高等数学教材丛书

概率统计

张发秦 黄嘉 编著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等数学教学丛书

概率统计

张发秦　黄　嘉　编著

中国科学技术出版社

·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

概率统计/张发秦，黄嘉编著. —北京：中国科学技术出版社，2018.5
ISBN 978-7-5046-7871-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张… ②黄… Ⅲ.①概率统计—高等学校—教材
Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 317484 号

责任编辑 王晓义 王晓平
封面设计 孙雪骊
责任校对 杨京华
责任印制 张建农

出　　版 中国科学技术出版社
发　　行 中国科学技术出版社发行部
地　　址 北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮　　编 100081
发行电话 010-62173865
传　　真 010-62173081
投稿电话 010-63581202
网　　址 http://www.cspbooks.com.cn

开　　本 720mm×1000mm 1/16
字　　数 390 千字
印　　张 19.75
版　　次 2018 年 5 月第 1 版
印　　次 2018 年 5 月第 1 次印刷
印　　刷 北京虎彩文化传播有限公司

书　　号 ISBN 978-7-5046-7871-3/O·195
定　　价 48.00 元

《高等数学教材丛书》出版说明

为了适应21世纪我国高等教育，特别是理工科大学本科及独立学院的发展，在中国科学院数学研究所研究员、生物数学家、福建师范大学闽南科技学院名誉院长陈兰荪教授的主持下，由张发秦教授和黄嘉教授执笔，根据在闽南科技学院十多年的教学实践，编写了这套《高等数学教材丛书》.

这套教材的主要特点是秉承分层教学理念编写，以便好学、好教、好考试. 一方面，简明直接地阐述最基本内容，让大多数非数学专业的学生掌握最基础的数学知识，让老师好教，让学生好学；另一方面，为保证大学教育的公正性，书中带*号内容，提供给学有余力、愿意深入学习的学生，并为给初为人师的青年教师备课提供方便，亦为了增加知识的完整性、系统性与严谨性，编写中还在附录里对一些困难的章节做了一些添加. 希望通过精讲精练的方式，把高等数学更明白地展现给普通人，展现给未来需要数学工具和方法的人，而不只是数学工作者.

这套书每章的最后一节综合训练都应该在全书学完后，再做进一步学习. 另外，它还可以作为非数学专业报考研究生的复习资料.

作者水平有限，不妥之处，欢迎读者批评指正.

希望我们的这项工作能为理工科大学及独立学院的发展做出有益的贡献.

该教材的出版得到了西北师范大学数学优势学科建设经费的资助，特此表示感谢！

目录

第1章 随机事件与概率

§1.1 随机事件

(一) 随机现象

概率统计是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科. 目前渗透到各个方面的大数据分析，均是以概率统计为基础的. 概率统计通过大量的观察与试验，得到随机现象所呈现出固有统计规律，认识并运用这些规律促进各行业的发展.

我们所生活的这个世界是丰富多彩的，当然也是复杂的，有一大类非确定型的现象：在同样条件下，有两种以上的结果，而事先不能确定哪一种结果发生. 这种宏观上、整体上有规律性；微观上、个体上有偶然性的现象，我们称为随机现象（不确定型现象）.

(二) 随机试验

满足以下3个条件的试验称为随机试验.

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验的所有结果是明确的，且不止1个；

(3) 每次试验总是恰好出现所有可能结果中的1个，但试验之前不能确定出现哪一个结果.

用字母 E（大写）表示随机试验，例如，

E_1：掷1枚均匀的骰子，观察出现的点数.

E_2：将1枚硬币，连掷两次，观察出现正反面的情况.

E_3：某射手向同一目标射击10次，命中的次数.

E_4：某地区8月份的降雨量.

(三) 样本空间与样本点

样本空间：随机试验 E 的所有可能结果的全体形成的集合，称为样本空间 Ω.

样本点：随机试验 E 的每一个可能结果，也就是 Ω 中的元素，称为样本点 ω_i.

集合形式的表示为 $\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$

与上述随机试验对应的样本空间：

$\Omega_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega_2=\{$（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）$\}$

$\Omega_3=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\Omega_4=\{x \mid x\geqslant 0$，$x$ 表示降雨量$\}$

（四）随机事件

样本空间 Ω 的子集（随机试验某些可能结果）称为随机事件，简称为事件.

