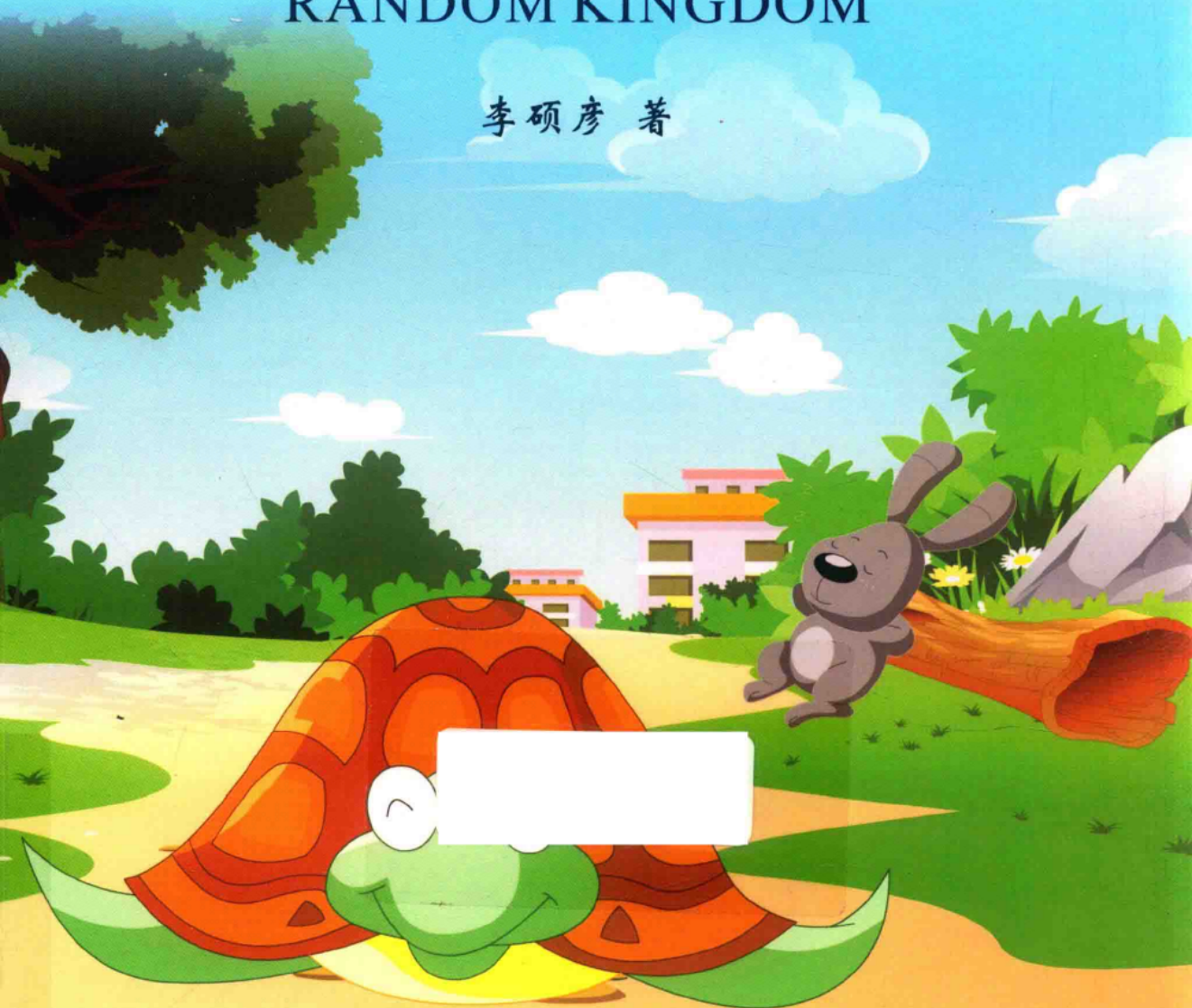


科教文艺①

似是而非的概率

RANDOM KINGDOM

李硕彦 著



电子科技大学出版社

科教文艺①

似是而非的概率

RANDOM KINGDOM

李硕彦 著



电子科技大学出版社

图书在版编目（C I P）数据

似是而非的概率 / 李硕彦著. -- 成都 : 电子科技大学出版社, 2017.9
ISBN 978-7-5647-4780-0

I. ①似… II. ①李… III. ①科学故事—中国—当代
IV. ①I247.81

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第172399号

似是而非的概率

李硕彦 著

策划编辑 兰 凯
责任编辑 兰 凯

出版发行 电子科技大学出版社
成都市一环路东一段159号电子信息产业大厦九楼 邮编 610051
主 页 www.uestcp.com.cn
服务电话 028-83203399
邮购电话 028-83201495

