大学数学信息化教学丛书

高等数学

李书刚　主编

科学出版社

大学数学信息化教学丛书

高等数学

李书刚　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据编者多年来讲授高等数学课程的讲义编写而成，内容为函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程，数学实验等.

本书可作为高等数学教材，也可供考研复习使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李书刚主编. —北京：科学出版社，2017.6

(大学数学信息化教学丛书)

ISBN 978-7-03-053779-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 137501 号

责任编辑：高 嵘/责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2017 年 6 月第 一 版 印张：24 3/4

2017 年 6 月第一次印刷 字数：600 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书是为大学一年级学生学习微积分而编写的.内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,向量代数与空间解析几何,多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程,数学实验,共12章.

在书的编写中,编者充分考虑了高等数学教学的需要,以培养大学生的数学素养、数学思想方法及提高大学生的数学创新应用能力为目的,结合编者多年来教学经验与教改成果编写而成.增加了数学实验,对培养学生的动手能力十分有益.本书内容安排十分合理,便于自学,也可作为考研复习用书.

本教材的编写与出版得到了华中师范大学数学与统计学学院领导的亲切指导与大力支持,公共数学教研室的教师们积极参与了本教材的内容讨论与编写工作.具体执笔的是李书刚(负责第1～5章及第12章)、刘汉平(负责第6～8章)、方华强(负责第9～11章)、唐向阳(负责习题解答),全书由李书刚统稿.

由于编者水平有限,书中难免有缺点和错误,欢迎广大师生批评、指正.

编　者

2017年5月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续 …… 1
1.1　映射与函数 …… 1
1.2　数列的极限 …… 11
1.3　函数的极限 …… 16
1.4　无穷小与无穷大 …… 22
1.5　极限运算法则 …… 26
1.6　极限存在准则与两个重要极限 …… 32
1.7　无穷小的比较 …… 37
1.8　函数的连续性 …… 39
1.9　闭区间上连续函数的性质 …… 44
复习题 1 …… 47
第 2 章　导数与微分 …… 49
2.1　导数概念 …… 49
2.2　求导法则 …… 56
2.3　高阶导数 …… 64
2.4　隐函数与参数方程确定的函数的导数 …… 67
2.5　函数的微分 …… 73
复习题 2 …… 79
第 3 章　微分中值定理与导数的应用 …… 81
3.1　微分中值定理 …… 81
3.2　洛必达法则 …… 85
3.3　函数的单调性与极值 …… 90
3.4　曲线的凸凹性与拐点 …… 96
3.5　函数图像的描绘 …… 101
复习题 3 …… 106
第 4 章　不定积分 …… 108
4.1　不定积分的概念与性质 …… 108
4.2　换元积分法 …… 114
4.3　分部积分法 …… 122
4.4　有理函数的积分 …… 126
复习题 4 …… 132
第 5 章　定积分及其应用 …… 133
5.1　定积分的概念与性质 …… 133
5.2　微积分基本公式 …… 139
5.3　定积分的换元法和分部积分法 …… 143

5.4 反常积分 …… 150
5.5 定积分在几何学上的应用 …… 154
5.6 定积分在物理学上的应用 …… 162
复习题 5 …… 167
第 6 章 向量代数与空间解析几何 …… 169
6.1 向量及其线性运算 …… 169
6.2 数量积、向量积、混合积 …… 175
6.3 平面及其方程 …… 180
6.4 空间直线及其方程 …… 184
6.5 曲面及其方程 …… 187
6.6 空间曲线 …… 193
复习题 6 …… 197
第 7 章 多元函数微分法及其应用 …… 199
7.1 多元函数的基本概念 …… 199
7.2 偏导数 …… 203
7.3 全微分 …… 207
7.4 多元复合函数的求导法则 …… 210
7.5 隐函数的求导公式 …… 213
7.6 几何方面的应用 …… 218
7.7 多元函数的极值 …… 224
复习题 7 …… 230
第 8 章 重积分 …… 231
8.1 二重积分的概念和性质 …… 231
8.2 二重积分的计算法 …… 234
8.3 三重积分 …… 240
8.4 重积分的应用 …… 244
复习题 8 …… 247
第 9 章 曲线积分与曲面积分 …… 248
9.1 对弧长的曲线积分 …… 248
9.2 对坐标的曲线积分 …… 252
9.3 格林公式及其应用 …… 259
9.4 对面积的曲面积分 …… 263
9.5 对坐标的曲面积分 …… 267
9.6 高斯公式与斯托克斯公式 …… 273
复习题 9 …… 281
第 10 章 无穷级数 …… 282
10.1 常数项级数的概念及性质 …… 282
10.2 常数项级数的审敛法 …… 287
10.3 幂级数 …… 296