仅含一个样本点的事件 $\{\omega_i\}$（不能再分解）的单点子集称为基本事件，例如试验 E_1，有 6 个基本事件：$\{1\}$，…，$\{6\}$.

样本空间 Ω 含所有样本点，也是自身的子集，每次试验它总是发生的，称 Ω 为必然事件.

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是 Ω 的子集，每次试验中都不能发生，$\varnothing$ 称为不可能事件.

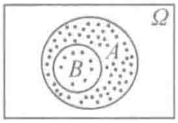
在 E_1 中的事件 A（掷出骰子点数为奇数），即 $A=\{1, 3, 5\}$

（五）随机事件的关系与运算

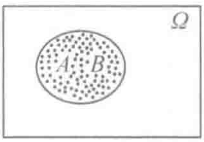
对随机事件我们用集合来表示，这就为运算与事件之间关系的表述做好准备.

（1）包含

$B\subset A$：B 发生必然导致 A 已经发生（B 包含于 A 或称 A 包含 B）

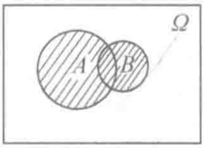


若 $B\subset A$ 且 $A\subset B$，则称 $A=B$（包含的基本事件完全相同）；



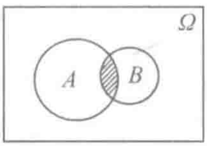
（2）和（并）

$A\cup B$：表示 A 与 B 至少一个发生；



（3）积（交）

$A\cap B$：事件 A 与 B 同时发生；

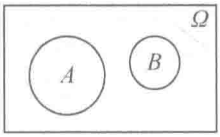


(4) 差

$A-B$：事件 A 发生且 B 不发生

$A-B=A-AB$；

(5) 互斥（互不相容）



不含共同的基本事件

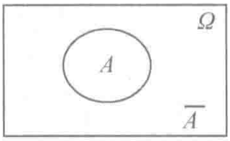
A 与 B 互斥，则 $A\cap B=\varnothing$；

(6) 逆（对立）

$\overline{A}$ 是 A 的逆：$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$　恰是对 Ω 的一个分划.

A 与 $\overline{A}$ 互斥（对立必互斥），但互斥的事件未必对立（互逆）.

差事件 $A-B=A\overline{B}$



当将事件看作集合时，上述 6 种关系和运算与集合中对应的关系和运算完全一致（表 1－1）.

表 1－1　概率论与集合论的符号及含义

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	逆事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少一个发生（和事件）	A 与 B 的和（并）集
$A\cap B$	事件 A，B 同时发生（积事件）	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A，B 互不相容	A 与 B 无公共元素

事件运算的规律：

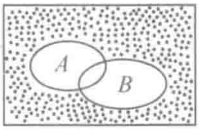
(1) 交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$A(B-C)=AB-AC$；

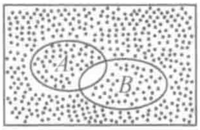
$$A(A_1+\cdots+A_n+\cdots)=AA_1+\cdots+AA_n+\cdots;$$

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$A$ 或 B 的“外面”，即在 A 的“外面”也在 B 的“外面”. 其几何形象如下图所示.



$\overline{A\cup B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$AB$ 的“外面”，应该是或者在 A 的“外面”或者在 B 的“外面”，其几何形象如下图所示.



$\overline{A\cap B}$

§1.2 随机事件的概率

随机事件 A 发生的可能性大小，用数值 $P(A)$ 表示. ($0\leqslant P(A)\leqslant 1$) 称为随机事件 A 的概率.

(一) 古典概率

古典概型具有如下特点.

(1) 样本点有限；

(2) 样本点发生的可能性都相等的随机试验模型.

古典概率：古典概型的概率

$$P(A)=\frac{\text{有利事件数（事件 } A \text{ 所含的样本点个数）}}{\text{基本事件点数（样本空间 } \Omega \text{ 所含样本点的个数）}}=\frac{n_A}{n}$$

古典概率具有如下性质.

