

张宇数学教育系列丛书

时代云图
NEW EPOCH PUBLISHING

理工社®

2018

张宇 考研数学

真题大全解

解析分册·数学一

主编○张宇 副主编○高昆轮

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

张宇 考研数学 真题大全解

解析分册·数学一

主编○张宇 副主编○高昆轮

张宇数学教育系列丛书编辑委员会 (按姓氏拼音排序)

蔡燧林 陈常伟 陈静静 崔巧莲 高昆轮 郭二芳 胡金德 黄文义 贾建厂
兰杰 李刚 李海鹏 廖家斌 刘露 柳青 田宝玉 万金平 王娜 王秀军
王玉东 吴萍 徐兵 严守权 亦一(笔名) 于吉霞 曾凡(笔名) 张乐
张婷婷 张心琦 张亚楠 张宇 赵乐 赵修坤 朱杰

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 解析分册. 数学一 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社, 2017. 6

ISBN 978—7—5682—4127—4

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 126339 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 20.5

字 数 / 512 千字

版 次 / 2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月第 1 次印刷

定 价 / 69.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 孟雯雯

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

前言 (18版)

P R E F A C E

本书收集并详解了从 1987 到 2017 年,共 31 年的真题,称真题大全解。

我建议读者按照下面的方法来用这本珍贵的资料。

首先,要学完全部的考试内容,有了全面的知识结构以后,再来做这卷子,这是前提。

接下来,按照套卷的形式,一套一套地完成试卷,每做完 3 至 5 套卷子,给自己评一下分数,算一个平均值出来,做到心中有数,再去做一个 3 至 5 套卷子,以期有更好的成绩,直至完成所有试卷。

第二遍,按照章节顺序去做题,有了上面第一遍做套卷的经验和教训,这一遍,重在薄弱环节的把握,局部加力,查漏补缺,对症下药。

这样,应能最好地发挥真题的作用。其他要紧的事情,请看上一版前言。

张宇

2017 年 5 月 于北京

张宇数学教育系列丛书详细说明

书名	主要内容	适用阶段
张宇带你学系列 (高等数学(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	体现了本科教学要求与考研要求的差异,列出了章节学习的知识体系,给出了所有课后习题的全面解析,精选了不同数量的经典例题	大一大二学生课后习题复习及考研基础阶段
全国高校期末考试过关必备 与高分指南系列 (高等数学(微积分)(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据,以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考,设置了全国高校考试通用的必考点精讲以及考试试题,命题具有通用性	大一大二学生期末复习及考研基础阶段
张宇高等数学18讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中高等数学部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题组组长参与	基础阶段
张宇线性代数9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中线性代数部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇概率论与数理统计9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇考研数学题源探析 经典1000题 (数学一、数学二、数学三)	以考研命题所使用的所有题目源头为依据,精心挑选和编制了1000道左右高仿真练习题,题目与考研无缝接轨,综合性强,由易到难,利于考生复习过程中对知识点逐层加深理解。原命题组组长参与	基础阶段+强化阶段
张宇考研数学真题大全解 (数学一、数学二、数学三)	囊括考研数学命题以来所有考研真题,给读者提供原汁原味的实考题,有效掌握命题方向及解题思路。原命题组组长参与	强化阶段
考研数学命题人终极预测8套卷 (数学一、数学二、数学三)	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上)。实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段
张宇考研数学最后4套卷 (数学一、数学二、数学三)	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下)。实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段

注:主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面,市面上其他任何同名图书均非张宇所写,请考生注意鉴别。出版日期见封四。

以上书籍新浪微博答疑地址: @张宇考研图书交流论坛 <http://weibo.com/yuntubook/>

张宇新浪微博: @宇哥考研 <http://weibo.com/zhangyumaths/>

先给读者讲个故事。1637年,法国律师费马到图书馆看书,在书上读到一句话:“方程 $x^2+y^2=z^2$ 有正整数解。”现在说来,小学生都知道: $3^2+4^2=5^2$,上述命题显然成立。然而,费马没有就此罢休,他违反图书馆规定,在书上“乱写乱画”:“你们不要以为这个事情很简单,方程 $x^3+y^3=z^3$ 一定没有正整数解,方程 $x^4+y^4=z^4$ 一定没有正整数解,……,也就是说,对于方程 $x^n+y^n=z^n$,只要 $n\geq 3$ 为正整数,则这样的方程就一定没有正整数解了。”这等于是提出了一个前所未有的定理,是公然向数学界提出挑战。不仅如此,费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话:“我已经给上述定理做了完整美妙的证明,只是这个位置太小了,所以我就不写了。”——这哪里是挑战?简直就是挑衅!