印 刷 四川煤田地地质制图印刷厂
成品尺寸 185mm×260mm
印 张 12.5
字 数 140千字
版 次 2017年 9月第一版
印 次 2017年 9月第一次印刷
书 号 ISBN 978-7-5647-4780-0
定 价 119.00元

版权所有，侵权必究

序 言

本书讲述 17 世纪时一群华人在中亚建立的 *Random Kingdom* 的故事. 在这个史诗般的国度里, 人们热爱随机的哲理, 生活中无数次出现似是而非的概率问题. 虽都是以日常口语描述, 但即使是教概率的老师也不一定能全都分析清楚. 每逢谜题, 顺着故事情节, 科学真理就会被淋漓尽致地揭开. 使用的是浅白的语言, 牵连到的都是一生中必学的概率知识. 化困惑为惊喜之余, 还帮助您在哈哈大笑之中开发潜在的天赋.

“似是而非的概率”最初始版本是用英文 PPT 写的讲课稿, 原是《数学与工程的对话》系列讲坛的课题之一. 该系列着重于通俗易懂, 面向的读者不限于理工科专业. 概率随时随地关联到生活与科技, 懂得越多越深, 就越能感受到概率的无所不在. 所以概率论的教学最好是做到不仅易懂而且难忘. 为此, 本书以及伴随的动画片尝试**寓科教于文艺**的创新形式, 利用戏剧里的情节、诗词、古谚、隽语、幽默展现科学真理的精髓. 能得真理的精髓, 就能活学活用, 甚至终生难忘.

书中数学素材的收集与筛选始于 1972 年. 作为《科教文艺》的第一册, 本书仅触及概率学而已, 实乃抛砖引玉. 笔者有一中国梦: 愿各方俊彦发挥数千年的文化优势, 于本世纪内**拓展《科教文艺》成为多学科的系列丛书. 将令人望而生畏的数理科目融入易懂难忘的文艺.**使得青少年皆能立足远高于吾辈的科学领悟起点, 以火箭似的起步参破九霄天宫.

李硕青

2017 年 9 月于四川成都



目录

楔子	1
囚犯 B 的机会	6
同样的对答,不同的概率	14
做个交易吧	26
似是而非?无所谓是非?	30
全国概率公开赛	40
弯路易生车祸?	50
长期统计与节日平均	54
无心插柳柳成荫	64
隔壁的草皮比较绿	71
理想 X 的悬案	78
父子猜谜同乐会	88
压岁钱不患寡而患不均	93
步步成诗或背水一蘸	100
三国演义导致似是而非	108
龟兔赛跑	115
对赌双方都一定能赢	122
醉汉易归醉鸟难	128
固定量的随机化	136
东半是不是一半?	144
东半到底有多长?	158
每天赢赌场一块钱	166
大家乐最爱骆驼客	172
早起的鳄鱼有得吃?	179
人算、天算、神算	184
感谢前人的字句,为本书所借用	188

楔子

明朝末年，天灾人祸，民不聊生。农民起义打起“均田免赋”的口号。1629年李自成加入农民起义军，后成为领袖，号称闯王，带领农民军闯东南西北。每一步进攻的方向都是由他的义子李双喜随机决定。随机的因素包括抽签、占卜、掷铜板、掷骰子等等。

