理工社®

主审 胡金德

原命题专家、辅导专家联合编写

全国著名辅导机构考研数学必备教材

杨超考研数学系列

考研数学高等数学超解读

主 编 杨超

副主编 靳阳

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学
高等数学超解读

主　编　杨超　　　副主编　靳阳

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学高等数学超解读 / 杨超主编. —北京：北京理工大学出版社, 2018.2
ISBN 978-7-5682-5265-2

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①杨…　Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
Ⅳ.① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 020695 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市宇通印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张 / 24
字　　数 / 600 千字
版　　次 / 2018 年 2 月第 1 版　2018 年 2 月第 1 次印刷
定　　价 / 52.80 元

责任编辑 / 王玲玲
文案编辑 / 王玲玲
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

为了帮助更多学子高效备考，我们团队编写了这本《考研数学高等数学超解读》，力求做到：一书在手，疑云全消，事半功倍，获得高分！年年见证全国各地学子在我们的辅导下取得了优异的成绩，是我们感到最欣慰的事情。

考生在备考过程中一般会遇到以下问题：一是基础阶段，用本科所学教材来复习，但是却不知道考研大纲的要求；二是自己看书过程中遇到不理解的概念、性质、定理等，该怎么办？尤其是很多重要的概念和原理的深度和广度，并不是靠自己多看几遍课本就可以理解的；三是数学离不开做题，广大考生处理完课本后面的相关习题，还需要做哪些相应的习题等。在平时的教学中，我一直在思考和探索：面对浩如烟海的习题、各种抽象的概念和定理，怎样能在有限的时间里，让学生摆脱数学给人留下的枯燥和无聊的印象，给学生一种新的理念和思想，让广大考生学会主动学习，感受到数学学习的乐趣，掌握考试内容的内涵和精髓，做到由此及彼，举一反三。

正是为了解决上述问题，在多年的教学和总结的基础上，我们为考生量身定做了此教材，本书共 9 章，每章分为四部分：

第一部分是**考点要求**。根据考纲要求，我们把基本内容细分为掌握、理解、了解，让考生知道本章的重点。

第二部分是**考点内容**。即对考点进行梳理。

第三部分是**重点、难点、易错点讲解**。这是本书的特色之一。根据我们的教学经验，把考生在学习过程中对一些容易理解错误的概念和定理，以及常见的计算错误进行总结，这是课上所讲述的内容，我们首次在书中呈现。例如，在第一章函数、极限与连续中，我们讲述了等价无穷小（在加减法中）在哪种情况下可以使用，需要满足哪些条件；讲述了求极限易犯的三种错误，尤其是在同一极限下分次求极限，以及错误地使用洛必达法则，读者通过看书中的讲解，相信一定会有很大的收获。

第四部分是**实用题型及举一反三**。很多辅导教材上都有对题型的归类，但我们还增加了举一反三的训练，这是本书的又一大特色，目的是提高解题效率，因为举一反三的习题在思路和方法上

与前面所讲例题是大同小异的，通过做同一类型的题，能检查自己是否真正掌握所学知识。

在本书的编写、出版过程中，身边的很多同事和朋友提了很多好的建议，并给予了大力支持，在此表示衷心感谢！

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索，我们将和广大考生一起努力，去迎接这场改变命运的考试！感谢家人的支持，更要感谢全国很多的考研学子，是你们在课堂上的笑声和掌声，以及优异的成绩让我们有了更大的动力！

由于编写时间匆忙，自身水平有限，书中不妥和疏漏之处在所难免，敬请广大同行和读者批评指正。同时欢迎广大读者和我交流，我的邮箱是 yckysx150@163.com，新浪微博地址是 http://weibo/chaoyu666(杨超 Math)。

杨超

目录

第一章　函数、极限与连续

一　考点要求

理解　掌握　理解函数的概念，掌握函数的表示法；理解复合函数与分段函数的概念；掌握基本初等函数的性质及其图形；理解极限的概念与左、右极限的概念以及它们之间的关系；掌握极限的性质及其运算法则；掌握极限存在的两个准则并用它们判别极限的存在性，掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小量与无穷大量的概念以及它们之间的关系，掌握无穷小量的比较并会用等价无穷小量代换求极限，掌握利用几个重要的等价无穷小求极限；掌握利用洛必达法则，带佩亚诺余项的泰勒公式求某些极限；理解函数的连续性与左、右连续的概念；理解闭区间上连续函数的性质(有界性，最大最小值定理，介值定理，零点定理)．

