



应用型高等学校“十三五”规划教材

DIANLU、XINHAO YU XITONG (XIA)

电路、信号与系统 (下)

李 芳 吴国平 主编



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

电路、信号与系统(下)

主 编 李 芳 吴国平
副主编 孙利华 黄翠翠 余良俊
叶 磊 邓 华 望 超
邓 晗



华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书与《电路、信号与系统(上)》为同一个系列,系统地讨论了信号与线性系统的基本理论和方法,并利用信号与系统分析的方法来分析电路原理。本书主要介绍信号系统的基本概念、连续时间系统的时域分析、连续时间信号的分解与分析、连续时间系统的频域分析、连续时间系统的复频域分析、连续时间系统的系统函数表示及特性分析。为帮助学生理解本书的基本理论、方法,书中安排了适当的思考题和习题。本书可作为普通高等院校及高职高专院校电气信息类专业“信号与系统”课程的教材,也可供相关学科研究人员、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电路、信号与系统. 下/李芳,吴国平主编. —武汉:华中科技大学出版社,2018.6
ISBN 978-7-5680-3709-9

I. ①电… II. ①李… ②吴… III. ①电路理论-高等学校-教材 ②信号系统-高等学校-教材
IV. ①TM13 ②TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 122849 号

电路、信号与系统(下)
Dianlu、Xinhao yu Xitong (Xia)

李 芳 吴国平 主编

策划编辑:范 莹
责任编辑:汪 粲
封面设计:原色设计
责任校对:曾 婷
责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话:(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编:430223

录 排:武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷:武汉华工鑫宏印务有限公司
开 本:787mm×1092mm 1/16
印 张:14.5
字 数:368 千字
版 次:2018 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
定 价:38.00 元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

“电路、信号与系统(下)”课程是电子、通信、光电、计算机、电气工程及其自动化等电类专业的一门重要的专业基础课程,其基本内容、基本理论、基本方法与技术也是数字信号处理、图像处理与分析、语音处理与分析、模式识别、遥感遥测技术、智能装备技术、预测方法等的重要基础。该课程是电类、信息类本科生的主干课程和核心课程,是该类学科考研的必考专业课程之一。为了适应民办院校应用技术型教改的需求,编者所在的武汉工程科技学院(原中国地质大学江城学院)自转型以来,成立了“电路、信号与系统”课程建设教学平台,开展了适应转型需要的课程建设及教材改革。课程建设是教学取得成效的关键之一。课程内容的先进性与科学性,是课程质量的基本保证。要使教学内容既保证经典理论与方法的完整性、连续性,又保证其内容具有规范性、科学性、前沿性,以及对转型后专业教学具有适应性,必须开展自己的教材建设。借鉴已出版的同类教材,参考吴国平教授公开出版的《信号分析与处理》,以及近几年不断更新的授课电子版和纸质版教案内容,采用新的视角和思路进行了本书的编写。

根据应用型人才培养方案而编写的本教材具有不同于其他教材的鲜明特色:

(1) 教材内容具有简约性与精练性,将内容限定为确定性基本电路、信号和线性系统分析。

(2) 教材分析对象强调电路理论、信号与系统的具体物理属性分析,与同类教材过分注重数学推导和数学证明相区别。

(3) 教材体系体现应用技术型院校电类课程教学改革理念,区别于当前同类教材过于偏重理论的完整性、方法的全面性、内容的体系性的教材编写思想,注重学即为用的理念。

(4) 教材实时引进先进的信号与系统分析的新理论、新方法,从电路、信号与系统融合的角度对电路和信号进行分析。

(5) 教材添加思考题和习题,增加电路、信号与系统的工程应用、分析、开发等内容。

本书由李芳、吴国平主编。孙利华、黄翠翠、余良俊、叶磊、邓华、望超、邓晗等参加了部分章节的编写,全书由吴国平统筹、修订和定稿。

本书的编写工作离不开武汉工程科技学院机械与电子信息学院各位领导的支持,编写中得到了张友纯教授和熊年禄教授的热情关心和帮助。在本书出版过程中,华中科技大学出版社的范莹编辑给予了大力支持和帮助,作者在此一并表示衷心的感谢。在编写过程中,编者借鉴引用了有关参考资料,在此对相关文献的作者也一并表示深深的谢意。