数学界应战吗?那是当然,数学界绝不缺乏天才,怎么会被一个“外行”难倒?于是,读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼茨等均开始研究费马的这个定理,可是历史就是这么奇妙,他们都没有证明出来。一百年过去了,两百年过去了,三百年过去了,直到1993年,也就是在费马提出这个定理的356年之后,才被美籍华裔数学家威尔斯证明出来,单单证明就写了1000多页。威尔斯的证明举世震惊,因此他也获得了至今唯一一个最高数学奖——菲尔兹奖(“唯一”是因为菲尔兹奖只授予40岁以前的数学家,但是当时的威尔斯已经45岁了,由于他的贡献太大,所以破例授予他这个数学上的最高奖)。

费马的这个定理,被数学界称为“会下金蛋的鸡”,因为在证明这个定理的数百年中,产生了很多独立的数学分支,使得数学得到了蓬勃发展,这正是:提出一个好的问题,往往比解决它更有价值。因此,费马的这个定理被正式命名为:费马大定理。你见过有几个定理叫“大定理”?很少很少。一个“大”字,足以体现这个定理的分量。

故事讲完了,这里讲了什么道理呢?读者自己体会吧——其实,我什么道理都没讲——我只想借用“费马大定理”的“大”字,把我的这本书命名为:真题“大”全解。因为,这本书,我以为,相对于其他真题书来讲,是更有分量的。

一、真题的重要性不言而喻

从1987年开始,考研数学实行了全国统一考试的形式,考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准。直到今天,几十年下来,考研数学的命题可以说极其成熟了,也逐渐出现了以下两大特点:

第一,考研数学命题的风格稳定:重视基础,淡化技巧,计算量大。考研数学试题是命题组集体智慧的结晶,在确定了上述命题的风格和原则后,考题受到命题组各位成员自身“喜好”的影响很小。所以,做好历年真题,是熟悉考研数学风格的好路子。

第二,考研数学命题的形势特殊:命题时间短,任务重,参考以往考题成为必须。为了确保考研数学命题的安全性,不出现泄漏考题的情况,现在的考研命题时间很短,已经不再像多年前那样宽松

(以前命题都是提前半年出好题,有足够的时间来校对和检验试题的正确性和科学性)——在考前集中命题,几乎没有时间去校对和检验了。所以,为了保证试题不出错且难度适中,命题人盯上了从1987年到今天积累下来的命制过的试题(这里还包括从未考过的备考卷上的试题),以此为基础,“参考”“改编”甚至“照搬”这些题。故,读者应该懂得,做好历年真题,是预测考研数学考题的好路子。

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则。

第一,考研数学试题收录的全面性。收录从全国统考以来所有的考研数学试题,而不是部分试题,给读者提供一份完整的历史资料。从而,力图给读者提供原汁原味的历年的实考题,是本书坚持的第一个原则。

第二,考研数学试题解析的权威性。凡是有当年命题人自己写的答案,忠实其答案;凡是有当年考试中心组织的专家写的答案,参考其答案。总之,本书对真题的答案解析,是最权威、最深刻的,这是本书坚持的第二个原则。

这两个原则,事实上,就是本书分量最重的地方——每一道题的收录,都有根有据;每一道题的解析,都有源有头。

三、本书使用说明

本书共分两册——试卷分册和解析分册。试卷分册中,我们将1987年至2016年的真题试卷完整地展现给读者,供读者检测、演练之用;解析分册中,我们提供给读者全面、深刻、由命题人把关的试题解析。其中,为了不影响考生有针对性地备考,有些较早年份的超纲题目,我做了必要的删除。那么在试卷分册中,被删除题目的套卷中,余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分。当然,考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析,我们在解析分册中给出了权威的解答,依据考试年份与题号可作相应查找。值得注意的是,本书仅为数学一的真题大全解,需考数学一的考生若做完了这本书的题目,想再多做演练,亦可参考数学二与数学三的真题大全解。

对于真题大全解的使用,与习题集的使用有类似之处。我在《张宇考研数学题源探析经典1000题》中已经给读者提出了建议:把题目的演算过程写到草稿纸上去,把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去,总之,不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了,当你下次再做这个题目时,在没有任何提示的情况下,你能保证自己一定会做吗?“干干净净”的真题集,事实上是对读者提出了高标准、严要求,希望读者把真题全部做完一遍后,第二遍就能够查漏补缺、扫清死角。

感谢从命题组中退下来的老专家们,在数学原题的收集、确认与解析中,他们作出了重要贡献。感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑,感谢高等教育出版社的刘佳同志,他们给作者提供了很多便利和帮助。

