高等数学

习题及习题集精解（第二版）

杨爱珍　殷承元　叶玉全　王　琪　编

复旦大學出版社

高等数学习题及习题集精解

（第二版）

杨爱珍　殷承元　叶玉全　王　琪　编

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题及习题集精解/杨爱珍等编. —2 版. —上海：复旦大学出版社,2017. 12
ISBN 978-7-309-13323-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 杨…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-题解　Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 260103 号

高等数学习题及习题集精解(第二版)
杨爱珍　殷承元　叶玉全　王　琪　编
责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编：200433
网址：fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售：86-21-65642857　团体订购：86-21-65118853
外埠邮购：86-21-65109143　出版部电话：86-21-65642845
大丰市科星印刷有限责任公司

开本 787 × 1092　1/16　印张 27.5　字数 719 千
2017 年 12 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-13323-3/O・648
定价：58.00 元

内容提要

本书由上海财经大学数学学院编写，系高等经济管理类院校使用的经济数学系列教材的辅导用书之一.

全书分为两大部分：第一部分为由上海财经大学应用数学系编写、由高等教育出版社 2011 年出版的《高等数学》各章的习题精解；第二部分为由上海财经大学数学学院编写、由上海财经大学出版社 2017 年出版的《高等数学习题集》(第四版)各章的学习测试题精解.

每部分又分别为 12 章：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何、多元函数微分及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程与差分方程.

本书可作为高等院校的数学基础课程“高等数学”教学辅导参考书，同时也适合各类考研学生作为高等数学的复习用书.

第二版前言

本书是上海财经大学数学学院的教师根据几十年从事高等数学教学的丰富经验编写的教辅书,希望通过老师的解答对学生学习高等数学有启发思考的帮助作用.本书基于高等教育出版社2011年出版的《高等数学》以及上海财经大学出版社2017年出版的《高等数学习题集》(第四版).

做习题是学习高等数学的一个重要环节,只有通过做题才能深刻理解基本概念和基本理论,熟练掌握基本内容和基本技能,加强思维训练和能力培养,达到巩固知识和扩大视野的目的.本书为了帮助学生有解题的感觉,配合教学,着力为学生提供分析问题和解决问题的方法,对学生学习高等数学将起到一种积极的指导作用.

全书分为两大部分:第一部分为上海财经大学应用数学系编写、由高等教育出版社2011年出版的《高等数学》各章习题精解;第二部分为上海财经大学数学学院编写、由上海财经大学出版社2017年出版的《高等数学习题集》(第四版)各章学习测试题精解.

本书由上海财经大学数学学院的4位老师分工编写而成,其中第一部分《高等数学》各章习题精解的第一、二、三、四、五、六、十二章由杨爱珍副教授编写,第七、十一章由殷承元教授编写,第八、九、十章由叶玉全教授编写;第二部分《高等数学习题集》(第四版)各章学习测试题精解由王琪副教授编写,最后由杨爱珍副教授对全书进行了统稿.

通过4年的教学实践,针对使用对象的特点,我们对本书进行了修订,修订工作主要包括以下方面的内容:

1. 订正了原书中的疏漏以及排版印刷方面的错误;

2. 根据《高等数学习题集》(第四版)的改变情况,调整了一部分的习题,使其与相应的内容之间搭配得更加合理,也更适合教学的对象.

在修订过程中,我们广泛地搜集了读者对原书的意见和建议.希望通过此次修订,这本教辅书能更加合理、完善和科学.感谢广大同仁对本书的关心、支持和厚爱,欢迎广大读者继续批评指正.

编　者

2017年9月

第一版前言

随着我国高等教育的飞速发展，数学在各学科中的应用更广泛. 高等数学是一门以经典微积分为主的数学基础课程，也是各高等院校的一门重要的公共必修课. 上海财经大学的高等数学教学一直以高标准、严要求为宗旨，收到良好的教学效果，为我校培养优秀的财经人才奠定了扎实的数学功底，学生在历次全国数学竞赛中屡获佳绩，并在历届考研中成绩名列前茅，这与有一套好的教材及教辅用书密切相关.