由于作者水平有限,编写的教材不可避免地存在疏漏和不足之处,敬请读者批评指正。

本教材的先修课程为“电路、信号与系统(上)”。

编 者

2017 年 7 月

目 录

第 1 章 绪论	1
第 2 章 连续时间信号与线性系统时域分析	3
2.1 引言	3
2.2 用算子符号表示微分方程	5
2.3 冲激响应和零状态响应	8
2.4 线性系统全响应时域求解	17
2.5 MATLAB 软件简介	19
2.5.1 MATLAB 的安装及使用	19
2.5.2 MATLAB 中的图形	25
2.5.3 MATLAB 编程	35
2.5.4 MATLAB 符号运算	44
思考题	48
习题 2	48
第 3 章 连续时间信号的分解与分析	52
3.1 引言	52
3.2 信号分解	52
3.3 信号的傅里叶级数	55
3.4 周期信号的频谱	59
3.5 非周期信号的频谱	60
3.6 一些典型信号的频谱	63
3.7 傅里叶变换的性质	67
3.8 周期信号的傅里叶变换	74
3.9 抽样信号的分析 and 抽样定理	78
3.10 连续时间信号与线性系统时域分析实验	84
思考题	100
习题 3	100
第 4 章 连续时间系统的频域分析	102
4.1 引言	102
4.2 信号通过系统的频域分析方法	102
4.3 理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应	105
4.4 佩利-维纳准则	108

4.5 希尔伯特变换	110
4.6 信号的无失真传输	111
4.7 连续时间信号的频域分析	113
思考题	121
习题 4	121
第 5 章 连续时间系统的复频域分析	123
5.1 引言	123
5.2 拉普拉斯变换	124
5.3 拉普拉斯变换的收敛域	127
5.4 常用函数的拉普拉斯变换	129
5.5 拉普拉斯变换的基本性质	132
5.6 拉普拉斯逆变换	142
5.7 线性系统的拉普拉斯变换分析法	152
5.8 阶跃信号作用于 RLC 串联电路的响应	161
5.9 双边拉普拉斯变换	164
5.10 连续时间系统的复频域分析仿真实验	168
思考题	176
习题 5	176
第 6 章 连续时间系统的系统函数及模拟	179
6.1 引言	179
6.2 系统函数的表示法	180
6.3 系统函数极点和零点的分布与系统时域特性的关系	184
6.4 系统函数极点和零点的分布与系统频率特性的关系	187
6.5 系统的稳定性	193
6.6 反馈系统的稳定性	198
6.7 线性系统的模拟	200
6.8 信号流图	205
6.9 连续时间系统函数表示及特性分析	212
思考题	221
习题 6	221
附录 A 信号与系统常用物理量的符号与单位	224
参考文献	225

第 1 章 绪 论

人类社会的发展离不开人类群体的活动,为了保证群体活动的协调和有序,人们之间就必须相互交流信息。信息要用某种方式表达出来,例如,可以用语言、文字或图画来表达,也可以用收、发双方事先约定的编码来表达。这些语言、文字、图画、编码等,分别是按一定规则组织起来的,因而含有了信息的一组约定的符号,这种用约定方式组成的符号统称为消息。消息依附于某一物理量的变化上就构成信号。

在电磁现象被人类认识之前,信息的交流与传输是由直接作用于人类感觉器官的信号来实现的,例如,烽火、鼓声、旗语、书信等。以上传输的是直接作用于人耳的声信号或直接作用于人眼的光信号。这些传输信息的方式,或信息含量少,或传输速度慢,或传输距离受限,有着种种不足之处。电被人类认识之后,因其传输信息快速、便捷,用电作为信息载体的电信号的传输就得到了快速的发展。自 1837 年摩尔斯发明电报以来,传输使用电信号的通信方式得到了广泛运用与迅速发展,现在电话、电报、无线广播、电视已成为人们生活中不可缺少的部分。而为适应生产活动全球化的需要,人类已经实现了环绕全球的电信号通信,并正向超越地球的太阳系通信扩展。在信息传输理论中,人们也常将直接作用于人类感官的信号统称为消息。消息一般并不便于直接传输,所以要利用一些转换设备,把各种不同的消息转变成为便于传输的电信号。电信号常常是随着时间变化的电压或电流等有关电的量,这种变化是与语言的声音变化或者图画的色光变化等相对应的。这样变化着的电压或电流,分别构成了代表声音、图像和编码等消息的信号,因而信号中也就包含了消息中所含有的信息。所以,带有信息的信号是信息传输技术的工作对象。

