普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材
2014年全国高等农业院校优秀教材

XIANXING DAISHU

线性代数

吕 雄 主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

线 性 代 数

吕　雄　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 吕雄主编 . —北京：中国农业出版社，
2011.7（2017.7 重印）
全国高等农林院校“十二五”规划教材
ISBN 978 - 7 - 109 - 15720 - 0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①线性代数-高等学校-
教材 Ⅳ.①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 104523 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
责任编辑 朱 雷 魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2011 年 7 月第 1 版 2017 年 7 月北京第 7 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16 印张：11.5
字数：201 千字
定价：24.00 元

内 容 提 要

本教材是全国高等农林院校“十二五”规划教材，内容为：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。每章后均配有习题及综合习题，以巩固所学内容。书末附有习题答案与提示。

本教材体系完整，结构严谨，由浅入深，循序渐进，通俗易懂；紧密联系实际应用，可作为高等学校非数学专业线性代数课程的适用教材或教学参考书，也可作为科技人员的参考书。

编写人员

主　编　吕　雄

副主编　吴国荣　王振寰

编　者　（按姓名笔画排序）

王振寰　李月鲜　吕　雄　刘菊红

刘媛媛　吴国荣　郭立威

前　言

本教材是全国高等农林院校“十二五”规划教材。

本教材按照高等学校线性代数课程的教学大纲(并参考考研大纲)编写而成。本教材包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等知识。本教材各章节选编了较为丰富的习题，书末附有习题答案。为了更好地帮助学生学习，与本教材配套编写了学习指导书。

本教材可作为高等学校非数学专业线性代数课程的适用教材或教学参考书。

在编写过程中，在内容的安排上我们主要基于下述几点：

1. 着力保持体系的完整性　编排结构严谨；内容由浅入深、循序渐进、通俗易懂；突出线性代数的基本思想和方法。使学生能够较好地理解各章节的内在联系，从总体上把握数学的思想方法的同时，培养学生严密的逻辑思维能力。

2. 力求简明实用　由于线性代数是数学的一个分支，逻辑性强、内容抽象、概念与结论较多，因此在给出概念时尽量以简单实例或提出问题的方法引入，力求深入浅出、简单通俗；略去一些十分繁琐的理论证明，直接从现实世界的原理中加以解释说明，使表达简明扼要；引导学生理解概念的内涵及背景，培养学生用数学的

思想、方法分析问题和解决问题的能力。

3. 结合实际应用 紧密联系实际，尽可能运用各章节的理论与方法处理一些现实生活中的问题，为学生学习后继课程提供“契合点”。

参加本教材编写工作的有吕雄、吴国荣、王振寰、李月鲜、刘菊红、刘媛媛、郭立威等，都是具有丰富教学经验的一线教师，本教材的组织编写，编写大纲、编写细则与要求的拟定及统稿等均由吕雄完成。

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编 者

2011 年 3 月

目　录

第一章 行列式

行列式是一个重要概念，它是在研究线性方程组的求解过程中产生的．它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是一种常用的计算工具．本章主要介绍行列式的定义、性质及计算方法．

第一节 行列式的概念

一、二阶和三阶行列式

行列式的概念起源于解线性方程组，因此我们首先讨论解方程组的问题．

用消元法解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去 x_2，用 a_{22} 和 $-a_{12}$ 分别乘第 1 个和第 2 个方程的两边，然后相加，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

同理，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

为了便于记忆和应用方便，我们引进新的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

称 D 为**二阶行列式**．它含有两行两列，横排叫做**行**，纵排叫做**列**．组成行列式的数用 a_{ij} 表示，称为行列式 D 的第 i 行第 j 列**元素**．同时 D 也称为方程组(1)的**系数行列式**．

二阶行列式的定义式(3)可用**对角线法则**来记忆．将行列式的左上角元素

a_{11}到右下角元素a_{22}的连线称为行列式的**主对角线**；而右上角元素a_{12}到左下角元素a_{21}的连线称为行列式的**副对角线**．于是二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积．

根据定义式(3)，容易得知，方程组的解中的两个分子可分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

显然$D_i(i=1, 2)$即为D中的第i列元素换成方程组的常数项b_1，b_2所得的行列式.