会求　了解　了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，会建立简单应用问题的函数关系；了解反函数及隐函数，参数方程所表示的函数及初等函数的概念；了解判别函数的间断点及其类型的方法，以及基本初等函数和初等函数的连续性；会利用积分和式求某些极限．

二　考点内容

(一) 函数的概念

1. 定义

称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为一个函数(其中 $D\subset\mathbf{R}^n$)．

注1：此定义涵盖了微积分中的所有函数的概念：

(1) 当 $n=1$ 时，为一元函数；

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，为多元函数；

(3) 当 $D=\mathbf{N}$ 时，为数列．

注2：函数为一个特殊的映射，应深刻领会映射定义中的三层含义(原象的任意性、象的存在性和象的唯一性)．

2. 函数的三要素

(1) 定义域 D(或 D_f)．(2) 值域 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{R}_f$)．(3) 对应法则 f．

注：三要素的用途：(1) 函数与符号无关．(2) 用于判断两个函数是否为同一函数．

3. 函数的表示法

(1) 解析法．(2) 列表法．(3) 图像法．

注：函数与曲线并非一一对应．

(二) 常见的函数形式

1. 显函数：$y=f(x)$

注：分段函数是显函数(是一个函数，而不是多个函数)．

2. **隐函数**：$F(x,y) \Rightarrow y = f(x)$

注：相关结论(隐函数存在定理)：设 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有连续偏导数，且 $F'_x(x_0,y_0) = 0, F'_y(x_0,y_0) \neq 0$，则方程 $F(x,y) = 0$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内恒能确定唯一的一个具有连续导数(或偏导数)的函数 $y = f(x)$，使之满足 $y_0 = f(x_0)$.

3. **复合函数**：$y = f(u), u = \varphi(x) \Rightarrow y = f(\varphi(x))$

注：并非任意两个函数都能复合，能复合的充要条件是 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$，具体判断时，可以将 $u = \varphi(x)$ 强行代入 $y = f(u)$，得到 $y = f(\varphi(x))$，再看其定义域是否为空集. 若空，则不能复合；若非空，则可以复合.

4. **反函数**：$y = f(x)$ 的逆映射(即 $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$)

注：并非任意一个函数都有反函数，当且仅当 $y = f(x)$ 一一对应时，才有反函数.

相关结论：(反函数存在定理)若 $y = f(x)$ 连续、单调递增(或单调递减)，则其反函数存在，且连续、单调递增(或单调递减).

$y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在 xOy 坐标系中的图像关于 $y = x$ 对称.

5. **极限函数**：$f(x) = \lim\limits_{x \to \square} F(x,t)$(其结果只与 x 有关而与 t 无关)

这里的 $\square$ 可以是 x_0 或 x_0^+, x_0^- 或 $\infty, +\infty, -\infty$ 中的某一个(下同).

注：极限函数的一般形式为分段函数.

6. **导函数**：$y = f'(x)$

相关结论：可导的奇函数的导数是偶函数，可导的偶函数的导数是奇函数.

7. **变限积分函数**：$F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t; G(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$

相关结论：

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) 若在 $[a,b]$ 连续，则 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$

(使用条件：① $f(t)$ 中不含有 x；② $f(t)$ 连续).

推论：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

8. **参数方程**：$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$(t 为参数)

用途：多用于计算曲线、曲面积分.

极坐标方程：$r = r(\theta)$(或 $\rho = \rho(\theta)$).

极坐标与直角坐标的关系：$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

(三) 一元函数的几何性质

1. **单调性**

(1) 若 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增(或单调递减).

(2) 若 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调不减(或单调不增).

判定方法：(1) 作差与 0 比较(或作商与 1 比较).

(2) 使用下述相关结论.

相关结论:可导函数 $f(x)$ 单调不减(不增)的充要条件是 $f'(x) \geqslant 0(f'(x) \leqslant 0)$.

2. **有界性**

(1) 若存在常数 M,使 $f(x) \leqslant M(x \in D)$,则称 $f(x)$ 有上界.

(2) 若存在常数 m,使 $f(x) \geqslant m(x \in D)$,则称 $f(x)$ 有下界.

(3) 若 $f(x)$ 既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 有界.

