河南省“十二五”普通高等教育规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

梁保松　王建平　陈　振◎主编

中国农业出版社

河南省“十二五”普通高等教育规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

梁保松 王建平 陈振 主编

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／梁保松，王建平，陈振主编．—北京：中国农业出版社，2015.7

河南省“十二五”普通高等教育规划教材　全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-20486-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①梁…　②王…　③陈…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 105684 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）

（邮政编码 100125）

策划编辑　朱　雷　魏明龙

文字编辑　魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2015 年 8 月第 1 版　　2015 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：787mm×1092mm　1/16　　印张：19.25

字数：452 千字

定价：36.00 元

编写人员名单

主　编　梁保松　王建平　陈　振

副主编　李战国　孙成金　王亚伟

参　编　（按姓名笔画排序）

王　瑞　白洪远　苏克勤

杨　磊　汪松玉　张晓梅

周　兵　侯贤敏　温　建

前　　言

数学是科学的基本语言，是研究和探索物质世界的重要手段。对于现代化的工农业技术和现代化工程而言，数学则是表达技术原理、进行复杂的工程设计和计算必不可少的工具。特别是随着计算机技术的快速发展，数学的社会化程度日益提高，现代化产业和经济的组织与管理，已完全离不开数学所提供的方法和技术。因此，高等数学在大学教育中占有举足轻重的地位。

数学给予人们的不仅是知识，最重要的是能力。这种能力包括直观思维、逻辑思维、精确计算和准确判断。所以，高等数学在素质教育、创新教育中的作用是其他课程无法企及的。

高等数学博大精深，要使学生在有限的时间内深刻地掌握其思想和方法，首先需要有好的教材。对于高等院校来说，要培养学生应用于工程技术、农林工程、生物技术、经济预测等领域的数学思想和方法，在教材内容和体系的安排上就必须体现理论联系实际的特色。

本书按照“高等教育高等数学教学大纲”的基本要求，结合作者多年来教学研究和科学研究等方面的成果编写而成。注意渗透现代数学思想，注重体现素质教育和创新能力的培养，以适应现代化农林科学、工程技术、管理技术对人才数学素质的要求。本书在具体内容的安排上具有以下特点：

1. 保持体系完整

全书结构严谨，内容由浅入深，循序渐进，通俗易学，努力突出高等数学的基本思想和基本方法。一方面使学生能够较好地了解各部分的内在联系，从总体上把握高等数学的思想方法；另一方面，培养学生严密的逻辑思维能力。

2. 追求简明实用

删去了一些繁琐的理论证明，直接地从客观世界所提供的模型和原理中导出高等数学的基本概念、法则和公式，使表达更加简明；引导学生理解概念的内涵和背景，培养学生用高等数学的思想和方法分析、解决实际问题的能力，突出了数学的应用性。

3. 体现应用特色

较多地设置了生物科学、生命科学、经济管理等方面的实例，突出了高等数学在实际中的应用，促进了高等数学与专业课程的结合，为学生学习专业课程提供了“接口”。

参加本书编写的有：梁保松、王建平、陈振、李战国、孙成金、王亚伟、王瑞、白洪远、苏克勤、杨磊、汪松玉、张晓梅、周兵、侯贤敏、温建，最后由梁保松统一定稿。

错漏之处，敬请得到专家、同行和读者的批评指正。

编　者

2014 年 8 月 8 日

目　录

第一章 函数的极限与连续

高等数学是以函数为主要研究对象，以极限方法为基本研究方法的学科．极限理论几乎贯穿了高等数学的整个内容，因此，我们首先介绍函数和极限的概念、性质、运算法则以及函数的连续性．

第一节 函数的基本概念

人们在观察自然现象或社会现象的过程中，经常会遇到一些“量”，在观察过程中保持固定数值的量，称为常量，一般用字母 a，b，c，…表示；在观察过程中变化的量，称为变量，一般用字母 x，y，z，…表示．

常量可以看成是变量的特例．常量在数轴上表示为一个定点，变量在数轴上则表示为一个动点．

在研究实际问题时，经常遇到的不是一个变量，而是多个变量，而且这些变量不是孤立地存在，而是相互关联的，各变量在变化过程中存在某种确定的关系．

例 1 图 1-1 是某地某日的气温变化曲线．该曲线描述了该地区一日内气温 T 随时间 t 变化的过程．由图可知，对任何时刻 $t_0\in[0, 24]$，图中曲线上有唯一的点 A_0 与之对应，从而唯一确定 t_0 时的气温 T_0．曲线上的点确定了气温 T 与时间 t 之间的一种对应关系．

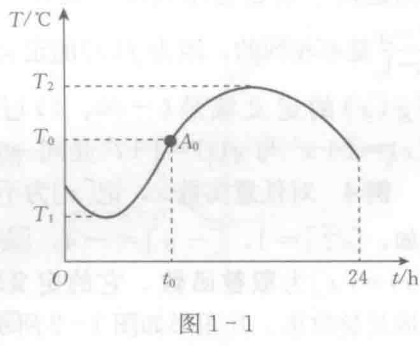

图 1-1

例 2 根据国家统计局公布的数据，中国 2007—2012 年的国内生产总值(GDP)见表 1-1.