信号的传输,需要用由许多不同功能的单元组织起来的一个复杂系统来完成。从广义上说,一切信息的传输过程都可以看成是通信,一切完成信息传输任务的系统都是通信系统,例如,电报、电话、电视、雷达、导航等系统。以一个电视系统来说,在这个系统中,所要传输的信息包含在一些配有声音的画面之中,在传输这些画面时,先要利用电视摄像机把画面的光线、色彩转变成图像信号,并利用话筒把声音转变成伴音信号,这些就是电视要传输的带有信息的原始信号。然后,把这些信号送入电视的发射机,发射机能够产生一种反映上述信号变化的便于传播的高频电信号。最后,由天线将这高频电信号转换为电磁波发射出去,在空间传播。电视接收者用接收天线截获了电磁波的一小部分能量,把它转变成为高频电信号送入电视的接收机。接收机的作用正好和发射机相反,它能从送入的高频电信号中恢复出原来的图像信号与伴音信号,并把这两种信号分别送到显像设备和发声设备,使接收者能看到传输的画面,听到传输的声音。这个过程,可以用一个简明的示意图表示,如图 1-1 所示。这个图表示了一般通信系统的组成,其中转换器指的是把消息转换为电信号或者反过来把电信号还原成消息的装置,如摄像、显像、话筒、喇叭等设备装置。因为这些装置同时完成了从一种形式的能量转换为另一种形式的能量的工作,所以也常称之为换能器。信道指的是信号传输的通道,在有线电话中,它就是导线;在利用电磁波传播的无线电通信系统中,它可以是电磁波传播的空间,也可

以是波导或同轴电缆;在近几年发展的光通信中,它则是光导纤维。发射机和接收机也可以看成是信号通道的一部分,因此有时也称它们为信道机。所以一个通信系统的工作,主要是包括消息到信号的转换、信号的处理和信号的传输等。



图 1-1 一般通信系统的组成

与信号传输技术同时发展起来的还有信号处理技术。信号处理的研究领域较少涉及信号的传输,而更多的是考虑信号收到以后的解释。这些信号可能是通信中所传输的信号,也可能是包含信息的某些数据,诸如生物学中的信号(如脑电、心电数据)、计算机打印的科学实验数据、商业数据、气象资料等。这里的基本问题是分析收到的信号或数据,从中提取出有用的信息,特别是在存在使信号含糊不清的噪声或干扰的情况下,提取所需要的确切信息。信号处理技术包含滤波、变换、增强、压缩、估值与识别等内容。自 20 世纪 80 年代以来,随着数字计算机的发展及大规模集成电路技术的进步,信号处理的理论与方法都有了很大的发展,并取得了广泛的运用,如多媒体通信、影碟机、高清晰电视、数码相机,以及机械振动分析、机械故障诊断等。

信号传输与信号处理是两个独立的学科,但两者又是密切相关的学科,在发展中相互影响、相互促进。如处理带有不确定性的随机信号的技术,就密切依赖于研究信息传输所发展起来的理论,而信号处理技术的运用又大大提高了信号传输的质量,扩大了通信的距离。信号传输与信号处理的共同的理论基础之一是信号分析与系统分析,即要研究信号的特性、系统的分析方法、系统各组成部分对信号产生何种影响等问题。

信号的传输与处理技术,除了应用在通信领域外,自 20 世纪 40 年代以来也广泛被应用于其他许多技术领域,如各种雷达与声呐、自动化与遥测数据的处理、全息技术、计算技术,以及天文学、地震学、生物学、经济学等领域。

第2章 连续时间信号与线性系统时域分析

2.1 引言

连续时间动态线性非时变系统(简称系统),通常可以用常系数微分方程来描述,在微分方程中包含表示有激励和响应的时间函数,以及它们对于时间的各阶导数的线性组合。系统分析的任务是对给定的系统模型和输入信号求系统的输出响应。系统的分析方法可分为几大类,从系统数学模型的求解方法来讲,大体上可分为时域分析法和变换域分析法。时域分析法直接分析时间变量的函数,研究系统的时间响应特性,即时域特性。变换域分析法是将信号与系统模型的时间变量函数变换成相应变换域中相应的变量函数。例如,傅里叶变换就是将时间变量变换为频率变量去进行分析。系统时域分析法可以通过微分方程的建立和求解得到系统的输出响应,也可以通过求取系统的单位冲激响应,然后将输入激励信号与该系统冲激响应进行卷积积分求出系统的输出响应。

当系统是一个线性电路时,根据电路理论以及理想电路元件的特性,可以列出一个或者一组描述电路工作的常系数微分方程。例如,如图 2-1 所示的为二阶 RLC 电路系统,根据该电路特性可列出方程

