbf{R}$ 上的二次可微函数全体构成的集合, Y 是 $\mathbf{R}$ 上的函数全体构成的集合, a_0, a_1, a_2 为常数, 定义如下对应关系:

$$f: x(t) \to a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t), \quad x(t) \in X,$$

则 f 为 X 到 Y 的映射. 当 $a_2 \neq 0$ 时, 称此映射为**二阶微分算子**.

例 1.1.2 设 X 为非空集合, $f: X \to X$, 且满足

$$f(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

则 f 是 X 到其自身的一个映射, 称为 X 上的**恒等映射**或**恒等变换**, 记为 I_X.

例 1.1.3 设 $C[a, b]$ 为区间 $[a, b]$ 上的连续函数全体构成的集合, 则对 $\forall x(t) \in C[a, b]$, 积分

$$f(x) = \int_a^b x(t) \mathrm{d}t$$

为 $C[a, b]$ 上的一个**泛函**.

定义 1.1.4　设 X, Y 是两个非空集合, 对于映射 $f: X \to Y$, 如果 $f(X) = Y$, 则称 f 为 X 到 Y 上的**满射**; 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是 X 到 Y 的**单射**; 如果 f 既是满射又是单射, 则称 f 为 X 到 Y 上的**双射**或**一一映射**.

例如, 对函数 $f(x) = |x|$, 当 $f: (-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$ 时, 是满射而不是单射; 当 $f: [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ 时, 是单射而不是满射; 当 $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 或 $f: (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$ 时, 是双射.

定义 1.1.5　设 X, Y, Z 为非空集合, 对映射 $f: X \to Y, g: Y \to Z$, 由

$$h(x) = g[f(x)]$$

所确定的映射 $h: X \to Z$ 称为映射 f 和 g 的**复合映射**, 记为 $h = g \circ f$.

定义 1.1.6　设 X, Y 为非空集合, 对映射 $f: X \to Y$, 若存在映射 $g: Y \to X$, 使得

$$g \circ f = I_X, \quad f \circ g = I_Y,$$

则称 g 为 f 的**逆映射**, 记为 f^{-1}.

复合映射是复合函数概念的推广, 逆映射是反函数概念的推广.

定义 1.1.7　设 f, F 分别是 $D(f), D(F)$ 到 Y 中的映射, 若 $D(f) \subset D(F)$, 且对于任意的 $x \in D(f)$, 有 $f(x) = F(x)$, 则称 F 是 f 在集合 $D(F)$ 上的**延拓**或**扩张**, 称 f 是 F 在 $D(f)$ 上的**限制**, 记为 $f = F|_{D(f)}$.

1.1.3　集合的基数

对于有限集, 我们可以通过计算其所含元素的个数比较大小, 但对于无限集, 其所含元素为无穷多个, 无法计算其个数, 如何比较大小呢? 下面的讨论将回答这一问题.

定义 1.1.8　设 A, B 为两个集合, 如果存在一个 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B**对等**, 记为 $A \sim B$.

显然, 对等关系满足下列性质:

(1) 自反性　$A \sim A$;

(2) 对称性　$A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(3) 传递性　$A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

一般地, 将满足上述三条性质的关系称为**等价关系**. 因此, 两个集合的对等关系就是一种等价关系.

定义 1.1.9　设 A, B 为两个集合, 若 $A \sim B$, 则称 A 与 B 具有相同的**基数**或**势**, 记为 $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$.

例如, 实数集 $\mathbf{R}$ 与区间 $(0,1)$ 是对等的, 两者之间存在的一一映射为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2},\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

定理 1.1.1 任何一个无限集必能与它的某一真子集对等.

证明 设 A 是一个无限集, 任取一个元素 $a_1\in A$, 因为 A 为无限集, 则 $A-\{a_1\}\neq\varnothing$; 再从集 $A-\{a_1\}$ 中取出一个元素 a_2, 则 $A-\{a_1,a_2\}\neq\varnothing$, 将此方法依次进行下去, 可选取一列属于 A 的互异元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$, 记 $B=A-\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$, 则 $C=B\bigcup\{a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$ 为 A 的真子集. 定义映射 $T:A\to C$ 且当 $a\in B$ 时, $T(a)=a$; 当 $a=a_k$ 时, $T(a)=T(a_k)=a_{k+1},k=1,2,\cdots$, 则 T 为 A 到 C 上的一一映射, 故 $A\sim C$. ◇

有限集与其真子集不可能建立一一映射, 因此无限集与有限集有本质的区别. 由于空集不含任何元素, 故规定 $\bar{\bar{\varnothing}}=0$; 有限集的基数就是其元素的个数; 将自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数称为**可数基数**, 记为 $\bar{\bar{\mathbf{N}}}=\aleph_0$(读作"阿列夫零"); 将实数集 $\mathbf{R}$ 的基数称为**连续统基数**, 记为 $\bar{\bar{\mathbf{R}}}=c$.

定义 1.1.10 与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集合称为**可数集**或**可列集**. 一个集合是有限集或可数集时, 称其为**至多可数**.

例如, 整数集 $\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$, 函数系 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$ 和

$$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

都是可数集.

由上述定义知, A 是可数集的充分必要条件是 A 可表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

可数集的性质如下.

性质 1 可数集的任意子集, 若不是有限集必是可数集.

