



河南省“十二五”普通高等教育规划教材



全国高等农林院校“十二五”规划教材


高等数学

GAODENGSHUXUE

梁保松 王建平 陈振◎主编

 中国农业出版社

河南省“十二五”普通高等教育规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材



高等数学

梁保松 王建平 陈振 主编

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 / 梁保松, 王建平, 陈振主编. —北京:
中国农业出版社, 2015.7

河南省“十二五”普通高等教育规划教材 全国高等
农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-20486-7

I. ①高… II. ①梁… ②王… ③陈… III. ①高等数
学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 105684 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区麦子店街 18 号楼)

(邮政编码 100125)

策划编辑 朱 雷 魏明龙

文字编辑 魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月北京第 1 次印刷

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 19.25

字数: 452 千字

定价: 36.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

编写人员名单

主 编 梁保松 王建平 陈 振

副主编 李战国 孙成金 王亚伟

参 编 (按姓名笔画排序)

王 瑞 白洪远 苏克勤

杨 磊 汪松玉 张晓梅

周 兵 侯贤敏 温 建

前 言

数学是科学的基本语言，是研究和探索物质世界的重要手段。对于现代化的工农业技术和现代化工程而言，数学则是表达技术原理、进行复杂的设计和计算必不可少的工具。特别是随着计算机技术的快速发展，数学的社会化程度日益提高，现代化产业和经济的组织与管理，已完全离不开数学所提供的方法和技术。因此，高等数学在大学教育中占有举足轻重的地位。

数学给予人们的不仅是知识，最重要的是能力。这种能力包括直观思维、逻辑思维、精确计算和准确判断。所以，高等数学在素质教育、创新教育中的作用是其他课程无法企及的。

高等数学博大精深，要使学生在有限的时间内深刻地掌握其思想和方法，首先需要有好教材。对于高等院校来说，要培养学生应用于工程技术、农林工程、生物技术、经济预测等领域的数学思想和方法，在教材内容和体系的安排上就必须体现理论联系实际的特色。

本书按照“高等教育高等数学教学大纲”的基本要求，结合作者多年来教学研究和科学研究等方面的成果编写而成。注意渗透现代数学思想，注重体现素质教育和创新能力的培养，以适应现代化农林科学、工程技术、管理技术对人才数学素质的要求。本书在具体内容的安排上具有以下特点：

1. 保持体系完整

全书结构严谨，内容由浅入深，循序渐进，通俗易学，努力突出高等数学的基本思想和基本方法。一方面使学生能够较好地了解各部分的内在联系，从总体上把握高等数学的思想方法；另一方面，培养学生严密的逻辑思维能力。

2. 追求简明实用

删去了一些繁琐的理论证明，直接地从客观世界所提供的模型和原理中导出高等数学的基本概念、法则和公式，使表达更加简明；引导学生理解概念的的内涵和背景，培养学生用高等数学的思想和方法分析、解决实际问题的能力，突出了数学的应用性。

3. 体现应用特色

较多地设置了生物科学、生命科学、经济管理等方面的实例，突出了高等数学在实际中的应用，促进了高等数学与专业课程的结合，为学生学习专业课程提供了“接口”。

参加本书编写的有：梁保松、王建平、陈振、李战国、孙成金、王亚伟、王瑞、白洪远、苏克勤、杨磊、汪松玉、张晓梅、周兵、侯贤敏、温建，最后由梁保松统一定稿。

错漏之处，敬请得到专家、同行和读者的批评指正。

编者

2014年8月8日

目 录

前言

第一章 函数的极限与连续	1
第一节 函数的基本概念	1
一、函数定义	2
二、分段函数	2
三、复合函数	3
四、函数的几种特性	4
五、初等函数	6
习题 1-1	7
第二节 数列的极限	8
一、数列的概念	8
二、数列极限的定义	9
三、数列极限的性质	10
习题 1-2	12
第三节 函数的极限	12
一、自变量 x 趋向于无穷大时函数的极限	13
二、自变量 x 趋向于有限值时函数的极限	14
三、函数极限的性质	17
习题 1-3	18
第四节 无穷小量与无穷大量	19
一、无穷小量	19
二、无穷大量	20
习题 1-4	22
第五节 函数极限的运算法则	22
习题 1-5	26
第六节 两个重要极限	27
一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	27
二、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	29
习题 1-6	30
第七节 无穷小量的比较	31
习题 1-7	33