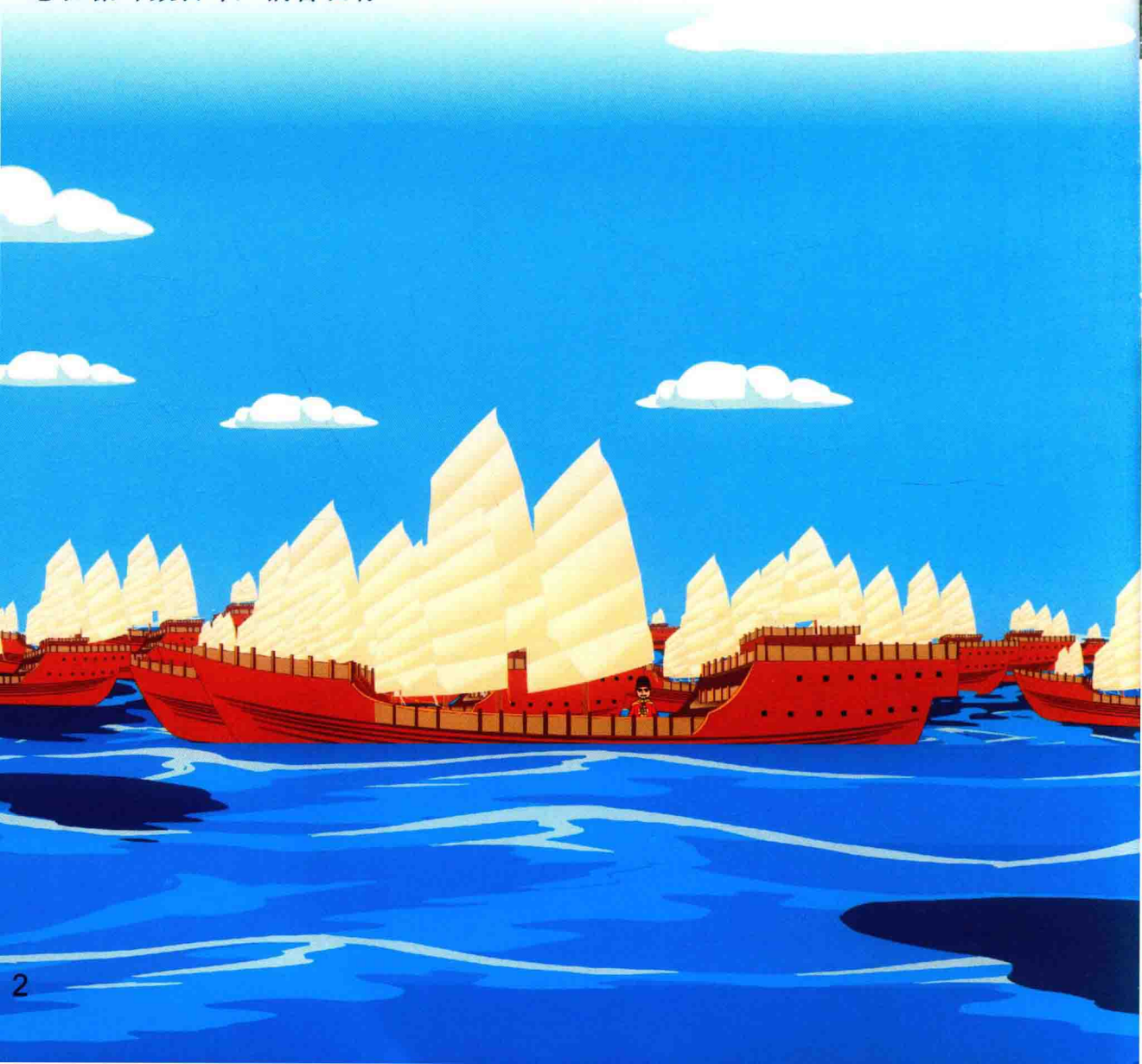
1644年，李自成在西安府登基，建立大顺政权。三个月后，攻克北京城，坐上了紫禁城的龙椅，是为**承天广运自圣睿文宣武大顺皇帝**。帝号没有简称，因为后世没为他立谥号，也不承认大顺朝的正统。

金銮殿上坐没几天，李自成就被女真人赶跑了。此后东南西北到处逃窜。在逃往西安府的途中经过太行山时，由于许多马车驮载笨重的银子，行走缓慢。只好将银子就地埋藏起来，地点由李双喜抽签占卜决定。这些银子都便宜了后世的山西票号。



关于李自成的结局，历史上有多种传说。估计是，一面制造死于鄂南九宫山的烟幕，让追杀他的将军能回去做交待。一面又扮作和尚，走丝路，出甘肃，投靠榆中县青城镇的叔父李斌，凭借党项族人的掩护，金剑沉埋隐深山，壮气蒿莱了残生。李自成虽没能东山再起，但至少抵制了不堪入目的金钱鼠尾辫，算是象征性地抵抗女真到底。这种令男人无地自容的发型，加深全世界对华人的歧视。