(1) 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；

(3) 有限可加性：若 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容，$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

例 1.1 袋中 5 个白球 3 个黑球，从中任取 2 个，求两球颜色相同的概率.

解：基本事件总数 $n=C_{5+3}^2=28$

事件 A 含两种情况：全白 C_5^2，全黑 C_3^2.

有利事件数 $n_A=C_5^2+C_3^2=\frac{5\times 4}{2}+\frac{3\times 2}{2}=13$.

$P(A)=\frac{13}{28}$.

抽签原理：抽签与先后次序无关，机会均等.

例 1.2 就是模型吗?

例 1.2　袋中有 a 只白球，b 只红球，依次将球一只只摸出，不放回（不是摸到首个白球结束），求第 k 次摸到白球（相对于中彩）的概率（$1\leqslant K\leqslant a+b$）.

解法一：设 $A=$ {第 K 次摸到白球}.

由于不用关心 K 次以后取球的结果，可将球编号，直至抽取到第 K 只球为止. 基本事件总数 A_{a+b}^{K}（$a+b$）只球编上号从中选出 K 只进行排列的排列种数）；有利事件数含两个因素：此选中的白球是 a 只白球中的任何一只 A_a^1；前（$K-1$）次取的球是除此白球之外的其余（$a+b-1$）只中的任何（$K-1$）只（可能白，也可能红）排列数 A_{a+b-1}^{K-1}，由乘法原理，有利事件数 $A_a^1A_{a+b-1}^{K-1}$，所以

$$P(A)=\frac{A_a^1A_{a+b-1}^{K-1}}{A_{a+b}^{K}}=\frac{a\cdot(a+b-1)\cdots[a+b-1-(k-1)+1]}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b}$$

解法二：将 $a+b$ 只球全编上号，逐一摸出，排在（$a+b$）个位置上基本事件总数 $(a+b)!$；第 K 次摸到的 a 个白球中的一个，固定在第 K 位置上，余（$a+b-1$）个位置排列各种摸球状态，有利事件数 $a\cdot(a+b-1)!$

$$\therefore\qquad P(A)=\frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

（二）统计概率

频率：随机试验 E 重复 n 次，事件 A 发生 m 次，称比值 $\frac{m}{n}$ 为 A；在 n 次重复试验发生的频率，记为 $f(A)$，$f_n(A)=\frac{m}{n}$.

统计概率：随机试验的次数 n 增大，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某常数 P 附近波动，P 作为事件 A 的概率，称为统计概率 $f(A)=P$，

统计概率的性质：

(1) 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；

(3) 有限可加性：若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 互不相容，$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

历史上维尼做硬币抛掷试验 30000 次，出现正面 14994 次，可以认为 P（正面出现）$=\frac{1}{2}$，这就是一个统计概率.

（三）概率的性质

(1) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

证：$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$.

$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})\xlongequal[(A\cap\overline{A}=\varnothing)]{}P(A)+P(\overline{A})$

$\therefore P(\overline{A})=1-P(A)$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

证：$A\cup B=A\cup(B-AB)$ 且 $A(B-AB)=\varnothing$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(3) $P(B-A)=P(B)-P(AB)$；

证：$B=AB+(B-A)$，且 $B-A=B-AB$.

$(AB)\cap(B-A)=AB\cap(B-AB)=\varnothing$

$\therefore P(B)=P(AB)+P(B-A)$

$P(B-A)=P(B)-P(AB)$

§1.3 条件概率与乘法公式

(一) 条件概率

现实中，需要精准地表述在事件 A 已发生的条件下，事件 B 发生的概率，$P(B|A)$. 这样的表述虽然形式上复杂，但准确，而且必要. 因为条件概率往往是已知的客观已经存在的. (*)

例如，某大公司生产同一产品的三个分厂的次品率分别是 2%，3%，5%，产品产量分别占总产量的 70%，20%，10%. 我们设 A_1，A_2，A_3 表示三个分厂生产量，B 表示次品发生，则有

$2\%=P(B|A_1)$　　$3\%=P(B|A_2)$　　$5\%=P(B|A_3)$

$70\%=P(A_1)$　　$20\%=P(A_2)$　　$10\%=P(A_3)$

定义 1.1：(条件概率)，设有随机事件 A，B 且 $P(A)>0$，则称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为在事件 A 发生的条件下 B 发生的概率.

