结构位移计算的几何法

郭仁俊　著

JIEGOU WEIYI JISUAN DE JIHEFA

SPM 南方出版传媒

广东科技出版社｜全国优秀出版社

结构位移计算的几何法

JIEGOU WEIYI JISUAN DE JIHEFA

郭仁俊 著

SPM 南方出版传媒
广东科技出版社｜全国优秀出版社
·广 州·

图书在版编目（CIP）数据

结构位移计算的几何法/郭仁俊著. —广州：广东科技出版社，2018.9
ISBN 978-7-5359-7015-2

Ⅰ.①结…　Ⅱ.①郭…　Ⅲ.①结构力学—计算方法—研究　Ⅳ.①O342-32

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第214987号

结构位移计算的几何法
Jiegou Weiyi Jisuan de Jihefa

责任编辑：罗孝政
封面设计：柳国雄
责任校对：李云柯
责任印制：彭海波
出版发行：广东科技出版社
（广州市环市东路水荫路11号　邮政编码：510075）
http：//www.gdstp.com.cn
E-mail：gdkjyxb@gdstp.com.cn（营销）
E-mail：gdkjzbb@gdstp.com.cn（编务室）
经　　销：广东新华发行集团股份有限公司
排　　版：创溢文化
印　　刷：广州一龙印刷有限公司
（广州市增城区荔新九路43号1栋自编101房　邮政编码：511340）
规　　格：787mm × 1 092mm　1/16　印张12　字数250千
版　　次：2018年9月第1版
2018年9月第1次印刷
定　　价：64.00元

内容简介

Introduction

位移计算是结构分析不可或缺的重要内容。工程中了解位移沿杆件的变化规律、厂房柱的侧移、桁架节点位移、框架梁柱的位移以及进行内力与变形分析等，常常需要计算多个截面位移或绘制位移图。用虚功法，很难实现；用结构矩阵分析方法，电脑计算又不透明。作者根据线性弹性体系、结构几何不变性、梁的变形、叠加原理等力学基本理论，探索出求结构位移的几何法，求位移简单、直观、方便，有效地解决了以上问题。

全书系统介绍了几何法对各类结构在不同外因作用下的位移计算。第1章介绍了相关知识和求位移的思路，第2~5章介绍各类静定结构的位移计算，第6章介绍超静定结构的内力、位移计算。为方便读者熟悉几何法和验算计算结果，附录Ⅰ介绍了虚功法，附录Ⅱ给出几何法公式索引和excel计算与绘图。

在编写方面，作者在理论分析、推导出计算方法的基础上，采用实例式讲解，对各类结构在不同外因作用下的位移，通过示例引导读者理解。这既验证了几何法的正确性、适用性，又便于加深对方法本身的表述，增加了可读性，相对于文字式说教，更方便读者学习掌握，可作为土建、水利和道桥等专业研究生、本（专）科生的选修课教材，也可作为力学和土木工程科技人员的参考用书。

作者简介

About the Author

郭仁俊，教授，1945年生，山西临汾人，长期在西安科技大学、广东工业大学等高校从事结构力学、弹性力学、地基及基础、混凝土结构、高层建筑结构、结构抗震等学科的教学和研究工作，出版教材和专著5本，发表学术论文近40篇，提出结构位移计算的“代数法”，建立了“结构位移计算的几何法”。

前　言

Foreword

工程中的结构在外因作用下将产生内力和位移。为了保证结构的强度，必须计算内力。为了保证结构的刚度，必须计算位移。此外，超静定结构未知力的计算、动力计算、稳定计算以及结构施工都需要计算位移。因此，位移计算是结构分析不可或缺的重要内容。

1764年法国著名数学家、物理学家J-L.拉格朗日建立虚功原理，一百年后英国科学家J. C. 麦克斯韦和德国科学家O. 莫尔分别提出基于虚功原理的单位荷载法，又称虚功法。自从19世纪结构力学成为一门独立的学科以来，虚功法就是学习位移计算、提高力学分析能力非常重要的方法。

随着计算机的推广和计算技术的提高，结构矩阵分析方法得到很快发展。它是以传统的结构分析方法作为理论基础，以矩阵作为数学表述形式，以计算机作为计算工具的三位一体的方法，能迅速计算结构的内力和位移，有效地解决了手算难以完成的问题，在结构设计中得到广泛应用。