第八节 函数的连续性	34
一、函数连续的概念	34
二、函数的间断点及其分类	36
习题 1-8	37
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	38
一、连续函数的运算	38
二、初等函数的连续性	39
三、利用函数的连续性求极限	39
四、闭区间上连续函数的性质	41
习题 1-9	42
自测题一	42
第二章 导数与微分	45
第一节 导数的概念	45
一、问题的提出	45
二、导数的定义	46
三、导数的几何意义	49
四、可导与连续的关系	50
习题 2-1	51
第二节 导数的运算法则	52
一、和、差、积、商的求导法则	52
二、反函数的求导法则	55
三、复合函数的求导法则	56
习题 2-2	59
第三节 高阶导数	60
习题 2-3	62
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	63
一、隐函数的导数	63
二、由参数方程所确定的函数的导数	65
习题 2-4	67
第五节 函数的微分	68
一、微分的概念	68
二、微分的几何意义	70
三、微分基本公式和微分运算法则	70
四、微分的简单应用	72
习题 2-5	74
第六节 导数在经济学中的简单应用	74
一、边际分析	75
二、弹性分析	77
习题 2-6	80
自测题二	80

第三章 微分中值定理与导数的应用	84
第一节 微分中值定理	84
一、罗尔定理	84
二、拉格朗日中值定理	85
* 三、柯西中值定理	87
习题 3-1	88
第二节 洛必达法则	88
一、“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式	89
二、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式	90
三、其他类型的未定式	91
习题 3-2	94
第三节 泰勒公式	94
习题 3-3	97
第四节 函数的单调性与极值	97
一、函数单调性的判定法	97
二、函数的极值	99
习题 3-4	102
第五节 曲线的凹凸、拐点及渐近线	103
一、曲线的凹凸与拐点	103
二、曲线的渐近线	105
* 三、函数图形的描绘	107
习题 3-5	108
第六节 函数的最大(最小)值问题	108
一、函数在区间上的最大(最小)值	108
二、应用举例	110
习题 3-6	111
自测题三	112
第四章 不定积分	115
第一节 原函数与不定积分	115
一、原函数	115
二、不定积分	116
三、不定积分的几何意义	117
四、不定积分基本积分公式和性质	117
习题 4-1	119
第二节 换元积分法	119
一、第一换元积分法(凑微分法)	119
二、第二换元积分法	123

习题 4-2	127
第三节 分部积分法	128
习题 4-3	131
第四节 几种特殊类型函数的积分	132
一、有理函数的不定积分	132
二、三角函数有理式的积分	137
三、简单无理函数的积分	138
习题 4-4	140
第五节 不定积分的应用	141
一、不定积分在农业经济中的应用	141
二、不定积分在生物科学中的应用	142
习题 4-5	144
自测题四	145
第五章 定积分	147
第一节 定积分的概念与性质	147
一、引例	147
二、定积分的定义	148
三、定积分的几何意义	149
四、定积分的性质	150
习题 5-1	153
第二节 微积分基本公式	153
一、积分上限的函数	154
二、牛顿—莱布尼茨公式	155
习题 5-2	157
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法	158
一、换元积分法	158
二、分部积分法	159
习题 5-3	161
第四节 广义积分与 Gamma 函数	162
一、无穷区间的广义积分	162
二、无界函数的广义积分	163
三、Gamma 函数	164
习题 5-4	165
第五节 定积分的应用	165
一、微元法	165
二、平面图形的面积	166
三、体积	168
四、平面曲线的弧长	169
五、变力沿直线所做的功	170
六、经济应用问题举例	170