上海财经大学应用数学系在上海财经大学出版社出版的《高等数学》(第三版)的基础上，又组织编写了由高等教育出版社 2011 年出版的《高等数学》；以及修订了由上海财经大学出版社出版的《高等数学习题集》(第二版)，2012 年出版了《高等数学习题集》(第三版).

做习题是学习高等数学的一个重要环节，只有通过做题才能深刻理解基本概念和基本理论，熟练掌握基本内容和基本技能，加强思维训练和能力培养，达到巩固知识和扩大视野的目的. 本书为了帮助学生有解题的感觉，配合教学，着力为学生提供分析问题和解决问题的方法，对学生学习高等数学将起到一种积极的指导作用.

全书分为两大部分：第一部分为由上海财经大学应用数学系编写、由高等教育出版社 2011 年出版的《高等数学》各章的习题精解；第二部分为由上海财经大学应用数学系编写、由上海财经大学出版社 2012 年出版的《高等数学习题集》(第三版)各章的学习测试题精解.

本书由上海财经大学应用数学系的 4 位老师分工编写而成，其中第一部分《高等数学》各章习题精解的第一、二、三、四、五、六、十二章由杨爱珍副教授编写，第七、十一章由殷承元教授编写，第八、九、十章由叶玉全教授编写；第二部分《高等数学习题集》(第三版)各章学习测试题精解由王琪副教授编写，最后由杨爱珍副教授对全书进行了统稿.

本书可作为高等院校的数学基础课程高等数学的教学辅导参考书，同时也适合各类考研学生作为高等数学的复习用书.

在教材编写过程中，我们得到了上海财经大学应用数学系领导的重视及上海财经大学教授高等数学课程老师们的大力支持，并得到了复旦大学出版社的鼎力相助，特别是范仁梅老师的认真负责，在此一并致谢.

尽管我们尽了最大的努力，但错误和不足之处仍然难免，恳请读者批评指正，我们表示万分感谢.

编　者

2013 年 7 月

目　录

第一部分　习题精解

第二部分　学习测试题精解

第一部分

习 题 精 解

第一章　函数与极限习题一精解

1. 求下列函数的定义域,并用区间表示:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{\lg(5-x)}$;

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$;　　(4) $y=2^{\frac{1}{x}}+\arccos\ln\sqrt{1-x}$;

(5) $y=\begin{cases}x^2+3, & x<0,\\ \lg x, & x>0;\end{cases}$　　(6) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\ln x}$.

解　(1) 由$\begin{cases}x\neq 0,\\ 1-x^2\geqslant 0,\end{cases}$得 $D=[-1,\ 0)\cup(0,\ 1]$.

(2) 由$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ x-3\neq 0,\\ 5-x>0,\\ 5-x\neq 1,\end{cases}$得 $D=[2,\ 3)\cup(3,\ 4)\cup(4,\ 5)$.

(3) 由$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,\\ x^2-x-2>0,\end{cases}$得 $D=(2,\ 3]$.

(4) 由$\begin{cases}x\neq 0,\\ |\ln\sqrt{1-x}|\leqslant 1,\\ 1-x>0,\end{cases}$得 $D=[1-\mathrm{e}^2,\ 0)\cup(0,\ 1-\mathrm{e}^{-2}]$.

(5) $D=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

(6) 由$\begin{cases}x>0,\\ 1-\ln x\neq 0,\end{cases}$得 $D=(0,\ \mathrm{e})\cup(\mathrm{e},\ +\infty)$.

2. 已知 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,\ 1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(x-4)$;　　(2) $f(\lg x)$;　　(3) $f(\sin x)$.

解　(1) 因为 $f(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$,故 $f(x-4)$, $0\leqslant x-4\leqslant 1$,得 $4\leqslant x\leqslant 5$,即 $D=[4,\ 5]$.

(2) 因为 $f(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$,故 $f(\lg x)$, $0\leqslant \lg x\leqslant 1$,得 $1\leqslant x\leqslant 10$,即 $D=[1,\ 10]$.