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = e(t) \quad (2-1)$$

写成常系数微分方程为

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt} \quad (2-2)$$

由此推广到一般,对于一个 n 阶系统,设激励信号为 $e(t)$,系统响应为 $r(t)$,则该系统的 n 阶常系数微分方程描述为

$$\begin{aligned} & \frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) \\ &= b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \end{aligned} \quad (2-3)$$

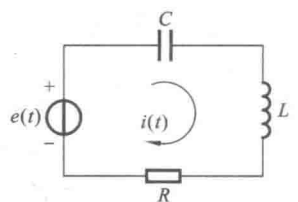


图 2-1 RLC 串联电路

根据时域经典解法,即高等数学微分方程的直接解法,式(2-3)的完全解由两部分组成:齐次解和特解。例如式(2-2),它的齐次方程为

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

它的通解为 $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, 其中 λ_1, λ_2 为该微分方程的特征根, c_1, c_2 为待定系数。若微分方程的根为复根,其齐次方程解的形式和不等实根类似。式(2-3)的特解的函数形式与激励函数形式有关。将激励 $e(t)$ 代入式(2-3)的右端,化简后,右端函数式称为自由项。通常由自由项

选择特解函数式,代入方程后求特解函数式中的待定系数,即可得出特解。

关于求解微分方程的具体方法,在“高等数学”这门课程中已经学习过,在此不再赘述。作为系统的响应来说,微分方程的全解即系统的完全响应,满足齐次方程解的这部分称为自由响应,满足非齐次方程特解的这部分称为受迫响应。

例 2-1 已知某二阶系统的动态方程

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = f(t), \quad t > 0$$

初始条件 $y(0)=1, y'(0)=2$, 输入信号 $f(t)=e^{-t}\epsilon(t)$, 求该系统的全响应 $y(t)$ 。

解 (1) 求齐次方程 $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 0$ 的齐次解 $y_h(t)$ 。

特征方程为 $s^2 + 6s + 8 = 0$

特征根为 $s_1 = -2, \quad s_2 = -4$

齐次解 $y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$

(2) 求非齐次方程 $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = f(t)$ 的特解 $y_p(t)$ 。

由输入 $f(t)$ 的形式,设方程的特解为 $y_p(t) = K e^{-t}$, 将特解代入原微分方程即可求得常数 $K = \frac{1}{3}$ 。

(3) 求方程

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{-t}$$

的全解。由初始条件可得

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 1$$

$$y'(0) = -2c_1 - 4c_2 - \frac{1}{3} = 2$$

解得 $c_1 = \frac{5}{2}, \quad c_2 = -\frac{11}{6}$

该系统的全响应为

$$y(t) = \frac{5}{2} e^{-2t} - \frac{11}{6} e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{-t}, \quad t > 0$$

对于一个可以用低阶微分方程描述的系统,如果激励信号是直流、正弦或指数之类简单形式的函数,那么用经典法求解微分方程和分析线性系统是很方便的。但是,若激励信号是某种较为复杂的函数,特别是当系统须用高阶微分方程来描述时,利用经典法求解的工作将十分困难。并且,当激励信号或初始条件发生变化时,其微分方程须全部重新求解。经典法只是一种纯数学方法,它无法突出系统响应的物理概念。为了克服这些不足之处,人们找到了利用变换域的方法去求解微分方程并分析系统。早期对于较为复杂的系统的分析,几乎无一例外地采用后续章节将要讨论的拉普拉斯变换法。然而,应用拉普拉斯变换法以避免应用经典法时所遇到的困难,必须付出进行正反两次变换的代价。

系统的响应并不一定要划分为自然响应和受迫响应,也可以把它划分为零输入响应和零状态响应。零输入响应是系统在无输入激励的情况下,仅由初始条件引起的响应;零状态响应是系统在无初始储能或称为状态为零的情况下,仅由外加激励源引起的响应。根据叠加原理,在分别求得了这两个响应分量后再进行叠加,就可得系统的全响应。

在求零输入响应时,只要解出上述齐次方程并利用初始条件确定解中的待定系数。而在求零状态响应时,则需求解含有激励函数且初始条件为零的非齐次方程。对于复杂信号激励下的线性系统,为求解该系统的非齐次方程,除用直接解方程法和变换域法,还可以在时域中运用卷积法。卷积法是将信号分解成许多冲激响应之和,借助系统的冲激响应,将输入信号和冲激响应进行卷积积分,从而求解系统的零状态响应。对于线性非时变系统,无论是时域分析还是变换域分析,卷积运算都是重要的方法,它是联系时间域和变换域两种方法的纽带。使用卷积法的优点是物理概念明确、运算过程方便,因此,卷积法成为近代计算分析系统的工具之一。为了求系统的全响应,需要讨论在时域中求系统方程的零输入响应和利用卷积运算求系统的零状态响应的方法。