一面诈死一面扮作和尚出逃的伎俩，是师从孝文帝朱允炆。因为叔父朱棣造反，朱允炆的结局也有各种传说。估计是，跟着阿拉伯船队潜往西洋。法国球星里贝里很可能是他的后代。朱棣的血统虚虚假假，性格自卑嗜杀。虽然规定整个明朝的子孙假装孝文帝从未存在，但是孝文帝生不见人死不见尸又让朱棣寝食难安。因此，屡派郑和率水师浩浩荡荡下西洋搜捕，表面上则美其名曰宣扬国威。几十年的沧海寻一粟，最终耗尽国库。其实，明朝的水师最应该做的，是将倭寇连根拔起。**倭寇长期在中国沿海、朝鲜半岛、琉球的兽行令人发指**，其掠夺的财物增添了军力，制造了新武器，以此扩大侵略。恶性循环数百年，祸害长存。





传说中，李自成的年轻部属不愿从此藏匿山野苟活，李双喜就带领他们，继续沿丝路出西域，辗转数千里，终于在一个三不管的地带落脚。该地经历过大地震，原住民极少，地形是二十里长的山谷，两面山势陡峭，谷底有小河，沿山谷一端的峡口通往外界。



李双喜带领部属筚路蓝缕，开山立寨，垦荒畜牧，同时变卖了仅有的金玉珠宝，在峡口处经营算命馆和赌场，后来又设立一些供赌客吃住的设施。整个开发的过程中，他们不断和附近的中亚人融合、通婚。

有些精于扑克的赌客看似颇有文化，李双喜就与之交友。听他们说起一种可以用于赌博的知识，叫作 random 算学，也就是后世所说的或然率，今日的概率。这门学问比阴阳五行八卦更有系统性，易懂且不神秘。李双喜从此茅塞顿开，延聘这些人在学堂里开课。孩子们从小学习的，除了汉文，就是 random 算学。李双喜空闲时也到学堂听讲，有了心得就在自家的赌场做实验，渐渐地也爱上了扑克。



名义上，李双喜仍遥尊承天广运自圣睿文宣武大顺皇帝。同时从这个帝号里摘取含有随机意味的字眼，自立为**承天广运大顺王**。承天就是承天意，广运就是广运气，大顺嘛，打扑克的时候，常常用来杀三条。

由于深谙天道的随机性，李双喜对一切 random 的事物都感兴趣。他为山寨的子民立下一个处世的指引：**凡大事必 random**。

看似怪诞，却深含哲理。久而久之指引变成了传统，世世代代人用许多创意来维护这个文化特征。赌客们称这座山寨为 *Random Kingdom* (随机王国)。百多年的经营下来，规模制度上也确实形成一个小王国。



囚犯 B 的机会

每逢霜降时节，西风染遍山谷，一片画中有诗的景象。只是树叶的开始飘零，提醒人们，这是秋决的时节。通常一年难有一个死囚，这一年却多达三个。

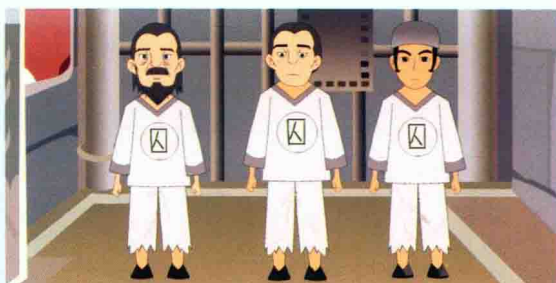
国王说：依据惯例，有三个及以上的死囚，就可以释放一个。

凡大事必 random。抽签定生死，而不是纠集一帮大声吼叫的群众来定夺。死囚们的代号分别是 A、B、C。各自抽取一个号码，挂往墙上的钉子。

国王指着桌上的纸宣布：这张纸盖着放生的幸运号码。

同时还下了诏书：

黎明时，在吊人树下公布幸运者身份，此前任何人不得泄露。



山谷中有一峰嶙峋，叫作叹息山。吊人树矗立于山顶。每个死囚，不论最后是活是死，都得看一次峰顶日出映山红的美景，从而感受生命的光明美好。峰顶的一声叹息，就是灵魂的一次洗涤，人性的一丝救赎。