(3) 因为 $f(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$,故 $f(\sin x)$, $0\leqslant \sin x\leqslant 1$,得

$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,即 $D=[2k\pi,\ (2k+1)\pi](k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

3. (1) 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f(x+1)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(2) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x-1)$;

(3) 设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$,求 $f(x)$;

(4) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求 $\varphi(x)$.

解 (1) $f(x+1)=\dfrac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\dfrac{-x}{x+2}$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$.

(2) 由于 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$,故 $f(x-1)=(x-1)^2-2=x^2-2x-1$.

(3) 由于 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2}+x^2}=\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}$,故 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$.

(4) 由于 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$,得 $f[\varphi(x)]=\ln\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$,故 $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

4. 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$;

(2) $f(x)=x\sqrt{x^2-1}+\tan x$;

(3) $f(x)=x(1-x)$;

(4) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解 (1) 由于 $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}+\cos(-x)=\dfrac{\sin x}{x}+\cos x=f(x)$,故 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 由于 $f(-x)=-x\sqrt{(-x)^2-1}+\tan(-x)=-x\sqrt{x^2-1}-\tan x=-f(x)$,故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 由于 $f(-x)=-x[1-(-x)]=-x(1+x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$,故 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(4) 由于 $f(-x)=\ln[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)]=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$$=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x),$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

5. 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数,且在 $(0,2]$ 上有 $f(x)=x^2$,求 $f(x)$ 在 $(0,6]$ 上的表达式.

解 由于 $f(x)=f(x+2)=f(x+4)$,因此 $f(x-4)=f(x-2)=f(x)$,当 $x\in(0,2]$ 时, $x-2\in(2,4]$, $x-4\in(4,6]$,故

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x\leqslant 2,\\ (x-2)^2, & 2<x\leqslant 4,\\ (x-4)^2, & 4<x\leqslant 6.\end{cases}$$

6. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt{9-x}$;

(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$;

(3) $y=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0;\end{cases}$　　(4) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

解　(1) 由于 $y=\sqrt{9-x}$，得 $x=9-y^2$，故反函数为 $y=9-x^2(x\geqslant 0)$.

(2) 由于 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，得 $2^x=\dfrac{y}{1-y}$，即 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，故反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

(3) 由 $x<0$ 时，$y=x-1$，得 $x=y+1$，即 $y=x+1$；由 $x\geqslant 0$ 时，$y=x^2$，得 $x=\sqrt{y}$，即 $y=\sqrt{x}$，故反函数为

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(4) 由于 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，得 $(e^x)^2-2ye^x-1=0$，即 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$（负值舍去），故反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

7. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=\ln\sin^2 x$；　　(2) $y=5^{\cos\sqrt{x}}$；

(3) $y=\arctan e^{\frac{1}{x}}$；　　(4) $y=\cos^2\ln x$.

解　(1) $y=\ln\sin^2 x$，由 $y=\ln u$，及 $u=v^2$，和 $v=\sin x$ 复合而成.

(2) $y=5^{\cos\sqrt{x}}$，由 $y=5^u$，及 $u=\cos v$，和 $v=\sqrt{x}$ 复合而成.

(3) $y=\arctan e^{\frac{1}{x}}$，由 $y=\arctan u$，及 $u=e^v$，和 $v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成.

(4) $y=\cos^2\ln x$，由 $y=u^2$，及 $u=\cos v$，和 $v=\ln x$ 复合而成.

8. (1) 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2+1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$；

(3) 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$，$g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

解　(1) $f(f(x))=\begin{cases}\sqrt{1-[f(x)]^2}, & |f(x)|<1,\\ [f(x)]^2+1, & |f(x)|\geqslant 1.\end{cases}$

当 $0<|x|<1$ 时，$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$，

$$f(f(x))=\sqrt{1-[f(x)]^2}=\sqrt{1-[\sqrt{1-x^2}]^2}=|x|;$$

当 $|x|=1$ 时，$f(x)=2$，$f(f(x))=[f(x)]^2+1=5$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=1$，$f(f(x))=[f(x)]^2+1=2$；

