天津市自然科学学术著作
Tianjin Municipal Fund for Academic Publications
天津市科协资助出版

偏差分方程及其应用

张 广 徐 立 李新服
崔皓月 杜永强 王 颖 / 著

Partial Difference Equation and Its Application

科学出版社

天津市科协资助出版

偏差分方程及其应用

张 广 徐 立 李新服 崔皓月 杜永强 王 颖 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以作者及其研究团队多年的研究成果为主线，并结合合作者近年来取得的偏差分方程的理论和应用研究成果，以偏差分系统的正解和周期解的存在性、稳定性以及非线性代数系统解的存在性等方面为主要内容.

本书内容具有自封闭性，可以作为大学数学专业高年级学生和研究生以及相关研究者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

偏差分方程及其应用/张广等著. —北京：科学出版社，2018.6

ISBN 978-7-03-057671-2

Ⅰ. ①偏…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①差分方程-研究　Ⅳ. ①O241.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 121696 号

责任编辑：胡庆家 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张　伟 / 封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018 年 6 月第 一 版　开本：720×1000 B5
2018 年 6 月第一次印刷　印张：14 1/2
字数：280 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

近年来, 随着计算机运算性能的高速提升, 有关离散反应扩散方程或偏差分方程的研究成果层出不穷, 内容涉及生命科学、化学、物理学、力学、医学、通信、信号处理、图像处理、经济等众多领域, 该领域的理论成果也是硕果累累. 然而, 多数研究成果以研究论文为主, 国内外专门的著作并不多见.

本书的作者将以研究团队多年的研究成果为主线, 并结合合作者近年来专注于偏差分方程的理论和应用研究成果, 以偏差分系统的正解和周期解的存在性、稳定性以及非线性代数系统解的存在性等方面内容为主要题材完成本书. 本书力求内容的完整性与自封闭性, 然而偏差分系统的研究所涉及的领域很多, 一些学者的研究成果难以包含其中, 敬请谅解. 作者以所做工作抛砖引玉, 希望能激发更多研究者的研究兴趣, 使其在研究相关领域问题时, 能够从本书中得到一些启示, 此为本书之目的.

本书力求内容深入浅出, 理论与应用兼顾, 注重创新. 从本书的结构上看, 全书共九章, 可分为如下几部分: 第 1 章综述了偏差分系统研究的重要意义, 较为详细地介绍了作者所感兴趣前沿领域的研究现状和我们所做的工作. 第 2 章主要罗列了在作者研究中所需要的基本定义和定理及相关的线性算子谱理论. 第 3 章从模型构造入手, 提出要研究的问题, 从应用模型中提出了离散三点和多点边值问题, 并对其解的存在性给予了研究, 进而将众多应用问题的稳态方程归结为三类非线性代数系统, 所获得的结果既包含了很多特殊情况, 又改进了已有结论, 该内容为算子方程提供了一个实例. 第 4 章讨论了非线性离散椭圆方程解的存在性. 第 5 章中讨论了三类非线性代数系统解的存在性. 第 6 章对满足两分布规律的离散扩散模型给出定义, 对一些基本概念给出了明确的讨论, 建立了线性两分布模型的一些等价性结果. 第 7 章中定义了离散反应扩散模型行波解, 并给出了合理的物理解释, 理论上证明了行波解的表达形式, 对线性和非线性耦合映射格模型获得了一些精确行波解; 第 8 章讨论了同宿轨问题. 在第 9 章中主要考虑了离散系统的 Turing 不稳定的条件, 在 Turing 不稳定区域内可以找到有趣的斑图.

偏差分系统作为一门快速发展的学科, 所涉及的前沿研究领域非常丰富. 限于作者的研究兴趣和水平, 在书中难以全面反映学科前沿的研究全貌. 本书的出版也是一种尝试, 期待着不久的将来, 会有更全面的、更深刻的偏差分方程方面的著作出版.

湖南大学郭上江教授、长沙理工大学黄立宏教授、山西大学靳祯教授、大同大

学康淑瑰教授、天津大学李德生教授、兰州大学李万同教授、西北师范大学马如云教授、南开大学马世旺教授、杭州师范大学申建华教授、山东大学司建国教授、中南大学唐先华教授、中山大学王其如教授、北京师范大学袁荣教授、清华大学章梅荣教授、四川大学张伟年教授、台湾“清华大学”郑穗生教授、广州大学周展教授(注：按照姓氏字母排序) 抽出宝贵时间认真阅读了书稿, 并从科学性、结构和文字表述方面提出了许多非常有益的修改建议. 作者在从事偏差分方程的研究工作中, 得到了国家自然科学基金和天津商业大学应用数学重点学科的资助, 本书的出版得到了天津市自然科学学术著作出版基金 (TJSKX2017-XSZZ-03) 的支持; 本书在写作过程中, 得到了科学出版社尤其是胡庆家编辑热情而且细致的帮助, 在此一并表示感谢.