然而，虚功法自身存在着不足：①一次只能求一个截面、一个方向的位移，还必须计算虚内力，计算烦琐。②掩盖了结构变形直观、形象的特点，抽象难学。③反映不出变形的变化规律及应力-位移关系，在结构设计和施工中应用受限。掌握结构矩阵分析方法需要有较高的力学、数学、计算机水平，计算过程又不透明，难以推广普及。

在工程中，常常需要了解位移沿杆件的变化规律、厂房柱的侧移情况、桁架各节点位移、框架梁柱的位移，也需要进行内力与变形分析等，这些都要求计算多点位移或绘制位移图。用虚功法，费时而又难以实现；而结构矩阵分析方法，计算不透明，应用不便。

力学工作者一直在积极探索位移计算的新方法。在国内教材和相关学术期刊中的一些方法，比如弯矩面积法、共轭梁法、弹性荷载法、桁架结点位移图解法、求挠度曲线的初参数法、比拟法、结构位移计算的曲率荷载法等等，要么只适用于结构的某种特定情况，要么计算并不简单。

作者根据线性弹性体系、结构几何不变性、梁的变形、叠加原理等力学基本理论，在教学研究中探索出求结构位移的几何法。理论分析和计算表明：几何法能完整、独立地计算各类结构的位移，形象直观、容易掌握，尤其在计算多点位移和绘制位移图上显示出很好的优越性。

几何法的创新性：

（1）通过理论分析，得出受弯杆件截面位移与曲率的内在规律，在此基础上推导出函数计算式，实现了位移连续计算和位移图的快速绘制，填补了手绘位移图的空白。

（2）在对二元体节点位移图解的基础上，归纳出求轴力杆件节点位移的三角函数式和简化算法。

（3）基于几何法的直接积分法和划分直段法，简化了圆弧形结构的位移计算，解决了非圆弧曲杆结构求位移积分难的问题。

（4）建立了求超静定结构的直接变形法，即：用几何法分别计算多余未知力和外因产生的位移，代入力法方程求出未知力。概念清晰，计算便捷。

（5）用手指演示受弯杆变形，能快速判断位移方向；将支点位移转换成轴向变形，使轴力杆计算简单明了。解决了计算中正负号出错的问题。

几何法的特点：

（1）简单。对受弯杆，只需求简单图形面积、面积矩；对轴力杆，只计算不变的三角函数式。

（2）方便。求受弯杆截面位移和轴力杆节点位移，无须计算虚内力，方便使用excel计算。

（3）直观。曲率、转角、侧移、节点位移等物理概念清晰，手指模拟变

形形象可见。

几何法的价值：

（1）开辟了位移计算的新途径，求位移多了一种选择。既可以单独进行位移计算，也可以与虚功法联合，做到优势互补、相互验算、简化计算。

（2）为相关学科，如结构力学、混凝土结构、钢结构、工程力学、桥梁工程等，提供了位移计算的依据和方法。

（3）容易在工程技术人员中推广，能激发学习兴趣，提高力学分析能力，对教学、科研、结构设计、工程施工等有实用意义。

在本书编写过程中，得到多位专家学者的关心和支持。作为特邀主审，广东工业大学汪新教授对本书的编写提出了许多中肯建议，并得到汪教授主持的广东省自然科学基金项目（项目编号：2015A030313498）和国家自然科学基金项目（项目编号：51378128）资助。太原理工大学路国运教授对书稿进行了审阅，提出不少宝贵意见。广州现代信息工程职业技术学院院长姚立宁教授、同济大学赵斌教授、暨南大学袁鸿教授等对作者几何法的研制和本书编写也给予了热情的支持和帮助。在此，对他们表示衷心的感谢。

期望通过本书改进和提高结构位移计算领域的教学、设计、工程施工的水平和能力。作为一种新方法，自然会有不足和缺陷。但是，几何法具有理论易懂、概念直观、计算简便的特点，相信随着使用中不断地改进和完善，会成为结构位移分析中广泛应用的方法。

由于水平有限，错误之处在所难免，敬请读者和专家提出宝贵意见，以利今后改进提高。联系方式：2276205845@qq.com。

作者

2018年3月

目　录

Contents

第1章

概　述

1.1 相关知识

几何法是依据力学基本理论，由杆端位移、杆件变形计算截面（节点）位移的方法。为了方便叙述，本节介绍与结构位移计算相关的基本知识。

1.1.1 线性弹性体系

建筑物中，凡是能够承担并传递荷载而起骨架作用的部分称为结构。组成结构的单个部分(如梁、柱、板、壳、块体等)叫作构件。

任何结构都是由可变形的固体材料组成的，变形固体在外力作用下会产生变形。当作用于结构的荷载全部撤除后，变形也随之消失，物体恢复到原来的形状，这种变形称为弹性变形。当作用于结构的荷载全部撤除后，变形不能完全消失而残留部分变形，这残留部分的变形称为塑性变形。结构只引起弹性变形，同时位移与荷载也呈线性关系时，称为线弹性变形体系或线性弹性体系。