当 $|x|>1$ 时，$|f(x)|=x^2+1>1$，

$$f(f(x))=[f(x)]^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2.$$

因此 $f(f(x))=\begin{cases}|x|, & 0<|x|<1,\\ 2, & x=0,\\ x^4+2x^2+2, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

(2) $f(f(x))=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

当 $x<-1$ 时，$f(x)=1+x<0$，$f(f(x))=1+f(x)=2+x$；

当 $-1\leqslant x<0$ 时，$f(x)=1+x\geqslant 0$，$f(f(x))=1$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=1>0$，$f(f(x))=1$；

所以 $f(f(x))=\begin{cases}x+2, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$

(3) $f(g(x))=\dfrac{g(x)+|g(x)|}{2}$.

当 $x<0$ 时，$g(x)=x<0$，$f(g(x))=\dfrac{x-x}{2}=0$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2\geqslant 0$，$f(g(x))=\dfrac{x^2+x^2}{2}=x^2$.

所以 $f(g(x))=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

9. 分别讨论函数 $y=\lg(a-\sin x)$，当 $a=2$，$a=\dfrac{1}{2}$，$a=-2$ 时，是否为复合函数?如果是复合函数，写出它的定义域.

解 $y=\lg u$，其定义域 $D_y=(0,+\infty)$.

当 $a=2$ 时，函数 $u=a-\sin x$ 的值域 $f_u=[1,3]$，$D_y\cap f_u\neq\varnothing$，故 $y=\lg(2-\sin x)$ 是复合函数，由 $2-\sin x>0$，得定义域 $(-\infty,+\infty)$；

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $u=a-\sin x$ 的值域 $f_u=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$，$D_y\cap f_u\neq\varnothing$，$y=\lg\left(\dfrac{1}{2}-\sin x\right)$ 是复合函数，由 $\dfrac{1}{2}-\sin x>0$，得定义域 $\left[2k\pi-\dfrac{7\pi}{6},2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$；

当 $a=-2$ 时，函数 $u=a-\sin x$ 的值域 $f_u=[-3,-1]$，$D_y\cap f_u=\varnothing$，$y=\lg\left(\dfrac{1}{2}-\sin x\right)$ 不构成复合函数.

10. 某化肥厂日产量最多为 m 吨，已知固定成本为 a 元，每多生产 1 吨化肥，成本增加 k 元. 若每吨化肥的售价为 p 元，试写出利润与产量的函数关系式.

解 设日产量为 x 吨，则成本函数 $C(x)=a+kx$，$x\in[0,m]$，

收益函数 $R(x)=px$，$x\in[0,m]$，利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=(p-k)x-a$，$x\in[0,m]$.

11. 生产某种产品，固定成本为 2(万元)，每多生产 1(百台)，成本增加 1(万元)，已知需求函数为 $Q=20-4p$ (其中 p 表示产品的价格，Q 表示需求量)，假设产销平衡. 试写出：(1)成本函数；(2)收益函数；(3)利润函数.

解 成本函数 $C(Q)=2+Q$(万元)，收益函数 $R(Q)=pQ=5Q-\dfrac{1}{4}Q^2$(万元)，利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\dfrac{1}{4}Q^2+4Q-2$(万元).

12. 某商场以每件 a 元的价格出售某种商品，若顾客一次购买 50 件以上，则超出 50 件以上的以每件 $0.8a$ 元的优惠价出售，试将一次成交的销售收入表示成销售量 x 的函数.

解　$R(x)=\begin{cases}ax, & 0<x\leqslant 50,\\ 50a+0.8a(x-50), & x>50.\end{cases}$

13. 某运输公司规定货物的吨公里运价为：不超过 a 公里，每公里 k 元，超过 a 公里，超出部分为每公里 $\frac{4}{5}k$ 元，试求运价 m 与里程 s 之间的函数关系式.

解　$m=\begin{cases}ks, & 0\leqslant s\leqslant a,\\ ak+\frac{4}{5}k(s-a), & s>a.\end{cases}$

14. 用数列极限的定义验证：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2}{n^2+n+1}=1$.