性质 1.1 条件概率 $P(B|A)$ 满足：

(1) 非负性；

(2) 规范性；

(3) 有限（或可列）可加性.

特别指出，$P(B|A)$ 已经是在新的样本空间 $\Omega_1=A$ 之中看问题. (**)

(*)与(**)式对于认识条件概率是十分重要的.

(二) 乘法公式

由条件概率的定义，可以得到乘法公式：

$$P(AB)\xlongequal[P(A)>0]{}P(A)P(B|A)\xlongequal[P(B>0)]{}P(B)P(A|B)$$

对于 3 个事件 A，B，C 有

$$P(ABC) \xlongequal[P(AB)>0]{P(A)>0} P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$$

例 1.3　从含有 2 只次品的 10 只产品中不放回地连取两次，每次任取 1 只，

1）求两次都取到正品的概率；

2）求第二次才取到正品的概率.

解： 设 $A_i=$｛第 i 次取到正品｝（$i=1$，2），

$B=$｛两次都取到正品｝，

$C=$｛第二次才取到正品｝.

1）显然有 $B=A_1A_2$　　依题意

$$P(A_1)=\frac{C_8^1}{C_{10}^1}=\frac{8}{10},$$

$$P(A_2 \mid A_1)=\frac{C_7^1}{C_9^1}=\frac{7}{9},$$

$$P(B)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{45}.$$

2）应有 $C=\overline{A}_1A_2$

$$P(C)=P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)=\frac{C_2^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_8^1}{C_9^1}=\frac{8}{45}$$

§1.4　全概率公式与贝叶斯公式

（一）全概率公式

（1）划分

若 $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$A_iA_j=\varnothing$（$i\neq j$）则称 A_1，…，A_n 是对 Ω 的一个划分.（A_i 非空，$P(A_i)>0$）

（2）若 A_1，…，A_n 是对 B 的一个划分，则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B \mid A_i)$$

称上述公式为全概率公式.

证： $B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}BA_i$，$BA_i \cap BA_j=\varnothing$

由有限可加性

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)$$

再由乘法公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

(二) 贝叶斯 (Bayes) 公式

$$P(A_{i_0}\mid B)=\frac{P(A_{i_0})P(B\mid A_{i_0})}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$$

证: $P(A_{i_0}\mid B)\xlongequal[\text{定义}]{\text{条件概率}}\frac{P(A_{i_0}B)}{P(B)}\xlongequal[\text{全概率公式}]{\text{乘法公式}}\frac{P(A_{i_0})P(B\mid A_{i_0})}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$

例 1.4 生产同一产品的 3 个分厂的次品率分别为 2%, 3%, 5%, 其产量分别占总产量的 70%, 20%, 10%. 求

1) 总厂的次品率;

2) 发现次品, 哪个分厂责任大? 如何提高产品质量?

解: 1) 设 $B=$ {次品发生}, $A_i=$ {第 i 分厂生产份额} ($i=1, 2, 3$)

已知 $P(B\mid A_1)=2\%$ $P(B\mid A_2)=3\%$ $P(B\mid A_3)=5\%$

$P(A_1)=70\%$ $P(A_2)=20\%$ $P(A_3)=10\%$

$P(B)\xlongequal{\text{全概率公式}}\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.7\times0.02+0.2\times0.03+0.1\times0.05=0.025=2.5\%$

2) $P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(A_1)}=\frac{0.7\times0.02}{0.025}=0.56=56\%$

$P(A_2\mid B)=\frac{0.2\times0.03}{0.025}=0.24=24\%$

$P(A_3\mid B)=\frac{0.1\times0.05}{0.025}=0.20=20\%$

仍然是一分厂的责任大.

改进产品质量以提高一分厂的正品率, 同时扩大一分厂规模最有效 (鞭打快牛); 缩小三分厂规模, 限期提高, 直至关停.

抽签公平性

例 1.5 设在 n ($n\geqslant2$) 张彩票中有 1 张奖券, 甲、乙二人依次每人摸一张彩票, 分别求甲、乙二人摸到奖券的概率.