10.4 函数的幂级数展开 …… 303
10.5 傅里叶级数 …… 310
复习题 10 …… 317
第 11 章 微分方程 …… 318
11.1 微分方程的基本概念 …… 318
11.2 可分离变量的微分方程、齐次方程 …… 321
11.3 一阶线性微分方程 …… 325
11.4 可降阶的高阶微分方程 …… 328
11.5 线性微分方程解的结构 …… 332
11.6 二阶常系数齐次线性微分方程 …… 334
11.7 二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 338
复习题 11 …… 342
第 12 章 数学实验 …… 343
12.1 Mathematica 软件简介 …… 343
12.2 函数性态研究 …… 348
12.3 方程近似解 …… 351
12.4 圆周率 π 的计算 …… 353
12.5 级数的收敛与发散 …… 357
参考答案 …… 362
附录 积分表 …… 380

第1章　函数、极限与连续

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中事物之间普遍联系在数学中的反映，也是高等数学主要的研究对象. 函数关系反映了变量之间的依赖关系，而极限方法是研究变量和函数的一种基本方法. 因此，掌握函数概念和极限方法对于学好高等数学十分重要. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等高等数学的基本概念及它们的性质.

1.1　映射与函数

1.1.1　集合

1. 集合及其运算

集合是数学中的一个基本概念. 一般地，所谓**集合**是指具有某种特定性质的事物的总体，集合简称**集**. 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示集合. 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**，常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

例如，一间教室里的全体同学构成一个集合；26 个小写英文字母构成一个集合.

如果元素 a 是集合 A 的元素，则称 a **属于** A，记作 $a\in A$；如果元素 a 不是集合 A 的元素，则称 a **不属于** A，记作 $a\notin A$. 一个集合，若它只含有有限个元素，则称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**. 前面提到的 26 个英文小写字母的集合便是有限集，而全体自然数构成的集合就是一个无限集.

为了方便起见，把不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$. 例如，由方程 $x^2+1=0$ 的实根构成的集合就是一个空集.

表示集合的方法通常有以下两种：**列举法**和**描述法**. 列举法是把集合的全体元素一一列举出来，放在一对花括号内. 例如，用 A 表示由元素 a,b,c,d,e 构成的集合，则有

$$A=\{a,b,c,d,e\}.$$

描述法通过指明集合中元素具有的性质来表示集合. 若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$M=\{x \mid x\ 具有性质\ P\}.$$

例如，设集合 J 是一元二次方程 $x^2-5x+6=0$ 的根组成的集合，则可表

示为

$$J=\{x\mid x^2-5x+6=0\}.$$

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作$A=B$.

若 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$. 显然空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，也是任何非空集合的真子集.

习惯上，我们用 $\mathbf{N}$ 表示非负整数或自然数的集合，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合，$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合，$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合，$\mathbf{C}$ 表示全体复数的集合. 有时我们在表示数集的字母的右上角标上“ $*$ ”，表示该数集排除 0 元素的子集，标上“$+$”表示该数集排除 0 与负数的子集. 例如 $\mathbf{R}^*$ 为排除 0 的实数集，$\mathbf{R}^+$ 为全体正实数的集.

集合有三种基本运算，即并、交、差. 设 A,B 是两个集合，则集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\},$$
$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}$$

分别称为 A 和 B 的**并集**、**交集**、**差集**.

为了方便起见，我们往往把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为**全集**，并用 I 表示，把 $I\backslash A$ 特别称为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^c. 例如在实数范围内考虑问题，可以认为 $\mathbf{R}$ 就是全集，集合 $A=\{x\mid x\leqslant 0\}$ 的补集为 $\mathbf{R}^+$，即 $A^c=\mathbf{R}^+$.

根据集合相等的定义验证以下运算律成立：

交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿(Cartesian)乘积. 设 A,B 是任意的两个集合，则 A 与 B 的**直积**，记作 $A\times B$，定义为如下的有序对 (a,b) 组成的集合：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 平面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

2. 区间和邻域

区间和一点的邻域是常用的一类实数集.

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，实数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点. 实数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点. 类似地，

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

称为**半开半闭区间**. 这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度有限的线段，如图 1.1.1 所示.