结论:$f(x)$ 有界的充要条件为存在常数 M,使 $|f(x)| \leqslant M$.

相关结论:(1) 闭区间上的连续函数一定有界(有界性定理).

(2) 函数有极限(称为收敛)$\Rightarrow$ 局部有界.

(3) 有界是广义可积的必要条件(即可积一定有界,反之不然).

3. **奇偶性**

若 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;若 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

注:$f(x) - f(-x)$ 为奇函数;$f(x) + f(-x)$ 为偶函数.

相关结论:(1) 若 $f(x)$ 为可积的奇函数,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(2) 若 $f(x)$ 为可积的偶函数,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若 $f(x)$ 为一般可积函数,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x.$$

注:当遇到积分的上下限互为相反数时,应优先考虑被积函数的奇偶性.

4. **周期性**

若 $\exists T \neq 0$,使 $f(x+T) = f(x)$,则 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

结论:若 T 为 $f(x)$ 的周期,那么 kT 也是 $f(x)$ 的周期($k \in \mathbf{Z}$ 且 $k \neq 0$).

注:周期函数未必有最小正周期.

相关结论:(1) 可导的周期函数的导函数仍然是周期函数,且周期不变;(2) 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则 $\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$.

(四) 初等函数

1. **基本初等函数**

(1) 函数 $y = C, x \in (-\infty, +\infty)$ 称为常函数.

(2) 幂函数 $y = x^{u}$,定义域与 u 有关.

(3) 指数函数 $y = a^{x}(a > 0, a \neq 1), x \in (-\infty, +\infty)$.

(4) 对数函数 $y = \log_{a}x(a > 0, a \neq 1), x \in (0, +\infty)$.

(5) 三角函数 $y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$.

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \mathrm{arccot}\, x$.

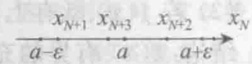
2. **初等函数**

由基本初等函数通过有限次四则运算或有限次复合得到,且能用一个解析式表达的函数称为初等函数.

(五) 极限

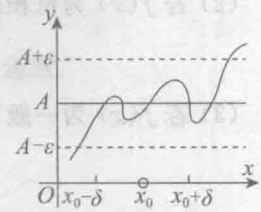
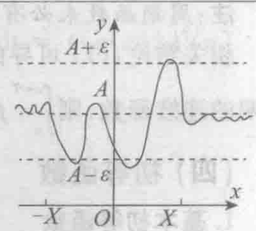
1. 数列极限的定义(见表 1.1)

表 1.1

	定义	剖析	几何解释
数列极限	若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$(正整数)，使得对于 $n > N$ 的一切 x_n，不等式 $\lvert x_n - a \rvert < \varepsilon$ 都成立，则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，或说 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$	ε 是任意给定的，N 是要找出的，它由 ε 的大小来决定，两个不等式的关系是 $\boxed{\lvert x_n - a \rvert < \varepsilon}$ 是上式成立的条件 是找N的根据 $\boxed{n > N}$	 x_N 后面的所有点 x_{N+1}，x_{N+2}，x_{N+3}，…，都落在以 a 为中心、以 ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之内，而不管 x_n 前面的点的位置怎样

2. 函数极限的定义(见表 1.2)

表 1.2

	定义	剖析	几何解释
函数极限	$x \to x_0$ 时，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得对于适合 $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ 的一切 x，都满足不等式 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$(当 $x \to x_0$)	ε 是任意给定的，δ 是要找出的，它由 ε 的大小来决定，两个不等式的关系是 $\boxed{\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon}$ 是上式成立的条件 是找δ的根据 $\boxed{0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在与 $f(x)$ 在 x_0 点的情况无关	 当 $x(\neq x_0)$ 落在 x_0 的 δ 邻域时，曲线 $f(x)$ 被夹在两直线 $y = A \pm \varepsilon$ 之间，而不管在该邻域之外曲线 $f(x)$ 的位置怎样
	$x \to \infty$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，使得对于适合 $\lvert x \rvert > X$ 时的一切 x，都满足不等式 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$(当 $x \to \infty$)	ε 是任意给定的，X 是要找出的，它由 ε 的大小来决定，两个不等式的关系是 $\boxed{\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon}$ 是上式成立的条件 是找X的根据 $\boxed{\lvert x \rvert > X}$	 当 $\lvert x \rvert > X$ 时，曲线 $f(x)$ 夹在两直线 $y = A \pm \varepsilon$ 之间，而不管 $x \in [-X, X]$ 时曲线 $f(x)$ 的位置怎样
左右极限	若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$(或 $x_0 < x < x_0 + \delta$)时，总有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$(或 $x_0 \to x_0^+$)时的左(右)极限，记为 $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$		
无穷小	若对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta$(或 X) > 0，使得当 $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$(或 $\lvert x \rvert > X$)时，总有 $\lvert f(x) \rvert < \varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷小，也就是说，当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时，$f(x)$ 是趋近于 0 的量		
无穷大	若对 $\forall M > 0$，$\exists \delta$(或 X) > 0，使得当 $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$(或 $\lvert x \rvert > X$)时，总有 $\lvert f(x) \rvert > M$ 成立，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大，也就是说，当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时，$\lvert f(x) \rvert$ 是无限增大的量		