限于作者水平, 书中定有诸多不当之处, 望读者批评指正.

作　者

2017 年 8 月于天津

目 录

第 1 章 绪　论

1.1 概　述

自然科学、社会科学和工程技术 (如物理、化学、生物、经济、金融、电子、通信和控制) 等不同领域的大量实际问题都可以用反应扩散方程来描述. 有关反应扩散方程的建立, 可参见 Fife [1], Murray [2], Wu [3] 和叶其孝、李正元 [4] 的文献等. 众所周知, 对于大多数可用反应扩散方程来处理的应用问题, 稳态解的存在性及相关的控制问题是头等重要的事情. 目前对稳态解的存在性及多解性、稳定性等问题的研究, 国内外已经有了大量的工作, 相关的论文数以万计; 优秀的专著也不少, 如 Stakgold [5], Debnath 和 Mikusiński [6] 的著作等. 对反应扩散方程控制问题的研究也已发展得十分成熟, 感兴趣的读者可以参见 Lasiecka 和 Triggiani [7], Lions [8], Fursikov 和 Imanuvilov [9] 的文献等. 另外, 对行波解、同宿轨等问题的研究也举足轻重, 有关这方面的工作可参见文献 [10], [11] 等.

反应扩散方程是一类最具有代表性的发展方程, 此类方程主要用于描述线性和非线性系统的时空延伸演变过程. 由于系统是完全确定性的, 历史上, 对反应扩散方程的研究长期以来主要集中在稳态解的解析表达式、存在性及稳定性等方面. 但在很多实际问题中, 系统内部的非线性结构往往导致非常复杂的动力学行为, 从而使得人们很难在局部上准确描述系统的演化. 混沌的发现和吸引子概念的提出为我们提供了一个全新的从整体上把握系统复杂行为的途径, 也为反应扩散方程的研究开启了另一扇门. 人们可以通过研究吸引子的拓扑结构、空间维数等有效地了解系统的时空复杂性. 与此同时, 计算机的模拟实验研究已逐渐成熟并迅速发展为研究复杂动力系统的有效工具.

利用计算机辅助技术研究系统的动力学行为需要将原系统进行时间和空间的离散化. 主要的方法有三种: ① 将时间变量离散化; ② 将空间变量离散化; ③ 将时间和空间变量都离散化. 偏微分方程经空间变量离散化得到的常微分方程称为格微分方程, 而经时间和空间变量都离散化得到的模型则称为耦合映射格, 二者都是格动力系统的特殊形式. 格动力系统的严格数学研究起始于 Bunimovich 和 Sinai 1999 年的文章 [12], 此研究领域现已十分活跃, 模型涉及离散 Nagumo 方程、离散 Chafee-Infante 问题、离散 sine-Gordon 方程、离散 NLS 方程、半离散反应扩散方程、Allen-Cahn 问题等. 主要研究离散发展系统的时空复杂性, 如时空模

式、行波解、同宿轨道、符号动力系统、时空混沌等. 参见 Chow 等 [13]、Mallet-Paret [14~16]、Li 等 [17,18] 的文献.

1.1.1　离散反应扩散模型

至今所见关于耦合映射格动力系统的多数模型均为已知的偏微分方程经过离散化获得, 如文献 [12]~[18] 等. 这样一来, 在离散过程中必然会产生误差, 这由一般的计算数学方面的书籍所见. 请看文献 [19]~[23]. 因此, 本书的第 3 章受郑穗生教授专著 [24] 的启发将直接从模型入手, 建立耦合映射格动力系统模型或离散反应扩散方程, 有时也称为离散动力系统, 然后从中提出问题并给予解决. 要强调的是, 模型的建立纯属理论且仅从热扩散入手. 事实上, 从其他扩散问题入手也可以建立类似的模型, 如贸易问题、生物种群、神经网络、电子电路等 [24~34]. 所构造的一些模型尽管从形式上同反应扩散方程经过离散化所得模型类似, 但这里主要提供一种思路, 同时为问题给出一个合理的解释. 特别地, 从中可以知道所研究问题的目的性.