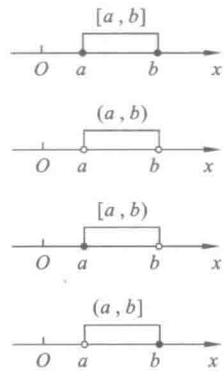

图 1.1.1

此外还有所谓**无限区间**. 引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},$$

$$(a,+\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\},$$

$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$$

及

$$(-\infty,+\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

最后一个无限区间其实就是全体实数集 $\mathbf{R}$，前面四个无限区间在数轴上的表示如图 1.1.2 所示.

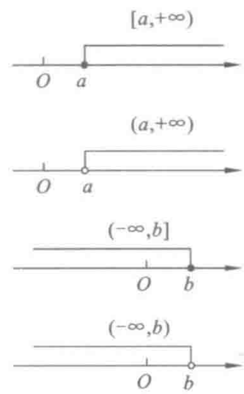

图 1.1.2

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，就简单地称之为"区间"，并且常用大写字母 I 表示.

邻域也是今后经常用到的实数集. 设 a 为任意实数，δ 为某个正的实数，集合

$$\{x \,\big|\, |x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \,\big|\, |x-a| < \delta\}$$

$$= \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

$$= (a-\delta,a+\delta).$$

点 a 称为这邻域的**中心**，δ 称为这邻域的**半径**，如图 1.1.3 所示，$U(a,\delta)$ 表示到点 a 的距离小于 δ 的 x 的全体.

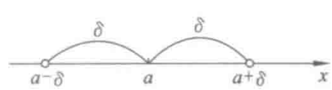

图 1.1.3

有时用到邻域时需要去掉中心 a，去掉 a 后的邻域称为点 a 的**去心邻域**，记作 $U(a,\delta)$. 即

$$U(a,\delta) = \{x \,\big|\, 0 < |x-a| < \delta\},$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

在不需要强调邻域半径的情况下，点 a 的邻域和去心邻域可分别记作 $U(a)$，$U(a)$.

1.1.2　映射

1. 映射的概念

定义 1.1.1　设 X，Y 是两个非空集合，若对于集合 X 中的每一个元

素 x,均可找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应,则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个**映射**. 记为

$$f: X \to Y.$$

其中,y 称为元素 x 在映射 f 下的**像**,并记作 $f(x)$,即

$$y = f(x) \quad 或者 \quad f: x \mapsto y,$$

而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个**原像**. 集合 X 称为映射 f 的**定义域**,记作 D_f,即 $D_f = X$. X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**,记作 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

正确掌握映射的定义必须注意映射构成的三个要素:非空集合 X,即定义域 $D_f = X$;集合 Y,即值域的范围 $R_f \subset Y$;对应法则 f,使每一个 $x \in X$,均有唯一确定的 R_f 中的元素与之对应. 虽然对每一个 $x \in X$,元素 x 的像 y 是唯一确定的,但对于每个 $y \in R_f$,元素 y 的原像不一定是唯一的.

例 1.1.1 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,对每个 $x \in \mathbf{R}$,$f(x) = x^2$. 显然,f 是一个映射,f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$,值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\}$,它是 $\mathbf{R}$ 的真子集. 对于 R_f 中的元素 y,除 $y=0$ 外,它的原像都不是唯一的. 例如,$y=1$ 的原像就有 $x=-1$ 和 $x=1$ 两个.

例 1.1.2 设 $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,$Y = \{a, b, c, d\}$,规定映射 $f: X \to Y$ 如下:

$$f(\alpha) = b, \quad f(\beta) = c, \quad f(\gamma) = d.$$

则 f 的定义域 $D_f = X$,$R_f = \{b, c, d\} \subset Y$.

例 1.1.3 设 $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,$Y = \{0, 1, 2, 3\}$,规定映射 $f: X \to Y$ 为 $y = |x|$,则 f 的值域 $R_f = Y$.

例 1.1.4 设 $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,$Y = [-1, 1]$,规定映射 $f: X \to Y$ 为 $y = \sin x$,则 f 的定义域 $D_f = X$,值域 $R_f = Y$.

定义 1.1.2 设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射,若 $R_f = Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称 f 为 **X 到 Y 上的映射**或**满射**;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$,它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 **X 到 Y 的单射**;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为**一一对应**或**双射**.

例 1.1.1 中的映射既不是满射又不是单射;例 1.1.3、例 1.1.4 中的映射是满射;例 1.1.2 和例 1.1.4 中的映射是单射;显然例 1.1.4 中的映射是一一对应.