线性弹性体系符合下列条件：

(1) 材料服从胡克定律，即应力与应变成正比变化。

(2) 体系是几何不变的，且所有约束都是理想约束。理想约束是指在体系发生位移过程中约束反力不做功的约束，如无摩擦的光滑铰、刚性链杆等。

(3) 位移是微小的，即小变形。在这一条件下，结构的反力、内力、位移与荷载一定是线性关系，计算内力、位移时，仍然应用结构变形前的原有尺寸，并可以应用叠加原理。

对于位移与荷载不满足线性弹性体系条件的结构，称之为非线性变形体系。

工程中大多数构件的变形只允许弹性变形，本书也只限于讨论线性弹性体系的位移计算。

1.1.2 结构的类型及几何不变性

工程中结构的形式是多种多样的，按其几何特征可分为3种：

1.杆件结构（又称杆系结构）

凡长度远大于其他两个尺度(截面的宽度和高度)的构件称为杆件。

垂直于杆件长度方向的截面，称为横截面。各横截面形心的连线，叫作杆件的轴线。当杆件的轴线为直线时称为直杆，为曲线时称为曲杆。

由若干根杆件组成的结构，当所有杆件的轴线都在同一平面，并且作用于结构的外力(荷载和约束反力)也位于此同一平面内，则这种结构为平面杆件结构，否则，为空间杆件结构。

2.薄壁结构

凡是厚度远小于其他两个尺度的构件，当其为一平面板状物体时，称为薄板；当其具有曲面外形时，称为薄壳。

薄壁结构是由薄板、薄壳，以及薄板与薄壳组成的结构。矩形水池、薄壳屋顶、筒仓等都是薄壁结构的工程实例。

3.实体结构

实体结构是由三个方向的尺度大约为同一量级的构件组成的结构，如挡土墙、块式基础等。

平面杆件结构是结构的一个重要形式，也是本书的研究对象，它的类型如下：

(1)梁。梁的轴线通常为直线，在外力作用下截面上有轴力、剪力、弯矩，将产生轴向变形、剪切变形和弯曲变形，称为受弯杆，又称梁式杆。工程中梁可以是单跨的或多跨的。

(2)刚架。刚架是由若干根杆件主要用刚结点联结而成的结构。在外力作用下刚架各杆截面上有弯矩、剪力、轴力和相应的变形，也是受弯杆件。

(3)桁架。桁架是由若干根直杆在两端用理想铰联结而成的结构。当桁架只受结点荷载作用时，各杆只产生轴力，杆件变形只有轴向变形，称为轴力杆，又称为拉压杆或二力杆。

(4)拱。拱是由轴线为曲线的杆件组成且在竖向荷载作用下支座处会产生水平反力(又称水平推力)的结构。拱的截面内力一般有弯矩、剪力和轴力。

(5)组合结构。组合结构是由轴力杆和受弯杆组合在一起的结构，轴力杆只承受轴力，受弯杆则承受弯矩、剪力和轴力。

按照几何组成和静力分析的不同，平面杆件结构又分为静定结构和超静定结构。

在几何组成上，静定结构是无多余约束的几何不变体系，而超静定结构是有多余约束的几何不变体系。

在静力分析上，静定结构的全部反力和内力，都可以由静力平衡条件求得唯一确定的值，而超静定结构的全部反力和内力除应用静力平衡条件外，还必须考虑几何变形条件才能求得。

无论是静定结构还是超静定结构，其整体及各部分之间都必须是不致发生相对运动的体系，只有这样，才能承受任意荷载并维持平衡。因此，若不考虑材料的微小变形，结构整体及其任何部分(任一节点、杆段或者局部)必须是几何形状与位置均能保持不变的体系，这就是结构的几何不变性质。