习题 5-5	171
自测题五	172
第六章 多元函数微分学	175
第一节 空间解析几何简介	175
一、空间直角坐标系	175
二、空间两点间的距离	176
三、空间曲面	176
四、空间曲线	177
五、常见的曲面	178
六、空间曲线在坐标面上的投影	181
习题 6-1	181
第二节 多元函数的极限与连续	182
一、多元函数的概念	182
二、二元函数的极限	184
三、二元函数的连续性	184
习题 6-2	185
第三节 偏导数	186
一、偏导数的概念	186
二、二元函数偏导数的几何意义	187
三、高阶偏导数	188
习题 6-3	188
第四节 全微分	189
一、全微分的概念	189
二、全微分在近似计算中的应用	191
习题 6-4	191
第五节 复合函数与隐函数的微分法	192
一、多元复合函数的求导法则	192
二、隐函数的求导法则	193
习题 6-5	194
第六节 多元函数的极值	195
一、极值的概念	195
二、最大值与最小值	196
三、条件极值	197
习题 6-6	198
自测题六	199
第七章 二重积分	202
第一节 二重积分的概念与性质	202
一、二重积分的概念	202
二、二重积分的几何意义	203

三、二重积分的基本性质	203
习题 7-1	204
第二节 直角坐标系下二重积分的计算	205
习题 7-2	207
第三节 二重积分的换元法	208
习题 7-3	212
第四节 二重积分的应用	213
一、平面图形的面积	213
二、体积	213
三、曲面的面积	214
习题 7-4	214
自测题七	215
第八章 无穷级数	219
第一节 数项级数	219
一、无穷级数的概念	219
二、级数的敛散性	219
三、收敛级数的基本性质	221
习题 8-1	222
第二节 数项级数的敛散性判别法	223
一、正项级数及其敛散性判别法	223
二、交错级数及其敛散性判别法	227
习题 8-2	229
第三节 幂级数	230
一、幂级数及其敛散性	230
二、幂级数的运算	233
习题 8-3	235
第四节 泰勒级数	235
一、泰勒级数	235
二、函数的泰勒展开式	236
习题 8-4	239
自测题八	239
第九章 微分方程	242
第一节 微分方程的基本概念	242
习题 9-1	244
第二节 一阶微分方程	245
一、可分离变量的微分方程	245
二、齐次方程	248
三、一阶线性微分方程	250

习题 9-2	254
第三节 可降阶的高阶微分方程	255
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	255
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	256
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	257
习题 9-3	258
第四节 二阶常系数线性微分方程	258
一、二阶常系数齐次线性微分方程	258
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	260
习题 9-4	264
自测题九	265
参考答案	267
参考文献	290

第一章 函数的极限与连续

高等数学是以函数为主要研究对象，以极限方法为基本研究方法的学科。极限理论几乎贯穿了高等数学的整个内容，因此，我们首先介绍函数和极限的概念、性质、运算法则以及函数的连续性。

第一节 函数的基本概念

人们在观察自然现象或社会现象的过程中，经常会遇到一些“量”，在观察过程中保持固定数值的量，称为常量，一般用字母 a, b, c, \dots 表示；在观察过程中变化的量，称为变量，一般用字母 x, y, z, \dots 表示。

常量可以看成是变量的特例。常量在数轴上表示为一个定点，变量在数轴上则表示为一个动点。

在研究实际问题时，经常遇到的不是一个变量，而是多个变量，而且这些变量不是孤立地存在，而是相互关联的，各变量在变化过程中存在某种确定的关系。

例 1 图 1-1 是某地某日的气温变化曲线。该曲线描述了该地区一日内气温 T 随时间 t 变化的过程。由图可知，对任何时刻 $t_0 \in [0, 24]$ ，图中曲线上有唯一的点 A_0 与之对应，从而唯一确定 t_0 时的气温 T_0 。曲线上的点确定了气温 T 与时间 t 之间的一种对应关系。

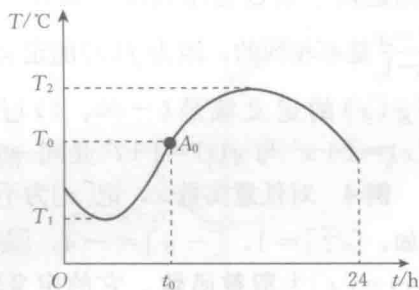


图 1-1

例 2 根据国家统计局公布的数据，中国 2007—2012 年的国内生产总值(GDP)见表 1-1。

表 1-1 中国 2007—2012 年的国内生产总值

t (年份)	2007	2008	2009	2010	2011	2012
GDP(万亿元)	24.66	30.07	33.54	39.80	47.16	51.93