2.2 用算子符号表示微分方程

在连续系统时域分析方法中,求解的是一个高阶微分方程或一组联立微分方程。如果把经常出现的微分或积分用算子符号 p 表示,即

$$\frac{d}{dt} = p, \quad \frac{d^n}{dt^n} = p^n \quad (2-4)$$

$$\int_{-\infty}^t (\cdot) d\tau = \frac{1}{p} (\cdot) \quad (2-5)$$

则高阶微分方程(式(2-3))可表示为

$$\begin{aligned} p^n r(t) + a_{n-1} p^{n-1} r(t) + \cdots + a_1 p r(t) + a_0 r(t) \\ = b_m p^m e(t) + b_{m-1} p^{m-1} e(t) + \cdots + b_1 p e(t) + b_0 e(t) \end{aligned} \quad (2-6)$$

或简化为

$$(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0) r(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0) e(t) \quad (2-7)$$

若进一步令

$$\begin{aligned} D(p) &= p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 \\ N(p) &= b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0 \end{aligned}$$

分别表示为两个算子多项式,则式(2-7)可简化为

$$D(p)r(t) = N(p)e(t) \quad (2-8)$$

这是高阶微分方程的算子符号表示, $D(p)$ 和 $N(p)$ 算子多项式仅仅是一种运算符号,代数方程式中的运算规则有些适用于算子多项式,有些却不适用,基本规则有如下几点。

(1) 算子多项式可以进行因式分解,但不能进行公因子相消。

例如:

$$\begin{aligned} (p+3)(p+4)x &= \left(\frac{d}{dt} + 3\right) \left(\frac{d}{dt}x + 4x\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} + 4x\right) + 3 \left(\frac{dx}{dt} + 4x\right) \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} + 7 \frac{dx}{dt} + 12x = (p^2 + 7p + 12)x \end{aligned}$$

因此有

$$(p+3)(p+4) = p^2 + 7p + 12$$

如果把这一结论推广到一般情况,则由算子符号 p 的多项式所组成的运算符号可以像代数式

那样相乘和因式分解。

若

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

两边积分后有

$$x = y + c$$

其中 c 为积分常数。由此可见,对于算子方程

$$px = py$$

其左右两端的算子符号不能消去。推广到一般情况:对算子符号 p 的多项式组成的等式两端公因子不能随意消去。

(2) 算子的乘除顺序不可随意颠倒。

即

$$p \frac{1}{p} x \neq \frac{1}{p} px$$

因为

$$p \frac{1}{p} x = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x d\tau = x$$

而

$$\frac{1}{p} px = \int_{-\infty}^t \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=\tau} d\tau = x(t) - x(-\infty) \neq x$$

这表明“先乘后除”(先微分后积分)的算子运算不能相消,而“先除后乘”(先积分后微分)的算子运算可以相消,即有

$$p \frac{1}{p} = 1, \quad \frac{1}{p} p \neq 1$$

以上规则说明,代数量的运算规则对于算子符号一般可应用,只是在分子分母中或等式两端相同的算子符号,不能随便消去。

根据以上所述,式(2-8)可进一步写成

$$r(t) = \frac{N(p)}{D(p)} e(t) \quad (2-9)$$

式中: $D(p) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} p^{n-i}$, $N(p) = \sum_{j=0}^m b_{m-j} p^{m-j}$, 则定义 $\frac{N(p)}{D(p)}$ 为系统的转移算子 $H(p)$, 即

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (2-10)$$

因此,在时域中响应函数和激励函数之间的关系可以表示为

$$r(t) = H(p) e(t) \quad (2-11)$$

若把算子符号 p 看成代数量,则定义代数方程 $D(p) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} p^{n-i} = 0$ 为系统的特征方程。若特征方程的根均为不同的单根值,且记为 $-\lambda_i$,根据零输入响应的定义,求系统的零输入响应,即解齐次方程

$$D(p)r(t) = 0 \quad (2-12)$$

把此式写成因式相乘的形式为

$$(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)\cdots(p+\lambda_n)r(t)=0 \quad (2-13)$$

则该方程的解即系统的零输入响应,为

$$r(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{-\lambda_j t}, \quad t > 0 \quad (2-14)$$