张宇

2016年5月于北京

第一部分 高等数学

1

第 1 章 函数、极限、连续	3
1.1 函数及其性质	4
1.2 极限的定义及性质	5
1.3 求函数的极限	6
1.4 求数列的极限	12
1.5 无穷小的比阶	15
1.6 连续与间断点	18
第 2 章 一元函数微分学	20
2.1 导数与微分的定义及应用	21
2.2 求各类函数的导数与微分	26
2.3 导数的几何应用——曲线的切线与法线,变化率	29
2.4 函数(曲线)的性态	31
2.5 不等式的证明	37
2.6 方程的根(零点问题)	41
2.7 有关微分中值定理的证明题	44
2.8 综合问题	47
第 3 章 一元函数积分学	49
3.1 定积分的概念与性质	50
3.2 不定积分的计算	53
3.3 定积分的计算	55
3.4 反常积分的计算	58
3.5 反常积分的敛散	58
3.6 变限积分函数的性质及应用	59
3.7 定积分的应用	63
第 4 章 向量代数和空间解析几何	66
4.1 向量运算	66
4.2 平面及直线的方程	66
4.3 平面及直线的位置关系讨论、夹角问题	68

4.4	距离问题	68
4.5	投影曲线与旋转曲面	68
第5章	多元函数微分学	70
5.1	基本概念	70
5.2	求偏导与全微分	72
5.3	变量代换下方程的化简	79
5.4	求极值与最值	81
5.5	多元函数微分学的几何应用	87
第6章	多元函数积分学	92
6.1	重积分的概念与性质	93
6.2	二重积分	95
6.3	三重积分	100
6.4	曲线积分(边界方程代入被积函数化简)	102
6.5	曲面积分(边界方程代入被积函数化简)	118
6.6	散度、旋度	129
6.7	多元函数积分学的应用	130
6.8	综合题	134
第7章	无穷级数	136
7.1	常数项级数判敛	136
7.2	幂级数的收敛半径及收敛域	140
7.3	幂级数求和(常规求和、非常规求和)	142
7.4	幂级数展开	149
7.5	证明题	151
7.6	傅里叶级数	153
第8章	常微分方程	157
8.1	一阶常微分方程	157
8.2	二阶可降阶方程	160
8.3	高阶常系数线性方程	161
8.4	欧拉方程	165
8.5	积分方程	166
8.6	应用题	166

第二部分 线性代数

173

第1章	行列式	175
1.1	数字型行列式的计算	175
1.2	抽象型行列式的计算	178
1.3	克拉默法则	180
1.4	$ A $ 是否为 0	181



第2章 矩阵	182
2.1 幂运算	182
2.2 伴随矩阵	184
2.3 逆矩阵	185
2.4 初等变换	188
2.5 矩阵方程	189
2.6 矩阵的秩	191
第3章 向量	195
3.1 线性相关与线性无关	196
3.2 线性表出	201
3.3 秩、极大线性无关组	204
3.4 向量空间	204
第4章 线性方程组	208
4.1 方程组有解无解的判别	209
4.2 解具体方程组(含参数)	210
4.3 解抽象方程组	219
4.4 基础解系	221
4.5 公共解与同解	223
第5章 矩阵的特征值和特征向量	225
5.1 求特征值与特征向量	226
5.2 相似对角化的判定及求可逆矩阵 P	230
5.3 相似的应用	236
5.4 实对称矩阵的特征值与特征向量	238
第6章 二次型	242
6.1 化二次型为标准形	243
6.2 正定问题	253
6.3 合同问题	254

第三部分 概率论与数理统计

255

第1章 随机事件和概率	257
1.1 古典概型与几何概型	258
1.2 概率、条件概率的基本性质及公式	259
1.3 事件的独立性及独立重复试验	263
第2章 随机变量及分布	266
2.1 分布函数、概率密度、分布律的概念与性质	267
2.2 求随机变量的概率分布	268
2.3 利用分布求概率及逆问题	269
2.4 求随机变量函数的分布	272



第3章 多维随机变量及其分布	277
3.1 二维离散型随机变量联合分布、边缘分布、条件分布及 独立性	277
3.2 二维连续型随机变量联合分布、边缘分布、条件分布及 独立性	283
3.3 独立及不相关	285
3.4 二维随机变量函数的分布	286
第4章 随机变量的数字特征	293
4.1 一维随机变量及其函数的数字特征	294
4.2 多维随机变量及其函数的数字特征	297
第5章 大数定律和中心极限定理	302
第6章 数理统计的基本概念	303
6.1 三大分布	303
6.2 统计量的数字特征	304
第7章 参数估计	307
7.1 矩估计与最大似然估计	307
7.2 估计量的评选标准	314
7.3 区间估计	316
第8章 假设检验	318

高等数学

第一部分



第1章 函数、极限、连续

考点分布

分 年 考 点 值 份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02
复合函数		5		3												
极限的定义及性质						3		3			3			5		
两个基本极限				3	5		5		3	3			3			
洛必达法则						5		3				3	3			
单调有界准则										5						
无穷小的比阶					3											6
连续与间断点																

1987—2002 年

分 年 考 点 值 份	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计 (87—17 年)
复合函数																8
极限的定义及性质	4					9									10	37
两个基本极限	4							4	10			10	4	4		58
洛必达法则																14
单调有界准则				12		4			10				10			41
无穷小的比阶				4	4		4				4					25
连续与间断点															4	4

2003—2017 年



1.1 函数及其性质

考点点睛

1. 有界性

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界.