证明 设 A 是可数集, 则 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. 设 B 是 A 的非空子集, 则 B 的元素应是 A 的元素列的一个子列, 即 $B=\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots\}$, 其中 $n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots\in\mathbf{N}$. 若指标 $n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots$ 中有最大数, 则 B 为一个有限集; 否则 B 为一个无限集. 当 B 是无限集时, 将 B 的元素 a_{n_k} 与自然数 k 对应, 可知集合 B 与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等, 从而 B 是可数集. ◇

性质 2 任意无限集都包含可数子集.

证明 设 M 是一无限集, 显然 $M\neq\varnothing$, 故存在 $a_1\in M$, 因为 M 是无限集, 所以 $M-\{a_1\}$ 也是无限集, 从而存在 $a_2\in M-\{a_1\}$, 显然, $a_2\in M$ 且 $a_2\neq a_1$. 假设已从 M 中取出了 k 个互异元素 $a_1,a_2,\cdots,a_k$, 因为 M 是无限集, 所

以 $M-\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 也是无限集, 从而存在 $a_{k+1}\in M-\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$, 显然 $a_{k+1}\in M$ 且 $a_{k+1}\neq a_i, i=1,2,\cdots,k$. 由数学归纳法, 可得到 M 的一个可数子集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. ◇

性质 3　可数个有限集的并集是可数集; 有限个或可数个可数集的并集是可数集.

证明　不失一般性, 仅就可数个可数集的情形来证, 其他情形证法类似. 设 $A_n=\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots\}$ 为可数集, 其中 $n,k\in\mathbf{N}$, 不妨假设它们两两不交, 否则可以用 $A_1, A_2-A_1, A_3-(A_1\bigcup A_2),\cdots, A_n-\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}A_k,\cdots$ 代替它们. 将 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的所有元素排列如下

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & & a_{15} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & a_{25} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & a_{35} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & a_{45} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
a_{51} & & a_{52} & & a_{53} & & a_{54} & & a_{55} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

将上述所有元素从左上角起按箭头次序列出

$$a_{11},a_{12},a_{21},a_{31},a_{22},a_{13},a_{14},a_{23},a_{32},a_{41},\cdots,$$

故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为可数集. ◇

例 1.1.4　有理数集为可数集.

证明　因为每个有理数都可写成既约分数 p/q, 其中 p,q 都为整数, 且规定 $q\in\mathbf{N}$, 所以对每个固定的 q, $A_q=\{p/q|q\in\mathbf{Z}\}$ 是一可数集. 从而有理数集

$$\mathbf{Q}=\{p/q|p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}\}=\bigcup_{q=1}^{\infty}A_q$$

为可数个可数集的并集. 由性质 3 知, 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集. ◇

性质 4　有限个可数集的直积是可数集.

证明　先证两个集合的情形. 设 A,B 是两个可数集,

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\},\quad B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots\},$$

则

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \cdots\},$$

其中 (a_i, b_j) 是按照 $i + j = m(m = 2, 3, \cdots)$ 由小到大的次序排列出来的. 对于每一个固定的 m 值, $a(i, j)$ 的个数都是有限的, 故 $A \times B$ 是可数集.

再证一般有限个集合的情形. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个可数集, 假设 $n = k$ 时定理成立, 即直积 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为可数集, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1} = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$$

是两个集合的直积, 故也是可数集. ◇

例 1.1.5 有理系数多项式全体为可数集.

证明 设 P 为有理系数多项式全体构成的集合,

$$P_n = \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n | a_k \in \mathbf{Q}, k = 0, 1, \cdots, n\},$$

则 $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. 若能证明 $P_n, n \in \mathbf{N}$ 为可数集, 则由性质 3 可知 P 为可数集.

事实上, 因为多项式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 与 $n+1$ 维向量 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 一一对应, 所以 $P \sim \mathbf{Q}^{n+1}$. 由于有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集, 根据性质 4 知 $\mathbf{Q}^{n+1}$ 也是可数集, 从而 P 为可数集. ◇

类似可以证明: $\mathbf{R}^n$ 上的有理点集为可数集.

定义 1.1.11 不是可数集的无限集称为**不可数集**.

定理 1.1.2 区间 $[0, 1]$ 是不可数集.

此定理的证明见 1.2.2 例.

易证开区间 $(0, 1), (a, b)$, 闭区间 $[a, b]$ 和实数集 $\mathbf{R}$ 都可与 $[0, 1]$ 对等, 因而它们都是不可数集, 其基数都是连续统的基数 c. 可以证明可数集的基数 $\aleph_0 < c$.

1.2 实数与函数的有关定理

1.2.1 实数的有关定理

定义 1.2.1 设 E 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 若存在常数 M(或 m), 使得对 $\forall x \in E$, 都有 $x \leqslant M$(或 $x \geqslant m$), 则称集合 E**有上界**(或**有下界**), 常数 M(或 m) 称为集合 E 的**上界**(或**下界**); 否则称 E**无上界**(或**无下界**). 若集合 E 既有上界又有下界, 则称 E **有界**, 否则就称 E **无界**.

若集合 E 有上 (下) 界, 其上 (下) 界是不唯一的. 如果 M 是 E 的上 (下) 界, 则任何大 (小) 于 M 的数 M_1 也是 E 的上界. 注意 E 的上界不一定在 E 中. 例