其中, $-\lambda_j$ 为响应中的自由频率, c_j 是由初始条件确定的常数。设初始条件为 $t=0$ 时, $r(t)$ 及其 $n-1$ 阶的各阶导数值为 $r(0), r'(0), r''(0), \dots, r^{(n-1)}(0)$, 把这些初始值带入式(2-14)及其各阶导数式, 可得到由各 λ 值构成的系数矩阵, 即

$$\begin{bmatrix} r(0) \\ r'(0) \\ r''(0) \\ \vdots \\ r^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & \cdots & -\lambda_n \\ (-\lambda_1)^2 & (-\lambda_2)^2 & (-\lambda_3)^2 & \cdots & (-\lambda_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\lambda_1)^{n-1} & (-\lambda_2)^{n-1} & (-\lambda_3)^{n-1} & \cdots & (-\lambda_n)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

该矩阵称为范德蒙德矩阵。

如果特征方程 $D(p)=0$ 的根有重根, 那么求零输入响应方程的解是不同于式(2-14)所示的简单形式的。当特征方程中有 n 阶重根 $-\lambda$ 时, 即

$$(p+\lambda)^n=0 \quad (2-16)$$

则系统的零输入响应为

$$r(t) = \sum_{j=1}^n c_j t^{j-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \quad (2-17)$$

例 2-2 图 2-1 所示的 RLC 串联电路中, 设 $L=1 \text{ H}$, $C=1 \text{ F}$, $R=2 \Omega$ 。若激励电压源 $e(t)$ 为零, 且电路的初始条件为: ① $i(0)=0 \text{ A}$, $i'(0)=1 \text{ A/s}$; ② $i(0)=0 \text{ A}$, $u_C(0)=10 \text{ V}$ 。这里压降 u_C 的正方向设与电流 i 的正方向一致。分别求上述两种初始条件下电路的电流。

解 如图 2-1 所示, RLC 串联电路的微分方程为

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

将元件值代入, 已知 $e(t)=0$, 即求给定电路系统的零输入响应。将描述系统的微分方程写为

$$(p^2 + 2p + 1)i = 0$$

即

$$(p+1)^2 i = 0$$

对于特征方程 $(p+1)^2=0$, 有一为 $p=-1$ 的二重根。按照式(2-17), 零输入响应为

$$i(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, \quad t > 0$$

(1) 对 $i(t)$ 求导有

$$i'(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t}$$

将初始条件代入 $i(t)$ 和 $i'(t)$ 的表达式, 解得常数

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$$

故得零输入响应电流为

$$i(t) = t e^{-t}, \quad t > 0$$

(2) 当初始条件为 $i(0)=0 \text{ A}$ 和 $u_C(0)=10 \text{ V}$ 时, 由此可导出初始条件 $i'(0)$ 。电路的微分方程可由式(2-1)写成

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_C(t) = e(t)$$

代入元件值可得

$$i'(t) + 2i(t) + u_C(t) = 0$$

再令 $t=0$ 并代入初始值可得

$$i'(0) = -10 \text{ A/s}$$

则可由 $i(0)$ 和 $i'(0)$ 求得常数为

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -10$$

最后得零输入响应电流为

$$i(t) = -10te^{-t}, \quad t > 0$$

这里 $i(t)$ 为负值, 表示电容放电电流的实际方向和图示方向相反。

例 2-3 上题(例 2-2)中如将电路电阻改为 1Ω , 初始条件仍为 $i(0) = 0 \text{ A}$, $i'(0) = 1 \text{ A/s}$, 求零输入响应电流。

解 在此情况下, 系统的微分方程为

$$(p^2 + p + 1)i = 0$$

方程

$$p^2 + p + 1 = 0$$

即

$$\left(p + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

有一对共轭根

$$p = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由电路理论可知, 这属于欠阻尼的情况。按照式(2-14), 微分方程的解为

$$i(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

系数 c_1, c_2 可参考式(2-15)来求得, 即

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i(0) \\ i'(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(0) \\ i'(0) \end{bmatrix}$$

将 λ_1, λ_2 以及 $i(0)$ 和 $i'(0)$ 的值代入上式得

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{j}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{j}{\sqrt{3}} \\ \frac{j}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

于是得零输入响应电流为

$$i(t) = -\frac{j}{\sqrt{3}} e^{(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})t} + \frac{j}{\sqrt{3}} e^{(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})t} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad t > 0$$