由于本书的研究直接从模型入手, 所以导致有些概念、问题和研究内容首次提出. 如离散三点边值问题、广义初边值问题、满足两分布规律的反应扩散问题等.

1.1.2　模型稳态解的存在性

反应扩散最终要进入稳态 (模型的极限状态, 一般与时间没有关系), 反应扩散偏微分方程平衡解的存在性, 特别是正解的存在性, 是偏微分方程和常微分方程研究的核心问题, 即所谓的边值问题. 请看 Stakgold [5], Debnath 和 Mikusinski [6] 及其相关参考文献.

近年来关于差分方程或偏差分方程的边值问题也得了大量的成果. 关于二阶差分方程边值问题解的存在性已经有大量的工作, 最早可追溯到 Sturm-Liouville, 请看 Kelley 和 Peterson 的专著 [34]. 二阶差分方程的边值问题可以看成是对应二阶常微分方程的离散形式, 参看文献 [19]~[23]. 研究者利用类似二阶常微分方程边值问题的研究方法解决了大量的问题, 也就是将边值问题通过构造 Green 函数转化为对应的和方程, 然后利用非线性泛函分析的知识达到求解的目的. 这方面的工作参看文献 [35]~[50]. 特征值问题参看文献 [37], [39], [41], [42], 解的存在唯一性参见文献 [35], 奇异边值问题参看文献 [37], [39], 多个正解的存在性参看文献 [45], [46] 等. 四阶差分方程的 Dirichlet 问题参见文献 [51], [52]. 另外, 偶数阶边值问题参看文献 [53]~[58]. 利用特征值方法、压缩映射原理和上下解技巧, 文献 [24], [35], [58]~[60] 研究了偏差分方程边值问题正解的存在性, 对应的连续模型参看文献 [61]~[63]. 二阶微分方程反周期解的存在问题已经有大量的研究工作 [64~67]. 作者在文献 [68] 中研究了对应离散模型的反周期解.

上述所研究的各式各样离散边值问题都可以划归为一类非线性代数方程系统来研究. 这类非线性代数系统的线性部分的系数矩阵是一个正定矩阵或者是可化为正定矩阵 [22]. 称这类非线性代数系统为第一类的. 另外, 此系统不只包含如上模型的稳态解情况, 也包含了复杂性神经网络的稳态解情况. 关于子网络为 Hopfield 网络的情形请参看文献 [69]~[76].

另外, 关于二阶微分方程周期解的存在性也有大量的研究工作 [77~80]. 文献 [81] 的作者通过利用山路引理 [82] 等理论研究了对应二阶差分方程非退化次调和解的存在性. 该工作是十分重要的, 它不仅确保了方程解的振动性 [25,31,32,39,83~85], 而且解是周期振动的. 经过研究发现这样的问题也可以划归为一类非线性代数系统. 这类系统的线性部分的系数矩阵是非负定的或者是可化为非负定矩阵 [22], 称其为第二类非线性代数系统, 它也包含了复杂性神经网络的稳态, 请参看文献 [69]~[76]. 特别地, 很多物理系统的稳态方程也满足该系统. 例如, 环上热扩散问题、四阶或偶数阶差分方程的周期边值问题, 物理上称作间隔系统的平衡方程问题, 请看参考文献 [86]~[88].

关于连续模型的三点边值问题或多点边值问题自从 20 世纪 80 年代以来已经得到广泛的研究, 例如, 可以参看文献 [89]~[97]. 然而, 关于差分方程的三点边值问题, 作者在文献 [98] 中给予了研究, 然而, 在文献 [98] 之前未见到任何结果. 非线性特征值问题与非线性边值问题也有待研究. 在这些问题的研究中, 将会用到文献 [99]~[106] 中的非线性泛函分析知识.

最后, Hammerstein 积分方程的离散形式 [89~97]、二阶 Dirichlet 问题 [19~50]、三阶边值问题 [107~109]、四阶差分方程的 Dirichlet 问题 [24,51,52,110]、偶数阶 Dirichlet 问题 [53~58]、偏差分方程边值问题 [24,35,58~60]、一阶差分方程周期解的存在性 [111~116]、动力系统的复杂性研究 [117~133] 等可以划归为一类新的非线性代数系统. 这样的系统非线性部分前有一个正的系数矩阵, 称其为第三类非线性代数系统.