映射在不同的场合有不同的惯用名称. 比如在泛函分析中映射常称为算子,从非空集 X 到数集 Y 的映射被称为 X 上的泛函. 在本书中称从实数集(或其非空子集)到实数集的映射为函数.

2. 逆映射与复合映射

设 $f: X \to Y$ 是单射,则由定义 1.1.2,对任一 $y \in R_f \subset Y$,它的原像 $x \in X$ 是唯一确定的,若规定

$$g: R_f \to X,$$

即

$$g(y) = x \quad \text{或者} \quad g: y \mapsto x.$$

那么由定义 1.1.1 可知 g 是 R_f 到 X 上的一个映射，称之为 f 的**逆映射**. 记作 f^{-1}，其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$，值域 $R_{f^{-1}} = X$.

显然，只要逆映射 f^{-1} 存在，那么它必然是 R_f 到 X 上的一一对应.

现设有如下两个映射

$$g: X \to U_1, \quad f: U_2 \to Y$$

其中，$U_1 \subset U_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个以 X 到 Y 的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)]$. 显然，这个法则确定了一个从 X 到 Y 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的**复合映射**. 记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g: X \to Y,$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \quad \text{或者} \quad f \circ g: x \mapsto f[g(x)].$$

由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是 g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域 D_f 内，即 $R_g \subset D_f$.

例 1.1.5　设映射 $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$g: x \mapsto u = \sin x,$$

映射 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$f: u \mapsto y = u^2 + 1.$$

显然 $R_g = [-1,1] \subset D_f = \mathbf{R}$，因此可以构成复合映射

$$f \circ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

即

$$f \circ g: x \mapsto y = \sin^2 x + 1.$$

1.1.3　函数

1. 函数的概念

定义 1.1.3　设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**，通常简记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f = D$.

上述定义中，对于每个 $x \in D$，按对应法则 f 总存在唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的**函数值**，记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

表示函数的主要方法有表格法、图形法、解析法(公式法)等. 其中用

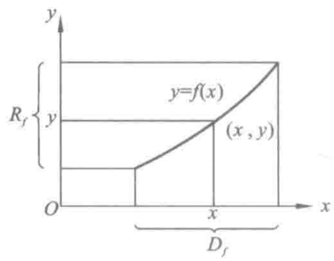

图 1.1.4

图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

称为函数 $y=f(x), x\in D_f$ 的图形，如图 1.1.4 所示.

下面举几个函数的例子.

例 1.1.6 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域为 **R**，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1.1.5所示.

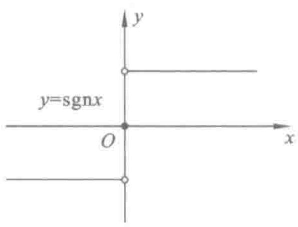

图 1.1.5

例 1.1.7 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$. 例如，$[1.25]=1$，$[-1.5]=-2$，$[\pi]=3$. 把 x 视为变量，则函数

$$y = [x]$$

的定义域为 **R**，值域为 $R_f=\mathbf{Z}$. 它的图形如图 1.1.6 所示. 这个函数常称为取整函数.

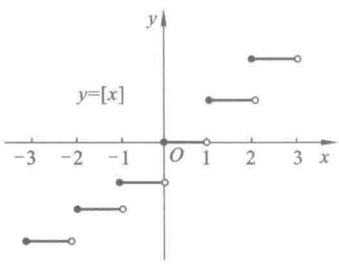

图 1.1.6

例 1.1.8 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y = d(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}. \end{cases}$$

该函数定义域为 **R**，值域为 $R_f=\{0,1\}$.

例 1.1.9 黎曼(Riemann)函数

$$y = r(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0,1 \text{ 或}(0,1) \text{ 内的无理数}, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x = \dfrac{p}{q}\left(\text{这里}\dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数}\right), \\ & \text{即 } x \text{ 为}(0,1) \text{ 内的有理数}. \end{cases}$$

该函数定义域为$[0,1]$，值域为$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，如图 1.1.7 所示.

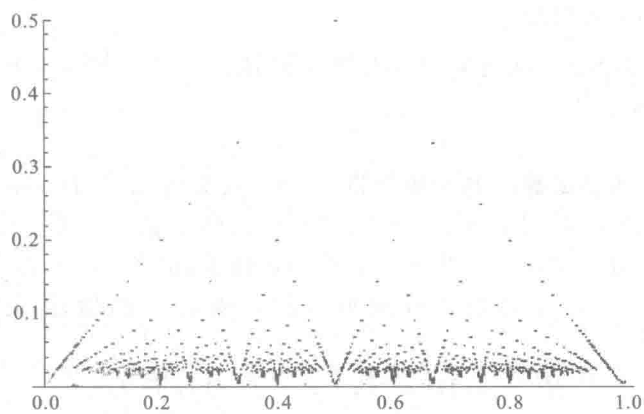

图 1.1.7

在实际问题中常常用几个式子来表示一个函数，即在函数定义域的不同部分用不同的式子加以表示，这种函数称为**分段函数**.