2.3 冲激响应和零状态响应

冲激响应是指系统在单位冲激函数激励下引起的零状态响应, 统一以符号 $h(t)$ 表示。当系统的激励函数 $e(t)$ 为单位冲激函数 $\delta(t)$ 时, 响应函数 $r(t)$ 即为系统的冲激响应 $h(t)$, 于是有

$$h(t) = H(p)\delta(t) \quad (2-18)$$

即

$$h(t) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \delta(t) \quad (2-19)$$

对于一阶线性系统

$$\frac{dh(t)}{dt} + ah(t) = b\delta(t) \quad (2-20)$$

其转移算子为

$$H(p) = \frac{b}{p+a}$$

根据冲激响应是零状态响应,可知其响应为

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

同样,当 $t > \infty$ 时, $h(t) = 0$, 说明冲激响应的稳定性。当 $t > 0$ 时, 因 $\delta(t) = 0$, 式(2-20)成为齐次方程, 故有解

$$h(t) = Ke^{-at}, \quad t > 0$$

或写为

$$h(t) = Ke^{-at}\epsilon(t) \quad (2-21)$$

其中, $\epsilon(t)$ 为单位阶跃函数。显然 K 不可由初始条件为零来确定, 这是因为系统毕竟施加了一个冲激为 $\delta(t)$ 的激励, 为了确定系数 K , 需要将描述系统方程的解(式(2-21))代入式(2-20)来确定系数。故将式(2-21)代入微分方程(式(2-20))解得

$$K = b$$

即可确定系数 K , 从而得出一阶线性系统的冲激响应为

$$h(t) = be^{-at}\epsilon(t) \quad (2-22)$$

观察式(2-22)和式(2-20)对应的转移算子, 可以发现: 一阶系统的冲激响应, 可以方便地由其转移算子得到。

如对于二阶线性系统

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dh(t)}{dt} + a_0 h(t) = b_1 \frac{d\delta(t)}{dt} + b_0 \delta(t) \quad (2-23)$$

其转移算子为

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p}{p^2 + a_1 p + a_0} \quad (2-24)$$

如果特征方程的解为两个不同单根 $-\lambda_1, -\lambda_2$, 那么将转移算子写成分式和为

$$H(p) = \frac{K_1}{p + \lambda_1} + \frac{K_2}{p + \lambda_2} \quad (2-25)$$

其中 K_1, K_2 为常数。根据一阶系统冲激响应的求解, 得到该二阶系统的冲激响应为

$$h(t) = K_1 e^{-\lambda_1 t} \epsilon(t) + K_2 e^{-\lambda_2 t} \epsilon(t) \quad (2-26)$$

这与运用经典法求解微分方程(式(2-23))得到的结果是一样的。

一般情况下, 可得出如式(2-19)所示的 n 阶线性系统的冲激响应(其中 $n > m$, 且特征方程的根均为单根), 其转移算子为

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \quad (2-27)$$

将其分解为

$$H(p) = \frac{N(p)}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)\cdots(p+\lambda_n)} = \frac{K_1}{p+\lambda_1} + \frac{K_2}{p+\lambda_2} + \cdots + \frac{K_n}{p+\lambda_n} \quad (2-28)$$

则冲激响应为

$$h(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{-\lambda_i t} \epsilon(t) \quad (2-29)$$

其中 K_i 为系数,可由部分分式展开法求得,将式(2-28)两边乘 $p+\lambda_1$ 得

$$(p+\lambda_1)H(p) = K_1 + \frac{p+\lambda_1}{p+\lambda_2}K_2 + \cdots + \frac{p+\lambda_1}{p+\lambda_n}K_n \quad (2-30)$$

令式(2-30)中 $p=-\lambda_1$,等式的右边只剩下 K_1 项。因此

$$(p+\lambda_1)H(p)|_{p=-\lambda_1} = K_1$$

那么,一般情况下

$$K_i = (p+\lambda_i)H(p)|_{p=-\lambda_i} \quad (2-31)$$

上式称为海维赛德定理。

当系统微分方程转移算子对应特征方程出现重根时,如二重根,类如 $H(p) = \frac{p}{(p+\lambda)^2}$ 的形式,则根据海维赛德定理将其展开为

$$H(p) = \frac{p}{(p+\lambda)^2} = \frac{K_2}{(p+\lambda)^2} + \frac{K_1}{p+\lambda}$$

$$K_2 = (p+\lambda)^2 H(p)|_{p=-\lambda}$$

$$K_1 = \frac{d}{dp} (p+\lambda)^2 H(p)|_{p=-\lambda}$$

$$h(t) = K_1 e^{-\lambda t} \epsilon(t) + K_2 t e^{-\lambda t} \epsilon(t)$$

当特征方程中有 n 阶重根 $-\lambda$ 时,有

$$H(p) = \frac{p}{(p+\lambda)^n} = \frac{K_n}{(p+\lambda)^n} + \frac{K_{n-1}}{(p+\lambda)^{n-1}} + \cdots + \frac{K_1}{p+\lambda}$$