则当$D\neq 0$时，二元线性方程组的解可以唯一地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

此为求解二元线性方程组的**克莱姆**(Cramer)**法则**．

例 1 用二阶行列式求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-3x_2=5, \\ 2x_1+x_2=3. \end{cases}$$

解 由于$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0$，且

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=14,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-7,$$

因此，方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

作类似的讨论，我们引入**三阶行列式**的概念，并定义其值为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \end{aligned} \tag{6}$$

也称D为线性方程组(5)的**系数行列式**．再用线性方程组(5)的常数项b_1，b_2，

b_3 替换 D 中的第 $i(i=1,\ 2,\ 3)$ 列所得到的三阶行列式记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则当 $D\neq 0$ 时，三元线性方程组的解可以唯一地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{7}$$

此为求解三元线性方程组的**克莱姆**(Cramer)**法则**.

三阶行列式的值也可用**对角线法则**来帮助记忆. 如图 1-1 所示，其中每条实线(主对角线及平行于主对角线方向)上的三个元素的乘积带正号，每条虚线(副对角线及平行于副对角线方向)上的三个元素的乘积带负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的值.

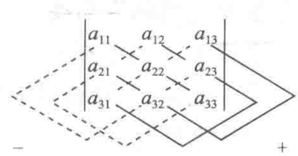

图 1-1

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 $D=2\times1\times1+3\times2\times1+(-1)\times(-2)\times1-$
$1\times1\times1-3\times(-1)\times1-2\times(-2)\times2$
$=20.$

二、排列的逆序数与奇偶性

作为定义 n 阶行列式的准备，我们先来讨论一下排列的性质.

定义 1　由自然数 1，2，…，n **组成的一个有序数组称为一个** n **级排列，记为** $i_1i_2\cdots i_n$.

例如，3241 是一个 4 级排列，53142 是一个 5 级排列. 显然，n 级排列共有 $n!$ 个. 其中，排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列**.

定义 2　在一个 n **级排列** $i_1i_2\cdots i_n$ **中，若一个较大的数排在一个较小的数前面，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记为** $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

由定义 2 可知，任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为：

$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数$+i_3$ 前面比 i_3 大的数的个数$+\cdots+$ i_n 前面比i_n 大的数的个数.

例如，在 4 级排列 3241 中，21，31，41，32 各构成一个逆序数，所以排列 3241 的逆序数 $\tau(3241)=4$. 同样可计算排列 53142 的逆序数 $\tau(53142)=7$.

容易看出，自然排列的逆序数为 0.

定义 3　逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，排列 3241 是偶排列，排列 53142 是奇排列. 自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列.

定义 4　在一个 n 级排列中，如果其中某两个数 i，j 互换位置，而其余的数不动，就得到一个新的排列，这样的变换称为一次对换，记为 (i, j). 相邻两个数的对换称为邻换.

定理 1　一次对换改变排列的奇偶性.

证　先证一个特殊的情形，一次邻换改变排列的奇偶性.

设 n 级排列为 $\cdots ij\cdots$，将相邻两个数 i，j 对换，得到一个新的排列 $\cdots ji\cdots$. 由于除 i，j 之外其余的数不动，所以其余数之间的逆序没有变化.

若 $i>j$，则新排列的逆序数比原排列减少 1；若 $i<j$，则新排列的逆序数比原排列增加 1，所以一次邻换改变排列的奇偶性.

再证一般的情形.

设 n 级排列为 $\cdots ia_1a_2\cdots a_mj\cdots$，要实现 i，j 的对换，得到新的排列 $\cdots ja_1a_2\cdots a_mi\cdots$，可先将 i 与 a_1 对换，再把 i 与 a_2 对换，…，这样，经过 $m+1$ 次邻换，得到排列 $\cdots a_1a_2\cdots a_mji\cdots$；同理，再把 j 对换到 a_1 之前，需要经过 m 次邻换. 这样，共经过 $2m+1$ 次邻换，完成了 i 与 j 的对换. $2m+1$ 是奇数，所以新排列与原排列的奇偶性不同.