例 1.1.10　如图 1.1.8 所示，试将等腰梯形 $ABCD$ 中阴影部分的面积 S 表示成 x 的函数.

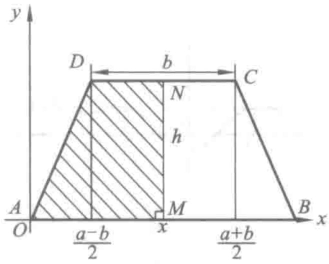

图 1.1.8

解　如图 1.1.8 建立直角坐标系，根据问题的实际意义，知函数 $S(x)$ 的自然定义域为 $0\leqslant x\leqslant a$，由题意，得

$$S=\begin{cases}\dfrac{hx^2}{a-b}, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{a-b}{2};\\ h\left(x-\dfrac{a-b}{4}\right), & \dfrac{a-b}{2}<x<\dfrac{a+b}{2};\\ h\left[\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{(a-x)^2}{a-b}\right], & \dfrac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

2. 函数的基本性态

(1) 函数的有界性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在数 K_1，使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2，使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界. 函数 $f(x)$ 在 X 上无界的充分必要条件是对于任意给定的正数 M，总存在 $x\in X$，使 $|f(x)|>M$.

例 1.1.11　函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，因为对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$|\sin x|\leqslant 1$；函数 $y=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上有下界 0，但无上界；函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内有上界 -1，但无下界；函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是无界的.

(2) 函数的单调性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 如图 1.1.9 所示，函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加，在区间 (b,c) 内单调减少.

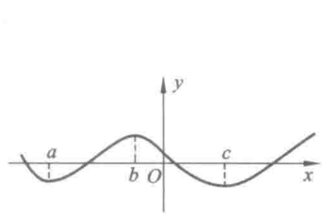

图 1.1.9

(3) 函数的奇偶性. 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意 $x\in D$，均有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对任意 $x\in D$，均有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$f(x)=x^2$ 为偶函数，$f(x)=\sin x$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称，如图 1.1.10所示.

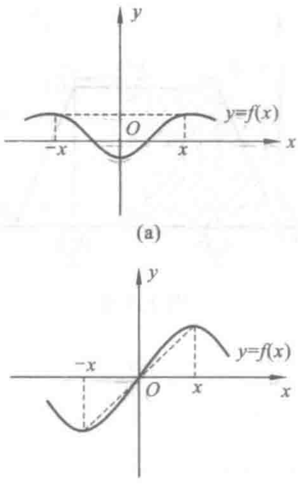

图 1.1.10

(4) 函数的周期性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l，使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，并且均有

$$f(x+l)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期函数，对于任意正整数 k，$2k\pi$ 均是它们的周期，2π 是它们的最小正周期. 而对于例 1.1.8 中的狄利克雷函数 $y=d(x)$，任何正有理数 r 都是它的周期，因此狄利克雷函数是周期函数. 但因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

3. 反函数与复合函数

作为逆映射的特例，引入以下反函数的概念.

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$，称此映射 f^{-1} 为 f 的反函数. 即对每个 $y\in f(D)$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，因此

$$f^{-1}(y)=x.$$

习惯上函数的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，于是反函数往往写成

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in f(D).$$

反函数 f^{-1} 的图形与直接函数 f 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的，如图 1.1.11 所示.

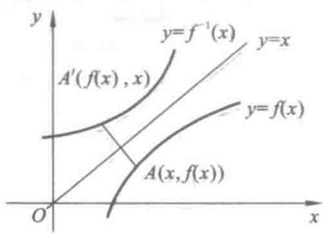

图 1.1.11

复合函数是复合映射的特例. 设函数 $y=f(u)$，$u\in D_f$；$u=g(x)$，$x\in D_g$，并且有 $R_g\subset D_f$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in D_g$$