1.1.3 杆件的基本变形

杆件的变形可以用杆件的两个元素——横截面和轴线来描述。杆件在不同受力情况下，会产生不同的变形，但是基本的变形形式有如下4种。

1.轴向变形（轴向拉伸或压缩）

在大小相等、方向相反、作用线与杆件轴线重合的一对外力作用下，杆件将产生长度的改变(伸长或缩短)，这种变形称为轴向变形，如图1-1(a)、(b)所示。

2.剪切变形

在大小相等、方向相反、作用线垂直于杆件轴线且相距很近的一对外力(称为横向力)作用下，杆件的横截面将沿外力方向发生相对错动，这种变形称为剪切变形，如图1-1(c)所示。

3.扭转变形

在大小相等、转向相反、位于垂直于杆件轴线的两个平面内的一对力偶作用下，杆件任一横截面将产生绕轴线的相对转动，这种变形称为扭转变形，如图1-1(d)所示。

4.弯曲变形

杆件横截面的竖向对称轴与轴线组成的平面，称为纵向对称平面。在大小相等、方向相反、位于杆件纵向对称平面内的一对力偶作用下，杆件轴线将由直线变成曲线，这种变形称为弯曲变形，如图1-1(e)所示。

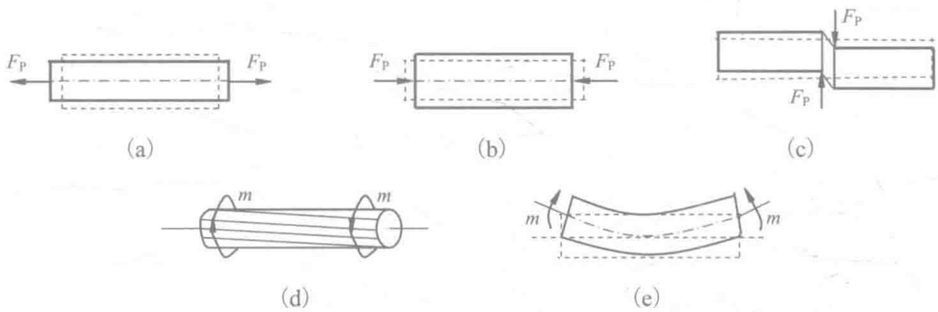

图1–1

工程中杆件的变形可能是多种多样、比较复杂的，但都可以由以上四种基本变形组合而成。

平面杆件结构的荷载与杆件轴线是在同一平面内的，按照作用范围的大小，荷载可分为集中力、集中力偶和沿杆件轴线作用的分布荷载。在荷载作用下，杆件横截面将产生轴力F_N、剪力F_Q和弯矩M。图1-2(a)所示为杆件的某一微段ds及其截面上的内力。对于线性弹性体系，内力与变形一一对应，应力-应变关系服从胡克定律，微段在各单一内力作用下将产生轴向变形du、剪切变形γds和弯曲变形$d\varphi$，如图1-2(b)、(c)、(d)所示。

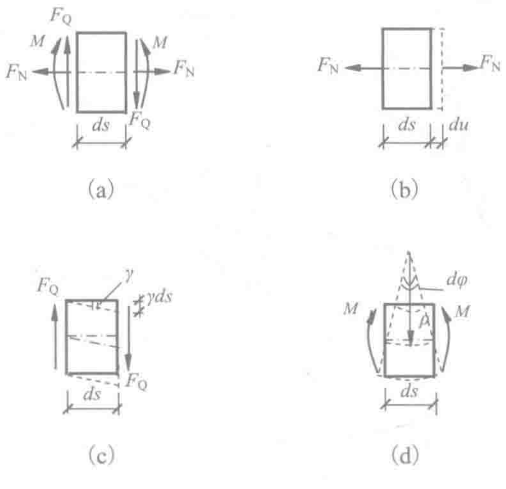

图1–2

由材料力学可知，微段各基本变形为：

$$du=\varepsilon ds=\frac{F_N}{EA}ds \tag{1-1}$$

$$\gamma ds=\mu\frac{F_Q}{GA}ds \tag{1-2}$$

$$d\varphi = \frac{1}{\rho}ds = \frac{M}{EI}ds \tag{1-3}$$

以上各式中，EA、GA、EI分别为杆件的抗拉、抗剪、抗弯刚度；ε、γ、$\frac{1}{\rho}$为杆件轴向线应变、截面切应变、弯曲变形曲率。μ为切应力沿截面分布不均匀系数，与截面形状有关。工程中常用杆件截面的μ值为：矩形μ=1.2，圆形μ=10/9，薄壁圆环μ=2，工字形$\mu=A/A_1$（A_1为腹板截面面积）。