由表 1-1 可以看出：随着年份 t 的增加，中国 GDP 在不断地增长，对任何年份 $t \in \{2007, 2008, \dots, 2012\}$ ，由表所示的对应法则可唯一确定该年份的 GDP。

例 3 设某商店购进猪肉 400 kg，进货价为每千克 16 元，销售价为每千克 19 元，当售出的数量为 x 时，其销售利润 L 可按公式

$$L = 19x - 16x = 3x, \quad x \in [0, 400]$$

算出唯一确定的数值。

以上 3 个例题的实际意义虽然不同,但它们都是通过一定的“对应法则”(图、表、公式)来反映两个变量之间的相互关系的,这就是中学数学中学习过的函数关系.

函数的严格数学定义如下:

一、函数定义

定义 1 设 D 是一非空实数集合, x 和 y 是两个变量, 如果存在一个法则 f , 使得对于任一 $x \in D$, 都能由法则 f 唯一地确定一个实数 y , 则称法则 f 是定义在实数集合 D 上的一个函数, 或称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫作这个函数的定义域, f 叫作对应法则, x 叫作自变量, y 叫作因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时, 对应的函数值的全体组成的数集:

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

由函数的定义可知, 一个函数由对应法则 f 及定义域 D 完全确定, 选用什么字母表示函数不是本质的. 也就是说, 两个函数相同的充分必要条件是其定义域与对应法则完全相同. 例如, $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ 与 $g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$ 这两个函数的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 而且对应法则也相同, 因而这两个函数是相同的. 函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ 是不相同的, 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. 显然, $f(x) = 1 + x^2$ 与 $g(t) = 1 + t^2$ 是同一个函数.

例 4 对任意实数 x , 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 例如, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-\pi] = -4$, $[\pi] = 3$, $[0] = 0$, 称 $f(x) = [x]$ 为取整函数. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域是整数集. 其图形如图 1-2 所示.

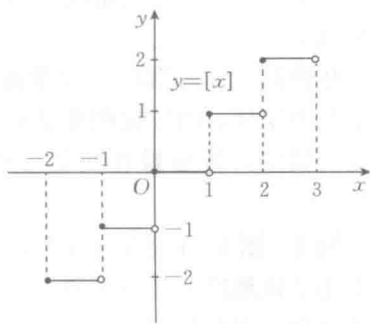


图 1-2

二、分段函数

例 5 2011 年 6 月 30 日全国人大决定个人所得税起征点为 3500 元, 发布的税法修正案草案规定(见表 1-2, 表中仅保留原表中前四级的税率):

表 1-2

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 1500 元	3
2	超过 1500 元至 4500 元	10
3	超过 4500 元至 9000 元	20
4	超过 9000 元至 35000 元	25

其中应纳税所得额为月工资减 3500 元. 按照表中的对应规则, 工资与个人所得税之间具有

函数关系. 试给出月工资与所得税金额之间的函数关系. 若某人的工资为 10000 元, 试计算其应缴纳的个人所得税额.

解 设某人的月工资为 x 元, 应交纳个人所得税金额为 y 元, 依题意得

$$y=f(x)=\begin{cases} 0, & 0\leq x\leq 3500, \\ (x-3500)\times 3\%, & 3500<x\leq 5000, \\ 1500\times 3\%+(x-5000)\times 10\%, & 5000<x\leq 8000, \\ 1500\times 3\%+3000\times 10\%+(x-8000)\times 20\%, & 8000<x\leq 12500, \\ 1500\times 3\%+3000\times 10\%+4500\times 20\%+(x-12500)\times 25\%, & 12500<x\leq 38500 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0\leq x\leq 3500, \\ 0.03(x-3500), & 3500<x\leq 5000, \\ 45+0.1(x-5000), & 5000<x\leq 8000, \\ 345+0.2(x-8000), & 8000<x\leq 12500, \\ 1245+0.25(x-12500), & 12500<x\leq 38500. \end{cases}$$

某人的工资为 10000 元, 则相应的个人所得税计算公式为

$$y=345+0.2(x-8000),$$

从而有 $y=345+0.2(10000-8000)=745$,

即此人每月应缴纳 745 元个人所得税.