称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

例如，函数 $g(x)=x^2+1$，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $R_g=[1,+\infty)$. 函数 $f(u)=\log_2 u$，$u\in D_f=(0,+\infty)$，因为 $R_g\subset D_f$，所以它们可以构成复合函数 $f\circ g$：

$$f[g(x)]=\log_2(x^2+1),\quad x\in\mathbf{R}.$$

又如，$y=f(u)=\sqrt{u}$ 的定义域为 $D_f=[0,+\infty)$，$u=g(x)=x^3$ 的值域为 $\mathbf{R}$，显然不满足条件 $R_g\subset D_f$，故 g 与 f 不能构成复合函数. 但是，如果将函数 g 限制在它的定义域的一个子集 $D=[0,+\infty)$ 上，就可以将 g 与 f 复合起来了. 这时只要把复合函数 $y=\sqrt{x^3}$ 的定义域理解成使式子本身成立的实数集合就行了. 这个实数集合常称为函数的自然定义域.

4. 函数的运算

设函数 $f(x)$,$g(x)$的定义域依次为 D_1,D_2,并且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$,则可以定义这两个函数的下列运算.

和(差)$f\pm g$: $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$, $x\in D$;

积 $f\cdot g$: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x\in D$;

商$\dfrac{f}{g}$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\in D\setminus\{x\mid g(x)=0,x\in D\}$.

例 1.1.12 设函数 $f(x)$的定义域为$(-l,l)$,证明必存在$(-l,l)$上的偶函数 $g(x)$及奇函数$h(x)$,使得

$$f(x)=g(x)+h(x).$$

证 先分析如下:假若这样的 $g(x)$,$h(x)$存在,使得

$$f(x)=g(x)+h(x),\tag{1.1.1}$$

并且

$$g(-x)=g(x),\quad h(-x)=-h(x),$$

于是有

$$f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x).\tag{1.1.2}$$

利用式(1.1.1)、(1.1.2),就可以求出 $g(x)$及 $h(x)$,于是可以作如下证明.

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

则

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

并且有

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$

$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-h(x).$$

这样就完成了证明.

5. 初等函数

在中学阶段我们已经学过以下几类函数:

幂函数 $y=x^{\mu}$ $(\mu\in\mathbf{R})$;

指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 并且 $a\neq1$);

对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$,并且 $a\neq1$);

三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 等;

反三角函数 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为**基本初等函数**.在今后常用到以无理数 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$,简记作 $y=\ln x$,这里 e 的值约为 2.718281828459045….

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合

步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**. 前面提到的复合函数

$$y = \log_2(x^2+1), \quad y = \sqrt{x^3},$$

以及函数

$$y = \sin^2 x, \quad y = 5x^3+2x-1$$

等都是初等函数. 本书中今后提到的函数有许多也都是初等函数.

习　题　1.1

1. 求下列函数值：

(1) $\operatorname{sgn}\pi$； (2) $\operatorname{sgn}(-\pi)$； (3) $\operatorname{sgn}(0)$；

(4) $[3.15]$； (5) $[-3.15]$； (6) $[-\sqrt{2}]$.

2. 证明：$|x| = x\operatorname{sgn}x$.

3. 求函数 $y=\tan(4\pi x+3)$ 的最小正周期.

4. 证明：$y=\operatorname{sgn}x$ 是奇函数.

5. 证明函数 $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\ln a$ 是奇函数.

6. 判断函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内是否有界，并说明理由.

7. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，试证明 $f(x)$ 在 D 上有界的充要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

8. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求复合函数对于给定自变量 x_1 和 x_2 的函数值.

(1) $y=u^2, u=\sin x, x_1=\dfrac{\pi}{6}, x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(2) $y=\sin u, u=3x, x_1=\dfrac{\pi}{9}, x_2=\dfrac{\pi}{6}$；

(3) $y=\sqrt{u}, u=x^2+1, x_1=1, x_2=2$；

(4) $y=\ln u, u=x^2, x_1=1, x_2=\sqrt{e}$.

9. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sin\sin x$； (2) $y=\lg(\ln x)$；

(3) $y=\arcsin(\ln x)$； (4) $y=\lg(\arcsin x)$；

(5) $y=\arccos e^x$； (6) $y=e^{\arccos x}$.

10. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$.

11. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+2}$； (2) $y=\dfrac{3-x}{2+x}$；

(3) $y=2\sin 3x \left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(4) $y=3-\ln(2x+1)$； (5) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

12. 指出下列函数中哪些是基本初等函数，哪些是初等函数.

(1) $y=\sin x$； (2) $y=3\times 5^x$；

(3) $y=4x^{\sqrt{2}}$； (4) $y=\operatorname{sgn}x$；