定理 2　当 $n\geqslant 2$ 时，在所有的 n 级排列中，奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证　设所有的 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个. 对这 p 个奇排列施行同一个对换 (i, j)，则由定理 1 可知，p 个奇排列全部变成偶排列，由于偶排列一共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理，将全部的偶排列施以同一对换 (i, j)，则 q 个偶排列全部变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$. 因此，$p=q$，即奇排列与偶排列的个数相等. 又由于 n 级排列共有 $n!$ 个，所以有 $p=q=\frac{n!}{2}$.

定理 3　奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

由定理 1 可知，一次对换改变排列的奇偶性. 因为 $12\cdots n$ 是偶排列，所以

若排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是奇(偶)排列，则必须经奇(偶)数次对换才能变成自然排列.

三、n 阶行列式

本节依据二、三阶行列式的结构规律，来定义 n 阶行列式.

以三阶行列式为例

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由三阶行列式的展开式可得如下规律：

(1) 三阶行列式的每一项都是位于不同行不同列的 3 个元素的乘积；

(2) 三阶行列式是 3! 项的代数和；

(3) 每一项的符号是：当这一项元素的行指标按自然排列时，如果元素的列指标为偶排列，则取正号；如果元素的列指标为奇排列，则取负号.

作为二、三阶行列式的推广，给出 n 阶行列式的定义.

定义 5 符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

称为 n 阶行列式. 它是 n! 项的代数和，这些项是一切可能的取自不同行与不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$. 项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}$，也就是说，当 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是偶排列时，这一项的符号为正，当 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是奇排列时，这一项的符号为负，即

$$D=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}. \tag{9}$$

特别地，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|$ 就是数 a.

例 3 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解 根据定义 5，D 是一个 4! $=24$ 项的代数和. 每一项都是位于 D 的不同行不同列的 4 个元素的乘积，然而在这个行列式里，除了 $acfh$，$adeh$，

$bdeg$，$bcfg$ 这四项外，其余的项都至少含有一个因子 0，因而等于 0. 与上面四项对应的排列依次为 1234，1324，4321，4231，其中第 1 个和第 3 个是偶排列，第 2 个和第 4 个是奇排列. 因此

$$D=acfh-adeh+bdeg-bcfg.$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1, 2, \cdots, n)$.

该行列式主对角线下方的元素全为零，称为**上三角行列式**（主对角线上方的元素全为零，称为**下三角行列式**）.

解 由 n 阶行列式的定义，应有 $n!$ 项，但由于 D 中许多元素为零，只考虑行列式的非零项即可. 项的一般形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零，从而 $j_n=n$. 在第 $n-1$ 行中，除去 $a_{n-1,n-1}$ 与 $a_{n-1,n}$ 外，其余的元素全为零，故 $j_{n-1}=n-1$ 或 $j_{n-1}=n$，但由于 $j_{n-1}\neq j_n$，所以 $j_{n-1}=n-1$. 这样逐步递推下去，不难看出，在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项不等于零，而这一项的列指标所组成的排列的逆序数是 $\tau(12\cdots n)=0$，故取正号. 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即上三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积. 同理可求得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，主对角线以外元素全为零的行列式，称为**对角行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，可以定义关于副对角线的**对角行列式**及**三角行列式**. 利用行列式的定义，关于副对角线的**对角行列式**及**上、下三角行列式**，有如下结论：

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

在 n 阶行列式中，为了便于决定每一项的正负号，我们把 n 个元素的行指标排成自然排列，即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 事实上，数的乘法是满足交换律的，因此这 n 个元素的次序是可以任意排布的.

例如，若 n 阶行列式的一般项写成 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$，则

$$D=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}. \tag{10}$$

若 n 阶行列式的一般项写成 $a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}$，则

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}, \tag{11}$$

其中 $i_1 i_2\cdots i_n$ 和 $j_1 j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列. 在此 $\sum$ 表示对所有的 n 级排列的行指标 $i_1 i_2\cdots i_n$(或对所有的 n 级排列的列指标 $j_1 j_2\cdots j_n$)求和.

第二节 行列式的性质

当行列式的阶数 n 较大时，直接根据定义来计算行列式是较为繁琐的. 本节介绍行列式的一些性质，以此简化行列式的计算.

首先引入转置行列式的概念.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$