3. 无穷小量阶的比较

设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)\to 0,\lim\limits_{x\to\square}g(x)\to 0$，

(1) 若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶，记为 $f(x)=o(g(x))$.

(2) 若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶.

(3) 若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c(c\neq 0)$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶.

(4) 若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的等价无穷小，记作 $f(x)\sim g(x)(x\to\square)$.

（六）重要性质、结论和公式

1. 极限的性质

(1) 唯一性：若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$ 存在，则其极限值唯一.

(2) 局部有界性：若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在局部有界.

(3) 局部保号性：若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A>0(<0)$，则 $f(x)>0\ (<0)$ 在局部成立.

推论：若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$ 存在，且 $f(x)\geqslant 0\ (\leqslant 0)$ 在局部成立，则$\lim\limits_{x\to\square}f(x)\geqslant 0\ (\leqslant 0)$.

2. 极限的运算

(1) 四则运算：若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A,\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$，则

$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B,\lim\limits_{x\to\square}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{A}{B}$，其中 $B\neq 0$.

(2) 复合运算法则：若 $y=f(u)$ 在 u_0 点连续($u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$)，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f(u_0)=f[\lim_{x\to x_0}g(x)].$$

3. 极限的存在准则

(1) 单调有界准则(原理)：单调有界数列必有极限.

注：单调有界准则只适用于数列，不适合于一般的函数(即单调有界函数未必有极限).

(2) 夹逼准则(原理)：若 $f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$ 在局部成立，且$\lim\limits_{x\to\square}f_1(x)=A,\lim\limits_{x\to\square}f_2(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$.

4. 无穷小的性质

(1) 若 $f(x)\neq 0$ 为无穷小(大)，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大(小).

(2) $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$($\alpha$ 为无穷小).

(3) 有限个无穷小的和仍是无穷小.

(4) 有界函数与无穷小的积是无穷小.

推论：常数与无穷小的积是无穷小，有限个无穷小的积是无穷小.

(5) 无穷小与极限不为零的函数的比值仍是无穷小.

(6) 等价无穷小代换：当 $x\to\square$ 时，若 $f(x)\sim f_1(x),g(x)\sim g_1(x)$，则$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f_1(x)}{g_2(x)}$.

(7) $o(x^m)$ 的运算性质：

①$o(x^m)\pm o(x^m)=o(x^m)$；

②$ko(x^m)=o(x^m)=o(kx^m)(k\neq 0)$；

③$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l)(l=\min\{m,n\})$.

（不同阶的无穷小相加，高阶无穷小被低阶无穷小所吸收，简称“吸阶大法”）

(8) 当 $x\to 0$ 时，常见的等价无穷小量有：$\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,(1+x)^a-1\sim ax,x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3,\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$.

5. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2.718\,2\cdots$.

6. 洛必达法则

定理 1：$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0,\lim\limits_{x\to\square}g(x)=0$，且

(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在局部可导，　(2) $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为常数或无穷），

则 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

定理 2：若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\infty$，且

(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在局部可导，　(2) $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为常数或无穷），

则 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

（七）函数的连续与间断

1. 函数连续性的定义

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

(2) 单侧连续：左连续，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$；右连续，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

(3) $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 既左连续又右连续.

2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续.

3. 连续函数的运算性质

(1) 连续函数的四则运算性质：

① 区间 I 上连续函数的和、差、积、商（分母的函数值不为 0）均为连续函数；

② 区间 I 上连续且单调的函数的反函数，在其对应区间上仍连续且单调；

③ 连续函数经有限次复合而成的复合函数在其定义区间上仍是连续函数.