通过上面分析, 我们发现有两大类问题值得研究. 三点或多点边值问题, 这方面研究将安排在第 3 章; 第 4 章讨论非线性离散椭圆方程解的存在性; 三类非线性代数系统将在第 5 章研究. 这里将会用到一些矩阵论的知识, 请看文献 [134], [135].

1.1.3 满足两分布规律的模型

脉冲在反应扩散模型中经常出现. 因此, 脉冲泛函微分方程或偏微分方程已经得到众多学者的关注, 请参考文献 [136]~[145]. 最近魏耿平等在文献 [146]~[150] 中研究了脉冲差分方程的振动性. 本书的第 6 章通过模型解释提出两分布扩散模型, 同时对其基本概念和解的一些性质给予了研究. 另外, 也从控制论的角度对其给予了解释.

1.1.4　离散模型的精确行波解

反应扩散方程理论行波解的主要研究方法有相平面技术 [4]、Conley 指标及相关的方法 [151~153]、度理论 [3,154]、奇异扰动方法 [155~158]、打靶法结合稳定流形及不稳定流形定理 [159~161]、单调迭代及上、下解方法和挤压方法 [162] 等.

精确解由于对物理背景解释的十分清楚, 寻找偏微分方程的精确解是相当重要的研究课题. 自从 1895 年 KdV 方程被提出以来, 在很多领域人们获得了大量的具有实际意义的非线性演化方程, 如 sine-Gordon 方程、复合 KdV-Burgers 方程、WBK 方程、Boussinesq 方程、BK 方程、DLW 方程、Kupershmidt 方程等. 许多数学家和物理学家对这些方程的精确解做了大量的工作, 所用的方法各有千秋, 但没有一种方法包罗万象. 一般来说, 直接寻找非线性演化方程的精确解是非常困难的事情. 研究者在研究精确解的同时也创立了许多方法, 如 Backlund 变换、Darboux 变换、Miura 变换、Cole-Hopf 变换、变量分离法、Poisson 法、Fourier 级数法、齐次平衡法、吴代数消元法等, 所获得的解有孤立解、周期解、有理解、Dromion 解、类孤子解、类多孤子解等. 请看夏铁成博士论文 [163] 及其参考文献.

然而, 当模型离散后精确行波解的结果较少. 当空间变量离散后, 偏微分方程变成微分格动力系统. 这方面有关行波解的理论研究工作近年来也受到数学家和物理学家的重视, 参看黄建华的博士学位论文 [164] 及其参考文献, 但未看到任何精确解结果. 当空间和时间变量全部离散后, 其理论结果也不多, 精确解结果见文献 [207], [208] 及所引文献. 因此, 本书的第 7 章将对离散模型行波解的定义给出合理的解释, 同时就一类线性方程和一类非线性方程的精确行波解给予了研究, 并利用隐函数定理, 研究了一类耦合映射格周期行波解的存在性.

1.1.5　同宿轨

同宿轨的研究始于 Poincaré [165], 证明了若稳定与不稳定流形横截相交, 则有无穷多个同宿轨存在. 由于这种轨道在许多非线性动力系统模型中被发现, 它们对整个系统的性质有着极大的影响 [166~168], 因而吸引了许多数学家的关注. 同宿轨的研究主要有反连续性原理 [169~171]、中心流形方法 [172]、Nehari 流形方法 [173]、变分方法 [174~177] 等. 在这些研究中, 正同宿轨的存在性研究较少, 唯一性研究就更少, 因此在 8.1 节研究一类出生率可正可负的离散 Logistic 模型的正同宿轨的存在性及唯一性. 变分法在同宿轨的存在性研究中已经起了重要的作用, 并不断改进与完善. 在这些研究中, 要么要求线性算子是正定的 [178,179], 要么要求非线性项满足 Ambrosetti-Rabinowitz 条件 [180,181] 或满足周期性假设 [182~184]. 在 8.2 节, 研究一类离散波动方程, 并不满足上述三个条件, 利用推广的环绕定理, 得到了同宿轨的存在性. 此外在利用变分法研究差分方程同宿轨时, 大多要求非线性项是正的,

文献 [185]~[189] 考虑了变号的情况. 在 8.3 节, 把文献 [189] 中的研究推广到了更一般的系统, 得到了同宿轨的存在性.