表 1-1 中国 2007—2012 年的国内生产总值

t(年份)	2007	2008	2009	2010	2011	2012
GDP(万亿元)	24.66	30.07	33.54	39.80	47.16	51.93

由表 1-1 可以看出：随着年份 t 的增加，中国 GDP 在不断地增长，对任何年份 $t\in\{2007, 2008, \cdots, 2012\}$，由表所示的对应法则可唯一确定该年份的 GDP.

例 3 设某商店购进猪肉 400 kg，进货价为每千克 16 元，销售价为每千克 19 元，当售出的数量为 x 时，其销售利润 L 可按公式

$$L=19x-16x=3x,\ x\in[0, 400]$$

算出唯一确定的数值．

以上 3 个例题的实际意义虽然不同，但它们都是通过一定的“对应法则”(图、表、公式)来反映两个变量之间的相互关系的，这就是中学数学中学习过的函数关系．

函数的严格数学定义如下：

一、函数定义

定义 1 **设 D 是一非空实数集合，x 和 y 是两个变量，如果存在一个法则 f，使得对于任一 $x\in D$，都能由法则 f 唯一地确定一个实数 y，则称法则 f 是定义在实数集合 D 上的一个函数，或称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.** 数集 D 叫作这个函数的**定义域**，f 叫作**对应法则**，x 叫作**自变量**，y 叫作**因变量**．

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集：

$$W=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的**值域**．

由函数的定义可知，一个函数由对应法则 f 及定义域 D 完全确定，选用什么字母表示函数不是本质的．也就是说，**两个函数相同的充分必要条件是其定义域与对应法则完全相同**．例如，$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 这两个函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，而且对应法则也相同，因而这两个函数是相同的．函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ 是不相同的，因为 $f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$．显然，$f(x)=1+x^2$ 与 $g(t)=1+t^2$ 是同一个函数．

例 4 对任意实数 x，记$[x]$为不超过 x 的最大整数．例如，$[\sqrt{2}]=1$，$[-\pi]=-4$，$[\pi]=3$，$[0]=0$，称 $f(x)=[x]$ 为**取整函数**．它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域是整数集．其图形如图 1-2 所示．

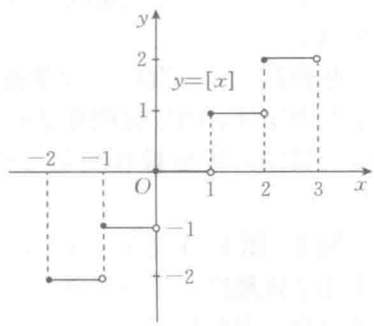

图 1-2

二、分段函数

例 5 2011 年 6 月 30 日全国人大决定个人所得税起征点为 3500 元，发布的税法修正案草案规定(见表 1-2，表中仅保留原表中前四级的税率)：

表 1-2

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 1500 元	3
2	超过 1500 元至 4500 元	10
3	超过 4500 元至 9000 元	20
4	超过 9000 元至 35000 元	25

其中应纳税所得额为月工资减 3500 元．按照表中的对应规则，工资与个人所得税之间具有

函数关系．试给出月工资与所得税金额之间的函数关系．若某人的工资为 10000 元，试计算其应缴纳的个人所得税额．

解　设某人的月工资为 x 元，应交纳个人所得税金额为 y 元，依题意得

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 3500,\\ (x-3500)\times 3\%, & 3500<x\leqslant 5000,\\ 1500\times 3\%+(x-5000)\times 10\%, & 5000<x\leqslant 8000,\\ 1500\times 3\%+3000\times 10\%+(x-8000)\times 20\%, & 8000<x\leqslant 12500,\\ 1500\times 3\%+3000\times 10\%+4500\times 20\%+(x-12500)\times 25\%, & 12500<x\leqslant 38500\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 3500,\\ 0.03(x-3500), & 3500<x\leqslant 5000,\\ 45+0.1(x-5000), & 5000<x\leqslant 8000,\\ 345+0.2(x-8000), & 8000<x\leqslant 12500,\\ 1245+0.25(x-12500), & 12500<x\leqslant 38500.\end{cases}$$