解: 设 A 表示"甲摸到奖券",

B 表示"乙摸到奖券"

显然 $P(A)=\frac{1}{n}$.

而 $P(B\mid A)=0$, $P(B\mid\overline{A})=\frac{1}{n-1}$.

$P(\bar{A})=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$.

由全概率公式（划分的思想）可知，

$$
\begin{aligned}
P(B)&=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})\\
&=\frac{1}{n}\times 0+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\\
&=\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

于是 $P(B)=P(A)$.

抽签与先后顺序无关，对先后来者是公平的.

§1.5　事件的独立性

（一）独立性

若 $P(B\mid A)=P(B)$，事件 A 发生与否不影响事件 B 的概率. 若互不影响，称为独立性. 我们从乘法公式考虑：

定义　对于随机事件 A 与 B，若有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

成立，称事件 A 与 B 独立.

规定不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件独立. 合理性显然符合独立的定义.

性质 1.2　$P(A>0)$，A 与 B 独立 $\Longleftrightarrow P(B)=P(B\mid A)$

$P(B>0)$，A 与 B 独立 $\Longleftrightarrow P(A)=P(A\mid B)$

性质 1.3　若 A 与 B 独立，则 (1)：A 与 $\bar{B}$，(2)：$\bar{A}$ 与 B，(3)：$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 分别独立.

证明：(1) 对 A 划分：$A=AB+A\bar{B}$

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})\xlongequal[A\text{与}B\text{独立}]{\text{已知}}P(A)P(B)+P(A\bar{B})$$

$\therefore P(A\bar{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)\cdot[1-P(B)]=P(A)P(\bar{B})$

(2) 对 B 划分：$B=AB+\bar{A}B$

$$P(\bar{A}B)\xlongequal[\text{由已知}]{}P(B)-P(A)P(B)=P(\bar{A})P(B)$$

(3) 对 $\bar{A}$ 划分：$\bar{A}=\bar{A}B+\bar{A}\cdot\bar{B}$

$$P(\bar{A}\cdot\bar{B})\xlongequal[\text{由 }(b)]{}P(\bar{A})-P(\bar{A})P(B)=\!=P(\bar{A})P(\bar{B})$$

定义 1.3　随机事件 A_1，A_2，A_3

若$\begin{cases} P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3) \\ P(A_3A_1)=P(A_3)P(A_1) \end{cases}$

则 A_1、A_2、A_3 两两独立

若还有 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$，称 A_1、A_2、A_3 相互独立．由定义 1.1 知道相互独立$\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$两两独立（逆命题，不真）．

例 1.6 有一个均匀正八面体，其 1，2，3，4 面被染成红色，1，2，3，5 面被染成白色，1，6，7，8 面被染成黑色，用 A、B、C 表示投掷一次正八面体出现红、白、黑色的事件则有 (a) 红白黑 (b) 红白 (c) 红白 (d) 红 (e) 白 (f) 黑 (g) 黑 (h) 黑，掷一次只出现某一面朝上．于是，

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(ABC)=\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$$

$$P(AB)=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(B)$$

这个例子既不两两独立，当然也不相互独立．

（二）伯努利概型

进行几次试验，任何一次试验只有两种可能结果，且每次试验结果发生的可能性不受其他各次试验结果发生情况的影响（相互独立）

两种结果记为 A 发生（概率 p）与 A 不发生（概率 $1-p$）$(0<p<1)$，A 发生 k 次记为 A_k．则

$$P(A_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

注意到事件 A 发生的 k 次试验在 n 次试验中的位置共有 C_n^k 种，每种位置对应的事件互不相容，由乘法原理及独立性可知上述公式是显然的．

例 1.7 一大批某型号电子管，已知其一级品率为 0.3，今从中随机抽查 20 只，求其中有一级品的概率是多少？

解："20 只"相对于"一大批"很小，故可看成"返回抽样"．将"抽查一只"看成一次试验，这是 20 重伯努利概型．

设 $A=\{$其中有一级品$\}$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P_{20}(0)=1-(C_{20}^0)(0.3)^0(0.7)^{20}$$
$$=1-0.0008=0.9992$$