1.1.6 稳定性

众所周知, 非线性离散模型会产生强烈的复杂性. 微分方程经离散后的系统会产生强烈的复杂性, 著名的 Li-Yorke 定理 [121] 就是一个很典型的例子. Marotto [122] 将其扩展到了 n 维情形, 但遗憾的是定理的证明中有一些错误 [123]. 针对 Marotto 出现的错误, 最近几年人们试图给出更正 [123~125]. 最近, 史玉明与陈关荣分别在文献 [132] 和 [133] 讨论了完备距离空间和 Banach 空间上的混沌问题. 由文献 [133] 的观点, 可知系统存在一个扩张不动点是重要的, 而判别扩张则依赖于范数的选择; 另外, 选择合适的球半径也是十分重要的. 同时, 合适的范数与合适的球半径也是判别具体混沌现象的难点. 因此, 文献 [133] 仅仅给出了存在混沌行为的理论结果, 在众多的应用模型中还需要给出具体的判别. 另外, 动力系统的混沌行为可广泛应用于通信、保密、航天技术等领域, 问题是如何有效地利用混沌? 这是一个十分重要的课题 [117~131]. 然而, 直接研究偏微分方程离散形式的工作并不多见, 因此有关它的混沌行为、混沌控制与混沌反控制的研究是很有意义的. 本书仅仅针对离散反应扩散系统, 讨论其产生 Turing 分支的条件, 这一部分内容安排在第 9 章.

1.2 本书的结构

第 1 章综述了偏差分系统研究的重要意义, 较为详细地介绍了作者所感兴趣的前沿领域的研究现状及所做的工作.

第 2 章主要罗列了作者在研究中所需要的基本定义和定理、线性离散系统的基本概括及相关线性系统谱理论.

第 3 章通过热扩散问题建立了离散扩散模型, 合理地提出了要解决的问题. 通过利用非线性泛函分析知识, 讨论三点或多点边值问题正解的存在性.

第 4 章讨论了两类非线性离散椭圆方程边值问题解的存在性.

利用矩阵理论和非线性泛函分析知识, 在第 5 章考虑了三类非线性代数方程组解的存在性. 所获得的结果, 即使退化到它们的特殊情形, 结论不确定.

满足两分布规律的反应扩散问题将在第 6 章考虑, 这里特别要给出一些基本事实的论证.

在第 7 章将给出离散行波解的概念, 形象地解释了行波的物理意义. 同时, 就一类线性方程和一类非线性方程获得了精确周期行波解, 并利用隐函数定理, 研究了一类耦合映射格周期行波解的存在性.

第 8 章主要讨论离散系统 (正) 同宿轨的存在性问题.

第 9 章主要考虑离散反应扩散系统产生 Turing 不稳定的条件.

1.3　注　　记

毫无疑问, 一个离散反应扩散方程或系统是一个特殊的离散动力系统. 然而, 这方面的工作相对较少, 有待进一步完善, 如 Morse-Smale 性、不变流形、吸引子问题、双曲性和部分双曲性等. 不过, 这些问题极具挑战性, 有兴趣的读者可以结合本书的内容及相关文献提出自己的问题并给予研究. 这里仅仅给出一些相关文献, 如 [190]~[195].

第2章 预备知识

为方便读者阅读并顾及全书结构的完整性, 在本章介绍了一些基本定义和定理, 因而引用了很多专家学者的研究成果, 尤其是 S. S. Cheng 教授的工作.

2.1 定义与定理

2.1.1 记号与定义

一个实数集合, 将记为 $\mathbf{R}$; 而 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实数空间; $\mathbf{R}^+$ 表示所有非负实数; $\mathbf{Z}^+$ 表示所有正整数构成的集合; 而所有正整数集合将用字母 $\mathbf{N}$ 表示; 对于一个整数, 将利用小写字母 t, s, k, i, j, n, m 等表示; 对于整数集合 $\{k, k+1, \cdots, s\}$ 将被记为 $[k, s]$; 对于一个有限维或无限维的列向量, 将采用 u, v, x, y 等字母; u^t, v^t, x^t, y^t 等将表示依赖于时间 t 的向量; 而大写字母 A, B, C, D 等一般表示矩阵, 有时候为了反映其中的元素或阶数也表示成 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{n\times n}$; 字母 T 表示转置; 一个算子一般利用 T, S 等表示; 字母 E, X 等一般表示 Banach 空间; P, Q, K 等一般表示 Banach 空间上的一个锥; Ω 表示 Banach 空间中的一个开集; 而 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界; $\overline{\Omega}$ 表示 Ω 所对应的闭集; 小写字母 a, b, c, d 或者 α, β, γ 等一般表示 $\mathbf{R}$ 上的实数; 一个向量空间或 Banach 空间的零元素, 记为 0.