抽签后囚犯B私下提出请求：陛下，在A和C之间，至少有一个不幸。请告诉草民A不幸或者告诉草民C不幸吧，不需透露幸运号码。

国王：兄长免礼。如果你不是幸运者，我就指出另一个不幸者，如果你是幸运者，我就随机回答。是这个意思吗？

囚犯B直起身：是的，陛下。

国王：然而，这样的问题并帮不了你。

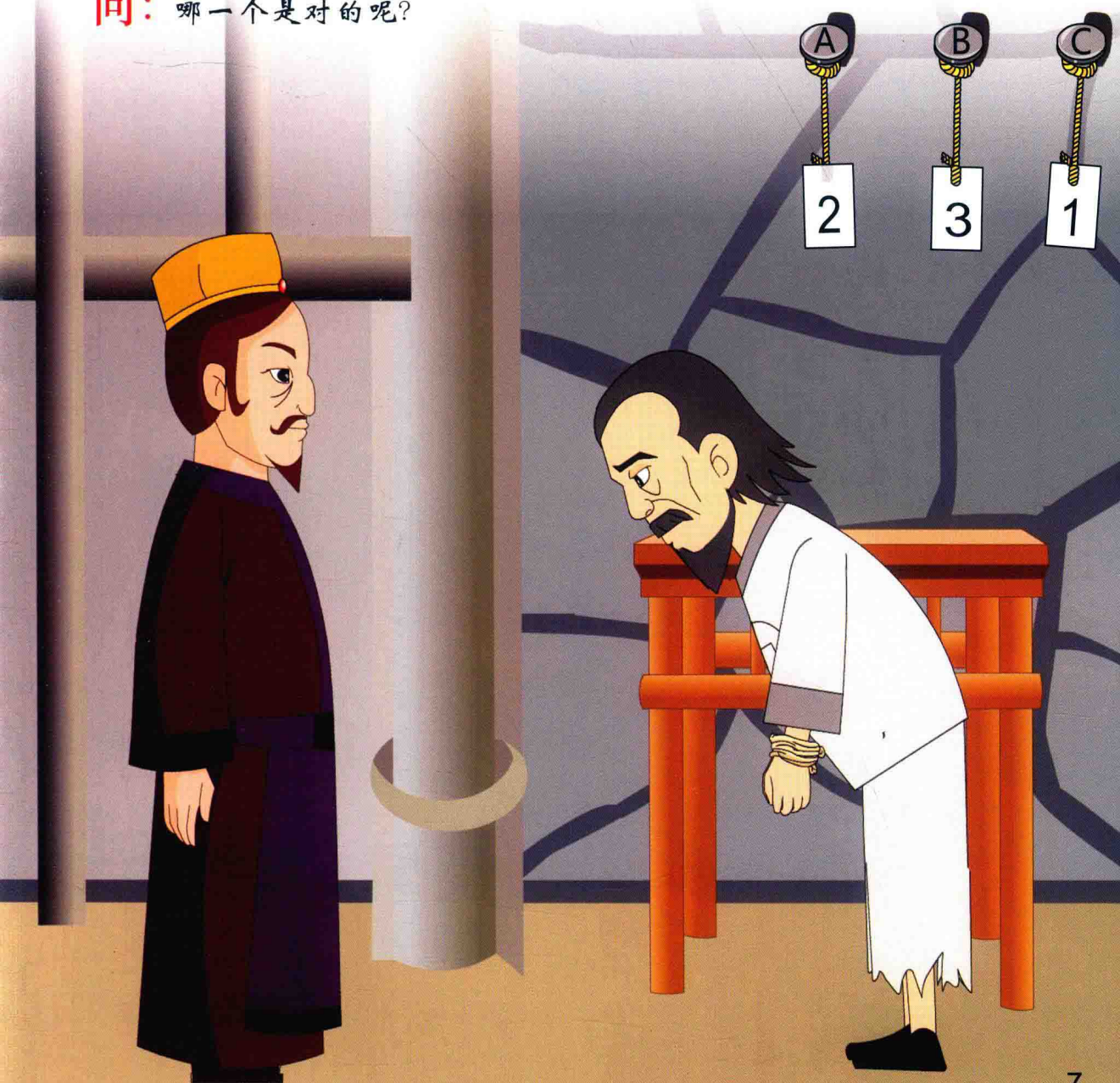
囚犯B：请陛下的仁慈满足草民的心愿吧。

国王：好吧，C不幸。

囚犯B：啊哈！草民的机会从 $\frac{1}{3}$ 变成 $\frac{1}{2}$ 了。