(2) 一切初等函数在其定义的区间内是连续的.

4. 间断点的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，在此前提下，如果函数有下列三种情形之一：

(1) 在 x_0 点没有定义；

(2) 虽在 x_0 点有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) 虽在 x_0 点有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，

则称 x_0 为函数的间断点.

5. 间断点的类型

若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点，

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，但不相等，则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$，则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，且当 $x \to x_0$ 时函数值在摆动，则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

上述间断点中，(1)，(2) 两类称为第一类间断点；(3)，(4) 两类称为第二类间断点.

6. 闭区间上连续函数的性质

性质 1 （有界性定理）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

即 $\exists M > 0$，使得对 $\forall x \in [a,b]$，有 $|f(x)| \leqslant M$.

注：(1) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

(2) 若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有界.

性质 2 （最大值和最小值定理）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值与最小值. 即 $\exists \xi,\eta \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$，$f(\eta) = \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

性质 3 （介值定理）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，μ 是介于最大值与最小值之间的任一实数，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \mu$.

性质 4 （零点定理）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b) < 0$），那么至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

注：如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且满足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to b^-} f(x) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

三 重点、难点、易错点讲解

1. 在求极限的过程中，为什么作为乘、除的因子能够用与其等价的无穷小代替？

【答】 在求极限的过程中，乘、除因子可以用与其等价的无穷小量代替，这是以 $\boxed{\text{极限运算法则}}$ 作为依据的. 假定在某个极限过程中，$f(x)$，$g(x)$，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是无穷小量，并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小. 如果极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，则有 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，所以

$$\lim \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{f(x)g(x)}{\alpha(x)g(x)} = \lim \frac{g(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{g(x)}{\alpha(x)},$$

其中用等价无穷小量 $g(x)$ 取代了 $f(x)$.

如果 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，同样可以得到

$$\lim \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{f(x)}{\beta(x)}.$$

2. 在求极限的过程中，加减项的无穷小量在什么条件下能用等价无穷小代换？

【答】 先给出结论：已知 $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$，且 $f_1(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0$，

若 $\lim \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = k \neq 1$，则 $f_1(x) - g_1(x) \sim f_2(x) - g_2(x)$；

若 $\lim \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = k \neq -1$，则 $f_1(x) + g_1(x) \sim f_2(x) + g_2(x)$.

证明：因为 $\lim \dfrac{f_1(x) - g_1(x)}{f_2(x) - g_2(x)} = \lim \dfrac{\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} - 1}{\dfrac{f_2(x)}{g_1(x)} - \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}} = \lim \dfrac{\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} - 1}{\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} - \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}}$

$$= \frac{k-1}{1 \cdot k - 1} = 1.$$

所以 $f_1(x) - g_1(x) \sim f_2(x) - g_2(x)$.

例如，$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sin x} = 1$，故分子 $\tan x - \sin x$ 不能用 $x - x$ 来代替.

又如，$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x + \sin x}{x}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sin x} = 1 \neq -1$，故 $\tan x + \sin x \sim x + x = 2x$.

掌握该原理，读者在求解填空、选择题时，可以快速得出答案，例如，

求 $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sin\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right) - \sin\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right] x$.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x}} = 3 \neq 1$，

所以 $\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) - \sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) \sim \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$.

故原极限 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x}\right) \cdot x = 2$.

3. 怎样区分"自然数 0 和 1"与"极限为 0 和 1"？

【答】 在常见的几种未定型 $\left(\dfrac{0}{0}, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty\right)$ 中，0 代表无穷小量，只是无穷小量的一种简记法. 无穷小量的极限值为 0，但无穷小量并不等于 0，若是具体数值 0 和 1，与极限式之间的运算结果为定式. 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1, \lim\limits_{x\to 0} h(x) = \infty$，则有 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{f(x)} = 0, \lim\limits_{x\to 0} 0 \cdot h(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to 0} 1^{h(x)} = 1, \lim\limits_{x\to 0} 1^{f(x)} = 1$，但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot h(x), \lim\limits_{x\to 0} g(x)^{h(x)}$ 的结果是未定的，千万不能认为前者结果为 0，后者结果为 1，要想知道其正确结果，需要根据求极限的方法计算.