(3) $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 在 I 上有界.

2. 奇偶性

(1) $f(x)$ 是可导的奇(偶)函数, 则 $f'(x)$ 是偶(奇)函数.

(2) $f(x)$ 是连续的奇函数, 则其所有原函数都是偶函数;

$f(x)$ 是连续的偶函数, 则其所有原函数中只有一个是奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 上有定义, 则 $f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

3. 周期性

(1) $f(x)$ 是可导的以 T 为周期的周期函数, 则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.

(2) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T f(t) dt = 0.$$

(3) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{\int_0^T f(t) dt}{T} x \text{ 以 } T \text{ 为周期}.$$

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导,

(1) 任意 $x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调增加;

任意 $x \in I, f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调减少.

(2) 任意 $x \in I, f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调不减;

任意 $x \in I, f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调不减.

在用单调性说明方程的根的问题时只能使用(1)中的单调增加(减少), 而不能使用(2)中的单调不减(不减).

1 [1988-I] 已知 $f(x) = e^x, f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1 - x$, 得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x) \geq 0$ 得 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$, 所以

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}, x \leq 0.$$

2 [1990-I] 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

答 应填 1.

解 由 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 知, 对一切的 x 有 $|f(x)| \leq 1$, 则 $f[f(x)] = 1$.

注 函数的复合是一种重要的运算, 求两个分段函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数 $y = f[g(x)]$, 实际上就是将 $u = g(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中, 关键是搞清楚 $u = g(x)$ 的函数值落在 $y = f(u)$ 定义域的哪部分.



3 [1999] 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数.

答 应选(A).

解 直接法. 据“1.1 考点点睛”中的“2. 奇偶性”可知(A)正确.

排除法. (B)的反例: $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x + 1$ 不是奇函数;

(C)的反例: $f(x) = \cos^2 x$, $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$, 不论 C 取什么常数, $F(x)$ 都不是周期函数;

(D)的反例: $f(x) = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 但 $F(x) = -\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调减少的.

注 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 考查

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C = \int_0^x f(-u)d(-u) + C = \int_0^x -f(-u)du + C,$$

若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(u) = -f(-u)$, 进而对任意的常数 C 都有 $F(x) = F(-x)$;

若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(u) = f(-u)$, 进而当且仅当 $C=0$ 时有 $F(x) = -F(-x)$.

4 [2005] 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

答 应选(A).

解 本题同上一题, 都是在考查原函数的奇偶性与周期性等性质, 根据对上一题的分析, 便可直接选(A).

1.2 极限的定义及性质

5 [2003] 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

答 应选(D).

解 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = A (\exists)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n c_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{1} = A (\exists)$, 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 矛盾, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

注 由极限的局部保号性容易得到极限的局部保序性:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, 且 $A > B$, 则 $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > b_n$.

对于本题, 选项(A), (B)说对任意的 n 成立, 显然错了;

对于选项(C), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是典型的“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 其极限可能存在也可能不存在.



1.3 求函数的极限

考点点睛

求函数极限首先是化简,其次是判别类型选择方法.

常用的化简方法有:(1)非零常数因子先求出;(2)有理化;(3)通分;(4)倒代换.

常用的方法有:(1)四则运算法则及基本极限;(2)等价代换;(3)洛必达法则;(4)泰勒公式.

1. 常用的等价代换($x \rightarrow 0$)

$$\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^a - 1 \sim ax;$$

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3;$$

$$x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3, x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3;$$

$$x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2.$$

2. 几个重要函数的泰勒展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3);$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

3. 极限值与无穷小的关系

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow a} \alpha = 0.$$

1.3.1 需要分别求左右极限的情形

求分段函数在分段点处的极限,含绝对值函数、取整函数在相应点的极限,“ e^∞ ”及“ $\arctan \infty$ ”型($e^{+\infty} = +\infty, e^{-\infty} = 0, \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}, \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$)的极限往往需要分别考查左右极限.

例 6 [1992-I] 当 $x \rightarrow 1$ 时,函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.

(B) 等于 0.

(C) 为 ∞ .

(D) 不存在但不为 ∞ .

答 应选(D).

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = 0,$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

则 $x \rightarrow 1$ 时,函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限不存在,但不是 ∞ .