当微段截面同时产生轴力、剪力、弯矩时，其变形将是上述3种基本变形的组合。在垂直于杆件轴线的外力偶作用下杆件产生扭转变形时，外力偶与杆轴不在同一平面内，不属于平面受力状态，本书不作讨论。

1.1.4 梁的变形

梁上所有外力(包括荷载和支座反力)如果都作用在纵向对称平面内，则变形后的轴线将弯曲成位于纵向对称平面内的一条曲线，这种弯曲变形称为平面弯曲。弯曲后的轴线叫弹性曲线，又称挠度曲线或挠曲线。

现以图1-3(a)所示悬臂梁为例，说明仅受弯矩作用时挠曲线近似微分方程的推导。

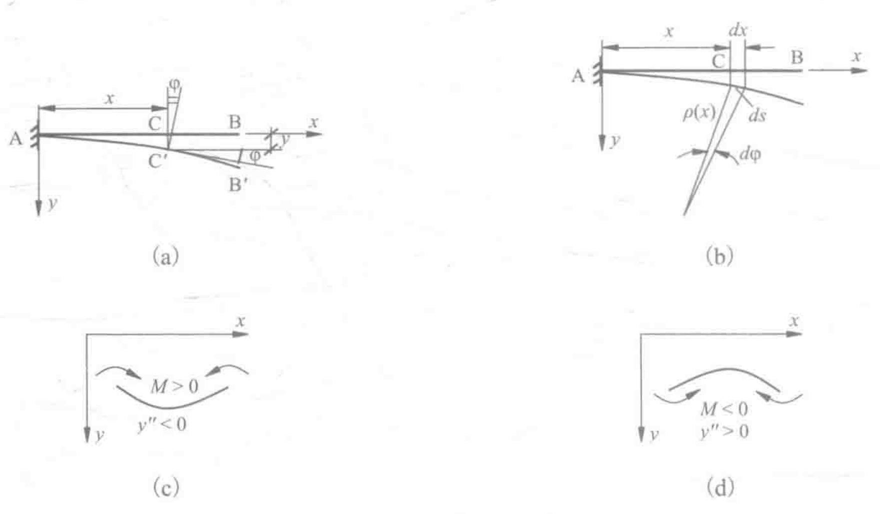

图1-3

首先建立坐标系，以梁轴线为x轴，向右为正，垂直向下为y轴正向。由图1-3(a)可知，挠曲线y随截面位置而变化，是坐标x的函数，即：

$$y = f(x) \tag{1-4}$$

式(1-4)称为梁的挠曲线方程，反映挠曲线沿梁长度的变化规律。

根据平面截面假设，梁变形后横截面仍保持平面且垂直于弹性曲线。在小变形条件下，任一横截面C的变形有：

(1) 形心C点移至C′。由于CC′沿x方向的分量属于二阶无穷小量，可以忽略不计，因此可认为CC′只是沿y方向的位移，称为梁在C截面处的挠度，用y表示，以向下为正，反之为负。

(2) 弯曲变形时横截面C将绕自身中性轴(横截面与中性层的交线)转动一个角度，即C截面的转角，用φ表示，以顺时针转为正，逆时针转为负。

因为变形前后横截面都垂直于梁的轴线，所以挠曲线在C′点的切线与x轴夹角即为C截面转角[图1-3(a)]，由微分关系有：

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\varphi \tag{1-5}$$

工程中转角φ极小，不超过1°，可近似取$\tan\varphi=\varphi$，式(1-5)可写为：

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = y' \tag{1-6}$$

式(1-6)表示梁在同一截面上挠度和转角之间的微分关系。

由上可知，挠曲线方程表示梁轴线上各点的挠度，其一阶导数便是梁各截面的转角。只要确定了挠曲线方程，便可求出任一截面的挠度和转角。

对图1-3(a)所示悬臂梁，在距原点为x处取微段dx，变形后成曲线ds，设ds的曲率半径为$\rho(x)$，两端截面夹角为$d\varphi$，由图1-3(b)知：

$$ds = \rho(x)\ d\varphi \tag{a}$$

由于梁是微小变形，dx与ds之间可近似写为：

$$ds = dx \tag{b}$$

式(b)代入式(a)得：

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{d\varphi}{dx} \tag{1-7}$$

式(1-7)给出了挠曲线的曲率和截面转角之间的微分关系。

将式(1-6)代入式(1-7)得：

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' \tag{1-8}$$