解　(1) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$ 成立，即 $n>\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$，取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}\right]$，可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使 $|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$ 成立，即 $n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$，取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]$，可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$ 成立，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}<\frac{1}{2n^2}<\varepsilon$ 成立，即 $n>\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$，取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{n^2-2}{n^2+n+1}-1\right|=\frac{n+3}{n^2+n+1}<\frac{2}{n}<\varepsilon$ 成立，即 $n>\frac{2}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n^2-2}{n^2+n+1}-1\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2}{n^2+n+1}=1$.

15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}+\frac{2}{n^k}+\cdots+\frac{n}{n^k}\right)$（$k$ 为常数）.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}+\frac{2}{n^k}+\cdots+\frac{n}{n^k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n^{k-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^{k-2}}=\begin{cases}\infty, & k<2,\\ \frac{1}{2}, & k=2,\\ 0, & k>2.\end{cases}$

16. (1) 设 $x_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

(2) 设 $x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 (1) 因为 $x_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

(2) 因为

$$x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)},$$

$$x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\geqslant\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}=\frac{1}{2}$,由夹逼定理,所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

17. 利用数列极限存在准则(夹逼定理)证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

证 (1) 由于 $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$,由夹逼定理,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.

(2) 由于 $3=(3^n)^{\frac{1}{n}}<(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\cdot3^n)^{\frac{1}{n}}=3\sqrt[n]{3}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}3=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\sqrt[n]{3}=3$,由夹逼定理,因此$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

18. 设数列$\{a_n\}$:$\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, …, $\sqrt{2+a_{n-1}}$, …,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,并求此极限值.

证 先证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在:

(1) 显然$\{a_n\}$ 单调增加,即 $a_n<a_{n+1}$ 成立;

(2) 再证明数列$\{a_n\}$ 有界. 因为

$$a_1=\sqrt{2}<2,\ a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+a_1}<\sqrt{2+2}=2,\ \cdots,$$

故 $a_n<2$,即数列$\{a_n\}$ 有上界.

由单调有界数列必有极限,得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,下面求出 A.

由 $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$,两边取极限得 $A=\sqrt{2+A}$,即 $A^2-A-2=0$,解得 $A=2$,或 $A=-1$. 根据收敛数列的保号性的推论可知 A 大于零,所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

19. 设 $x_1=1$，$x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限值.

证　先证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在：

(1) 用数学归纳法证明数列$\{x_n\}$ 单调增加. $x_1=1$，$x_2=\sqrt{2x_1}=\sqrt{2}$，显然 $x_1<x_2$；假设 $x_{k-1}<x_k$ 成立，于是

$$x_k-x_{k+1}=\sqrt{2x_{k-1}}-\sqrt{2x_k}<0,$$

即 $x_k<x_{k+1}$ 成立；故数列$\{x_n\}$ 单调增加，即 $x_n<x_{n+1}$ 成立.

(2) 再证明数列$\{x_n\}$有界. 因为

$$x_1=1<2,\ x_2=\sqrt{2x_1}<\sqrt{2\cdot 2}=2,\ \cdots,$$

故 $x_n<2$，即数列$\{x_n\}$ 有上界.

由单调有界数列必有极限，得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，下面求出 A. 由 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$，两边取极限得 $A=\sqrt{2\cdot A}$，即 $A^2-2A=0$，解得 $A=2$，或 $A=0$. 根据收敛数列的保号性的推论可知 A 大于零，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

20. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

解

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

21. 用函数极限的定义验证：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x+1}=\dfrac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$；　　(4) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

解　(1) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，当 $x>M$ 时，有$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{3x+1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2\,|\,(2x+1)\,|}<\frac{1}{2(2\,|\,x\,|-1)}<\varepsilon,$$

即 $|\,x\,|>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}+1\right)$，取 $M=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}+1\right)$，可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}+1\right)$，当 $|\,x\,|>M$时，有$\left|\dfrac{3x+1}{2x+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3) $\forall\varepsilon>0$，要使 $|\,(3x-1)-8\,|=3\,|\,x-3\,|<\varepsilon$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，当 $0<|\,x-3\,|<\delta$ 时，有 $|\,(3x-1)-8\,|<\varepsilon$ 成立，所以$\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$.