则

$$K_i = \frac{1}{(n-i)!} \frac{d^{n-i}}{dp^{n-i}} (p+\lambda)^n H(p)|_{p=-\lambda}$$

$$h(t) = \sum_{i=1}^n K_i t^{i-1} e^{-\lambda t} \epsilon(t)$$

冲激响应解的形式与零输入响应相似,只是在零输入响应中,各项系数 c_j 由初始条件确定,而这里各项系数 K_i 是转移算子展开为部分分式时的各系数。

在讨论这种相似性的原因之前,先介绍关于 $t=0$ 的几个概念。在系统分析中, $t=0$ 是指开始施加激励,即接通电路的瞬间。当激励源是奇异信号时,在电路接通的瞬间会发生电压或电流的突变,从而可能会导致系统储能状态的突变。在这种情况下,定义 $t=0^-$ 为施加激励前一瞬间的起始时刻,定义 $t=0^+$ 为刚刚施加激励后的起始时刻。相应地,各种初始量的值亦可以分别表示。例如,将代表初始状态的电感电流表示为 $i_L(0^-)$ 或 $i_L(0^+)$,将电容电压表示为 $u_C(0^-)$ 或 $u_C(0^+)$ 。这里 $t=0^-$ 时的值是激励施加前一瞬间的初始状态, $t=0^+$ 时的值是激励施加后一瞬间的初始状态,后者包括前者以及因施加激励而产生状态突变两部分的和。在没有突变状态时,两者相等。

现在,回到冲激响应和零输入响应解的相似性问题。零状态系统在输入冲激函数作为激

励信号时,该信号只在 $t=0$ 时刻存在。这时,系统在一瞬间输入了若干能量,储存在系统的元件里。这就相当于系统在 $t=0^+$ 时具有某种初始状态,在 $t>0$ 时,系统不再有输入信号,所以响应就由上述储能状态唯一确定。在 $t<0$ 时,冲激响应及其各阶导数的值均为零,即

$$h(0^-)=h'(0^-)=\cdots=h^{(n-1)}(0^-)=0$$

如果能确定 $t=0^+$ 时的初始条件,冲激响应可用求零输入响应的方法来求取。具体做法将在下面例2-5中说明。

冲激响应完全由系统本身的特性所决定,与系统的激励源无关,是用时间函数表示系统特性的一种常用方式。在实际工程中,用一个持续时间很短,但幅度很大的电压脉冲通过一个电阻给电容器充电,这时,电路中的电流或电容器两端的电压变化就近似于这个系统的冲激响应。同样,系统在单位阶跃函数激励下引起的零状态响应称为阶跃响应。利用阶跃函数与冲激函数之间的关系

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt}=\delta(t)$$

或

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \epsilon(t)$$

可看出,对于一个线性非时变系统而言,阶跃响应是冲激响应的积分。又因为当 $t<0$ 时,函数值均为零,考虑到在 $t=0$ 处可能有冲激响应或其导数存在,所以积分下限取 0^- ,那么阶跃响应为

$$r_{\epsilon}(t) = \int_{0^-}^t h(\tau) d\tau \quad (2-32)$$

由以上讨论可见,阶跃响应和冲激响应之间存在着简单的取导数或取积分的互求关系,两者中只要知道一个,就可以求另一个。上述关系当然不仅适用于阶跃响应和冲激响应的互求,它们同样可以用来求系统对其他奇异函数(如斜变函数和冲激偶函数等)的响应,但这些响应一般较少应用。

例 2-4 已知某线性非时变系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 5\frac{d}{dt}r(t) + 6r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + 4e(t), \quad t \geq 0$$

试求此系统的冲激响应。

解 当求系统的冲激响应时,上述方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 5\frac{d}{dt}h(t) + 6h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 4\delta(t)$$

转移算子为

$$H(p) = \frac{p+4}{p^2+5p+6}$$

此系统的特征方程的根为 $\lambda_1=-2, \lambda_2=-3$,则转移算子的部分分式展开为

$$H(p) = \frac{K_1}{p+2} + \frac{K_2}{p+3}$$

根据海维赛德定理求得

$$K_1 = (p+2)H(p) \Big|_{p=-2} = (p+2) \frac{p+4}{p^2+5p+6} \Big|_{p=-2} = 2$$