定义 2.1.1 设 $S \subset l^\infty$, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个自然数 $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\varepsilon)$, 使得对任意的 $i, j \geqslant \mathbf{N}(\varepsilon)$, $x = \{x_n\} \in S$ 均有 $|x_i - x_j| < \varepsilon$, 则称序列 S 是 Cauchy 一致的.

定义 2.1.2 称一个 Banach 空间 X 是偏序的, 如果 X 含有一个其内部是非空的锥 K, X 中的序定义如下: $x \leqslant y$ 当且仅当 $x - y \in K$.

定义 2.1.3 设 M 是偏序 Banach 空间 X 的一个子集. 令

$$\overline{M} = \{x \in X : y \leqslant x, y \in M\},$$

如果 $x_0 \in \overline{M}$ 且对每个 $x \in \overline{M}$ 有 $x_0 \leqslant x$, 则称 x_0 是 $\overline{M}$ 的下界. $\overline{M}$ 的上界定义类似.

定义 2.1.4 设 E 是一个实 Banach 空间, $P \subset E$ 是一个非空凸闭集, 并且满足下面两个条件:

(1) $x \in P, \lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \in P$;

(2) $x\in P, -x\in P\Rightarrow x=0$,
则称 P 是 E 的一个锥.

定义 2.1.5 设 E_1 和 E_2 是两个 Banach 空间, $D\subset E_1$. 若算子 $T:D\to E_2$ 是连续的, 而且又是紧的, 则称 T 是映 D 入 E_2 的全连续算子.

定义 2.1.6 设 P 是 E 的一个锥, 定义在 P 上的一个连续泛函 $\varphi:P\to\mathbf{R}^+$, 如果对任意的 $x,y\in P$ 和 $t\in[0,1]$ 满足条件 $\varphi(tx+(1-t)y)\geqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$, 将被称作凹泛函. 类似地, 如果不等式方向相反, 将被称作凸泛函.

定义 2.1.7 一个 n 维向量的每个分量是正的, 称其为正的; 负向量可类似定义. 当一个向量的某个分量非零时, 称其为非零向量. 如果它们是一个方程的解, 将其分别称为正解、负解和非零解.

2.1.2 基本原理

定理 2.1.1 (离散情形的中值定理) 假设 u_n 定义在 $N(a,b)$ 上, 那么, 存在一个 $c\in N(a+1,b-1)$, 使得

$$\Delta u_c\leqslant\frac{u_b-u_a}{b-a}\leqslant\Delta u_{c-1},$$

或

$$\Delta u_{c-1}\leqslant\frac{u_b-u_a}{b-a}\leqslant\Delta u_c.$$

定理 2.1.2 (离散情形的乘法公式) 令 u_n 及 v_n 定义在 $N(a)$ 上, 则对所有的 $n\in N(a)$, 有

$$\Delta(u_nv_n)=u_{n+1}\Delta v_n+\Delta u_nv_n=\Delta u_nv_{n+1}+\Delta v_nu_n,$$

且

$$\sum_{i=a}^{n-1}u_i\Delta v_i=u_iv_i|_{i=a}^{n}-\sum_{i=a}^{n-1}\Delta u_iv_{i+1}.$$

定理 2.1.3 (离散的 L′ Hospital 法则) 令 u_n 及 v_n 定义在 $N(a)$ 上, 则对任意大的 $n\in N(a)$, 有 $v_k>0$, $\Delta v_k>0$, 若 $\lim\limits_{k\to\infty}v_k=\infty$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\Delta u_k}{\Delta v_k}=c$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{u_k}{v_k}=c$.

定理 2.1.4 (离散的 Kneser 定理) 令 u_n 定义在 $\mathbf{N}$ 上, u_n 和 $\Delta^m u_n$ 是定号的, 且在 $\mathbf{N}$ 中的任意子集 $\{n_1,n_1+1,\cdots\}$ 上, $\Delta^m u_n$ 不恒为 0. 若 $u_n\Delta^m u_n\leqslant 0$, 则存在一个数 $m^*\in\{0,1,\cdots,m-1\}$ 满足 $(-1)^{m-m^*}=1$, 使得

$$u_n\Delta^j u_n>0,\quad j=0,1,2,\cdots,m^*,n\geqslant n_2\geqslant n_1,$$