某人的工资为 10000 元，则相应的个人所得税计算公式为

$$y=345+0.2(x-8000),$$

从而有
$$y=345+0.2(10000-8000)=745,$$
即此人每月应缴纳 745 元个人所得税．

例 6　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-1+x^2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x^2, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $W=(-1,\ +\infty)$，其图形如图 1－3 所示．

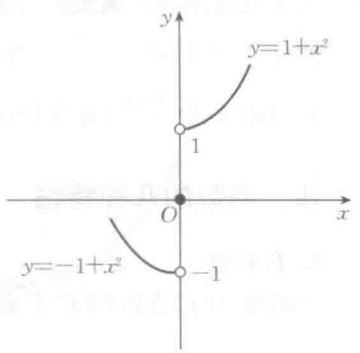

图 1－3

在例 5 和例 6 中看到，有时一个函数要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，称为**分段函数**．例 5 和例 6 都是分段函数.

例 7　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=[0,\ +\infty)$. 分段函数的对应法则是由自变量所在的范围所确定的，在求分段函数的函数值时，应根据自变量所在的范围，选择相应的对应法则．例如，$\frac{1}{2}\in[0,\ 1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$4\in(1,\ +\infty)$，所以 $f(4)=1+4=5$.

三、复合函数

定义 2　**设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 W. 若 $W\cap D$ 非空，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，称 u 为中间变量.**

由定义可知，复合函数是说明函数对应法则的某种表达方式的一个概念．利用这一概

念，一方面可以产生新的函数；另一方面，也可以把函数分解成几个函数．

例 8 设 $y=f(u)=u^2$，$u=\varphi(x)=1-x^2$，则由它们复合而成的函数为

$$y=f[\varphi(x)]=(1-x^2)^2 \quad (-\infty<x<+\infty).$$

例 9 设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=1-x^2$，则复合而成的函数为

$$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2} \quad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

虽然函数 $u=\varphi(x)=1-x^2$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，但为了使复合后的函数有意义，必须使 $u\geqslant 0$，故限制 x 的范围为$[-1, 1]$.

例 10 设函数 $y=f(u)=\arcsin u$，$u=\varphi(x)=3+x^2$，则由于 x 无论取何值均有 $u\geqslant 3$，故 $u=\varphi(x)$的值域 $W=[3, +\infty)$，而 $y=f(u)$的定义域 $E=[-1, 1]$，$W\cap E=\varnothing$，故$y=f[\varphi(x)]$无定义．

例 10 表明：**并非任何两个函数都能够复合成一个复合函数**．

例 11 设 $y=\ln u$，$u=v^2$，$v=\sin x+3x$，试将 y 用 x 表示．

解 将 $u=v^2$ 和 $v=\sin x+3x$ 代入 $y=\ln u$，可得

$$y=\ln u=\ln v^2=\ln(\sin x+3x)^2=2\ln|\sin x+3x|.$$

例 11 表明：复合函数可以由更多个函数复合而成，本例中 u 和 v 都是中间变量．

关于复合函数，**重要的是把一个复合函数分解成若干个简单函数**．

例如，$y=\ln\sin\sqrt{x^2+1}$可以分解为 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=x^2+1$；

$y=\tan^3(\sqrt{x^2/2^x})$可以分解为 $y=u^3$，$u=\tan v$，$v=\sqrt{t}$，$t=\dfrac{x^2}{2^x}$.

四、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$在区间 D 上有定义，若存在 $M>0$，使得对于任意 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$在区间 D 上**有界**；若不存在这样的 M，则称 $f(x)$在区间 D 上**无界**．

注意：(1) 函数 $f(x)$有界还是无界是相对于某个区间而言的．例如，$y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0, +\infty)$上是无界的，但在区间$[a, +\infty)(a>0)$上是有界的．

(2) 常见的有界函数：

$$|\sin x|\leqslant 1, |\cos x|\leqslant 1, \ x\in(-\infty, +\infty),$$

$$|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}, |\arccos x|\leqslant\pi, \ x\in[-1, 1],$$

$$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}, |\operatorname{arccot} x|<\pi, \ x\in(-\infty, +\infty).$$

2. 单调性

设函数 $f(x)$在区间 D 上有定义，若对于任意 x_1，$x_2\in D$，不妨设 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$在区间 D 上是**单调增加**(图 1-4)(**单调减少**(图 1-5))的．