4. 求极限时哪些函数需要考察左、右极限？

【答】 (1) 当 $x \to \infty$ 时，极限式子中含 e^x（或 $x \to 0$ 时，极限式子中含 $e^{\frac{1}{x}}$）.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\text{（不存在）}, \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

(2) 当 $x \to \infty$ 时，极限式子中含 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$；

$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0, \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$.

(3) 极限式子中含取整函数.

n 为正整数，$\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$，$\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1$.

(4) 极限式子中含偶次方根.

当 $x\to-\infty$ 时，含偶次方根的函数提到根号外的因子要记得添加负号.

(5) 极限式为绝对值函数.

即当 $x\to a$ 时，极限式中含 $|x-a|$.

(6) 求分段函数分段点的极限.

5. 在求函数极限时，经常犯哪些错误？

【答】 (1) 四则运算法则使用不当.

遇到 $\lim(f(x)\pm g(x))$ 时，不能认为如果 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，$\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)$ 就存在.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

错误解法：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} \tag{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2} \tag{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x}{x^2}=0.$$

错误分析：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$ 不存在，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$ 也不存在，所以(1) = (2) 是错误的.

正确解法：

$$\text{原式}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right]=-\frac{1}{4}.$$

(2) 在同一极限下分次去求极限.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}$.

错误解法：因 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^2$，故原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-e^2}{x}=0$.

错误分析：求极限中的函数 $f(x)$ 中的 x 是同一个自变量，取极限时应属于同一极限过程，上述解法中先求出 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$ 的极限，然后把结果代入，这明显是两个独立的极限过程，不是同步的，所以运算是错误的.

正确做法：因 $x\to 0$ 时，$\dfrac{2\ln(1+x)}{x}-2\to 0$，所以 $e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1\sim\dfrac{2\ln(1+x)}{x}-2$.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^2\left[e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^2[2\ln(1+x)-2x]}{x^2}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-e^2.$$

(3) 洛必达法则使用不当.

洛必达法则是充分不必要条件,即由$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$,可推导得$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$,但在解题过程中,不能因为$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$,就得出$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

例 3　$f(x)$ 一阶可导,$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$. 证:$f'(0)=0$.

错误解法:因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$,可得 $f(0)=0$.

故$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=2$.

从而 $f'(0)=0$.

错误分析:上述解法是因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$,从而以为$\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=2$,这是使用洛必达法则的典型错误.

正确解法:因$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$,得 $f(0)=0$.

又因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{x}=2$,

所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\left(\text{根据}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}\text{存在},\lim\limits_{x\to0}g(x)=0,\text{可得}\lim\limits_{x\to0}f(x)=0\right)$,

从而 $f'(0)=0$.

6. 数列极限与函数极限有怎样的区别和联系?

【答】　区别在于:数列极限的自变量 n 的变化过程只有一种:$n\to+\infty$,而函数极限的自变量 x 的变化过程有六种:$x\to x_0,x\to x_0^+,x\to x_0^-,x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$.

两种极限的联系有:(1) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时,$\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$ 必定存在,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$,经常利用这点把数列极限转变为相应的函数极限(因为离散的变量 n 不能直接求导).

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是对于 $x_n\to x_0(n\to\infty$ 时) 的任意数列 x_n,都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$. 利用这点可以说明函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,找出一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$,使对应的函数值数列$\{f(x_n)\}$ 的极限不存在,或者找出两个收敛于 x_0 的数列$\{x_n\}$ 与$\{y_n\}(x_n\neq x_0,y_n\neq x_0)$,使数列$\{f(x_n)\}$与$\{f(y_n)\}$有不同的极限. 例如,要证明$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$不存在,可以找出两个收敛于零的数列 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 与 $y_n=\frac{1}{2n\pi}$,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=+\infty$,而 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}2n\pi\sin(2n\pi)=0$,故$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 进一步还可得到当 $x\to0$ 时,$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是无界变量,而不是无穷大量.

7. 如果$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,又$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,那么有$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,此结论是否正确?

【答】　此结论不正确,因为缺少当 $x\neq x_0$ 时,$\varphi(x)\neq u_0$ 这个条件.

例如,设 $f(u)=\begin{cases}2,\text{当 } u\neq0,\\0,\text{当 } u=0,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}0,\text{当 } x\neq0,\\1,\text{当 } x=0,\end{cases}$ 则 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}0,\text{当 } x\neq0,\\2,\text{当 } x=0.\end{cases}$