(4) 本题 $f(x)=\dfrac{1-4x^2}{2x+1}$ 在 $x=-\dfrac{1}{2}$ 处没有定义，但不影响函数在该点极限存在.

$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=2\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,可见,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当$0<\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\delta$时,有$\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$成立,所以$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

22. 设 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$,求$\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解 本题 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<1\\ 1, & x>1\end{cases}$在$x=1$处左右两侧$f(x)$的表达式不同,故求$x=1$处的极限,需考虑左右极限.

而$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(-1)=-1$,$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}1=1$,$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$,所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

23. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant0,\\ x^2+1 & 0<x<1,\\ 2x+1 & x\geqslant1.\end{cases}$ 求:(1)$\lim\limits_{x\to0}f(x)$;(2)$\lim\limits_{x\to1}f(x)$;(3)$\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

解 (1) 本题在$x=0$和$x=1$处左右两侧$f(x)$的表达式不同,故求$x=0$和$x=1$处的极限,需考虑左右极限.

而$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1$,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$,所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+1)=2$,$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2x+1)=3$,$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$,所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(2x+1)=5$.

24. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$,求$\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解 本题$f(x)$中含有特殊函数$e^{\frac{1}{x-1}}$,故求$x=1$处的极限,需考虑左右极限.由于$\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$,$\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$,因此

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}=1,\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}=0,$$

得$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$,故$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

25. 利用函数极限存在准则(夹逼定理)证明:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

证 (1) 由于是求$x\to0$的极限,故可设$-1<x<1$.当$x>0$时,有$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$;当$x<0$时,有$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1$,而$\lim\limits_{x\to0}1=1$,$\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1$,由夹逼定理,所以$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1$.

(2) 因为求$x\to0^+$的极限,又$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}$,当$x>0$时,有$x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant1$,而$\lim\limits_{x\to0^+}x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1$,$\lim\limits_{x\to0^+}1=1$,由夹逼定理,所以$\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

26. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+1}$；

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^3-3x^2+5}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$；

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}\right]$；

(12) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+x\sqrt{x^2+2})$.

解　(1) 原式 $\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

(2) 原式 $\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=4$.

(3) 令 $\sqrt[3]{x+5}=t$，则 $x=t^3-5$，原式 $=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t-2}{t^3-8}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{1}{t^2+2t+4}=\dfrac{1}{12}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=2$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(1+n)n}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

(7) 原式 $\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(8) 原式 $\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3}=0$.

(9) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=1$.

(10) 原式 $\xlongequal{\infty-\infty}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1$.

(11) 原式 $\xlongequal{\infty-\infty}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{x(\sqrt{x}-1)}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{\sqrt{x}-1}=1$.

(12) 令 $x=-t$，则原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}(t^2-t\sqrt{t^2+2})$，再令 $t=\dfrac{1}{u}$，

原式 $\xlongequal{\infty-\infty}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{1+2u^2}}{u^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{-2}{1+\sqrt{1+2u^2}}=-1$.

27. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a，b 的值.

解 由左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}=0$，得 $\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0,\end{cases}$ 故 $a=1$，$b=-1$.

28. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）；

(5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；

(12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$；

(14) 确定 c，使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=9$；

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$；

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\right)^n$.

解 (1) 原式 $\overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=1$.

(2) 令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t$，原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{3\sin t}=\dfrac{2}{3}$.

(3) 令 $\dfrac{2}{x}=t$，则 $x=\dfrac{2}{t}$，原式 $\overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{12+5t}{10+3t}\cdot\dfrac{\sin t}{t}\right)=\dfrac{6}{5}$.

(4) 原式 $\overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\left(x\cdot\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\right)=x$.

(5) 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$.

(6) 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}$.

(7) 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin 2x}{x}}{1+\dfrac{\sin 3x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\dfrac{\sin 2x}{2x}}{1+3\dfrac{\sin 3x}{3x}}=-\dfrac{1}{4}$.

(8) 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

(9) 原式 $\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\{[(1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}\}^{-2}=e^{-2}$.