例 6 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} -1+x^2, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1+x^2, & x>0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $W=(-1, +\infty)$, 其图形如图 1-3 所示.

在例 5 和例 6 中看到, 有时一个函数要用几个式子表示, 这种在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同式子来表示的函数, 称为分段函数. 例 5 和例 6 都是分段函数.

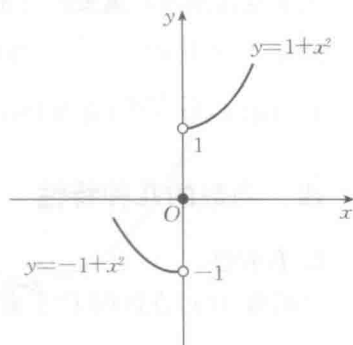


图 1-3

例 7 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 1, \\ 1+x, & x>1 \end{cases}$$

是一个分段函数, 它的定义域 $D=[0, +\infty)$. 分段函数的对应法则是由自变量所在的范围所确定的, 在求分段函数的函数值时, 应根据自变量所在的范围, 选择相应的对应法则. 例

如, $\frac{1}{2}\in[0, 1]$, 所以 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$; $4\in(1, +\infty)$, 所以 $f(4)=1+4=5$.

三、复合函数

定义 2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D , 函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 W . 若 $W\cap D$ 非空, 则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 称 u 为中间变量.

由定义可知, 复合函数是说明函数对应法则的某种表达方式的一个概念. 利用这一概

念,一方面可以产生新的函数;另一方面,也可以把函数分解成几个函数.

例 8 设 $y=f(u)=u^2$, $u=\varphi(x)=1-x^2$, 则由它们复合而成的函数为

$$y=f[\varphi(x)]=(1-x^2)^2 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

例 9 设 $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=\varphi(x)=1-x^2$, 则复合而成的函数为

$$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

虽然函数 $u=\varphi(x)=1-x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 但为了使复合后的函数有意义, 必须使 $u \geq 0$, 故限制 x 的范围为 $[-1, 1]$.

例 10 设函数 $y=f(u)=\arcsin u$, $u=\varphi(x)=3+x^2$, 则由于 x 无论取何值均有 $u \geq 3$, 故 $u=\varphi(x)$ 的值域 $W=[3, +\infty)$, 而 $y=f(u)$ 的定义域 $E=[-1, 1]$, $W \cap E = \emptyset$, 故 $y=f[\varphi(x)]$ 无定义.

例 10 表明: 并非任何两个函数都能够复合成一个复合函数.

例 11 设 $y=\ln u$, $u=v^2$, $v=\sin x+3x$, 试将 y 用 x 表示.

解 将 $u=v^2$ 和 $v=\sin x+3x$ 代入 $y=\ln u$, 可得

$$y=\ln u=\ln v^2=\ln(\sin x+3x)^2=2\ln|\sin x+3x|.$$

例 11 表明: 复合函数可以由更多个函数复合而成, 本例中 u 和 v 都是中间变量.

关于复合函数, 重要的是把一个复合函数分解成若干个简单函数.

例如, $y=\ln \sin \sqrt{x^2+1}$ 可以分解为 $y=\ln u$, $u=\sin v$, $v=\sqrt{w}$, $w=x^2+1$;

$y=\tan^3(\sqrt{x^2/2^x})$ 可以分解为 $y=u^3$, $u=\tan v$, $v=\sqrt{t}$, $t=\frac{x^2}{2^x}$.

四、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, 若存在 $M > 0$, 使得对于任意 $x \in D$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 D 上有界; 若不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 在区间 D 上无界.

注意: (1) 函数 $f(x)$ 有界还是无界是相对于某个区间而言的. 例如, $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上无界的, 但在区间 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上是有界的.

(2) 常见的有界函数:

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi, x \in [-1, 1],$$

$$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}, |\operatorname{arccot} x| < \pi, x \in (-\infty, +\infty).$$

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, 若对于任意 $x_1, x_2 \in D$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是单调增加(图 1-4)(单调减少(图 1-5)的).