国王：兄长糊涂了。你应该认为机会不变，仍是 $\frac{1}{3}$ 。

问：哪一个是对的呢？



国王是对的，囚犯 B 的机会仍是 $1/3$ 。以下给三种解释：

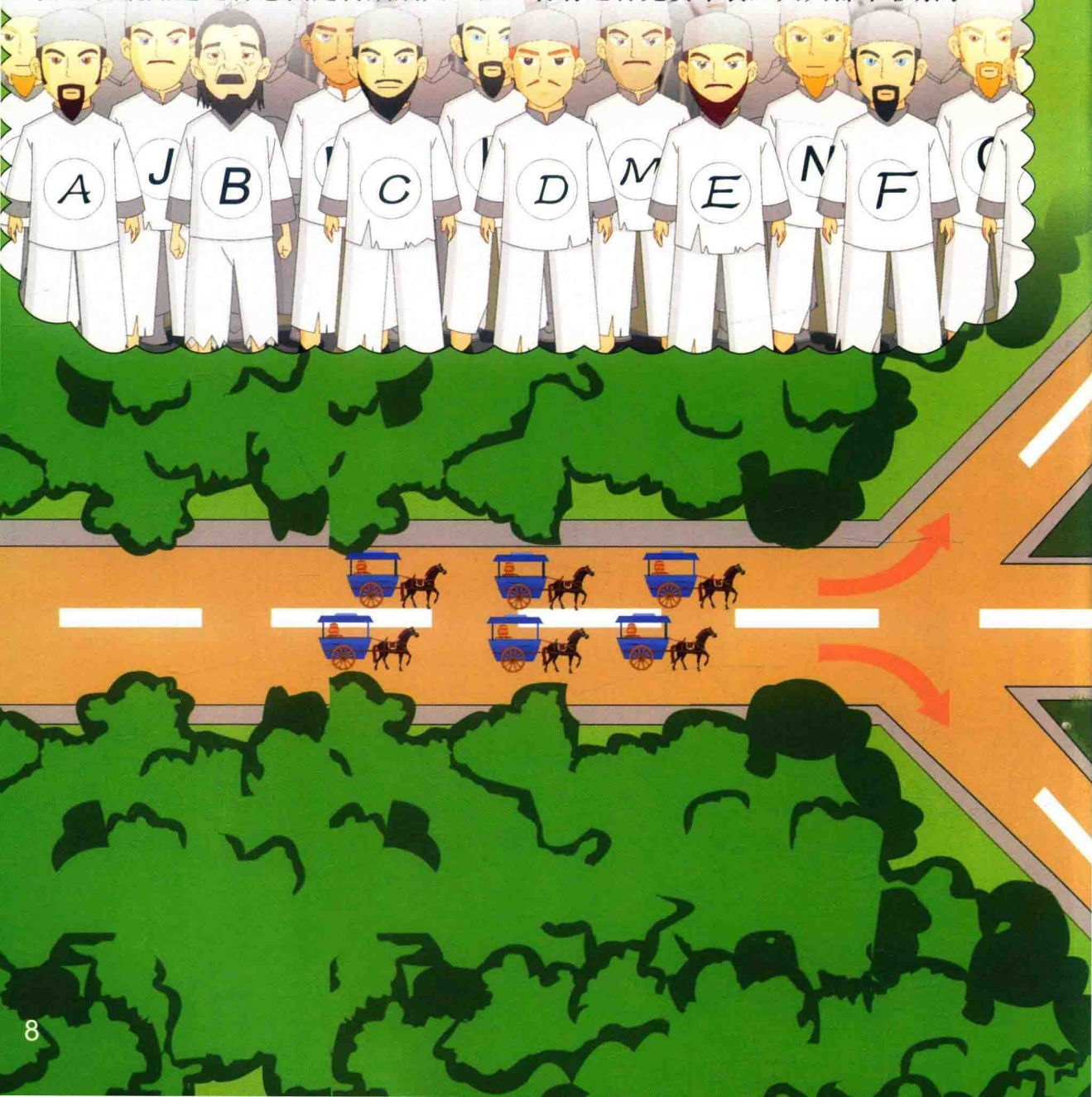
- (1) 以五十步笑百步
- (2) 醉驾公路网
- (3) A 和 C 的对称性

第一种解释需要考虑一个替代场景。死囚人数增加至 10,002 人。幸运号码依旧只有一个，每个人的机会都是 $1/10,002$ 。

抽签后，囚犯 B 向国王提出请求：请陛下指出其他 10,001 人之中的 10,000 个不幸者。

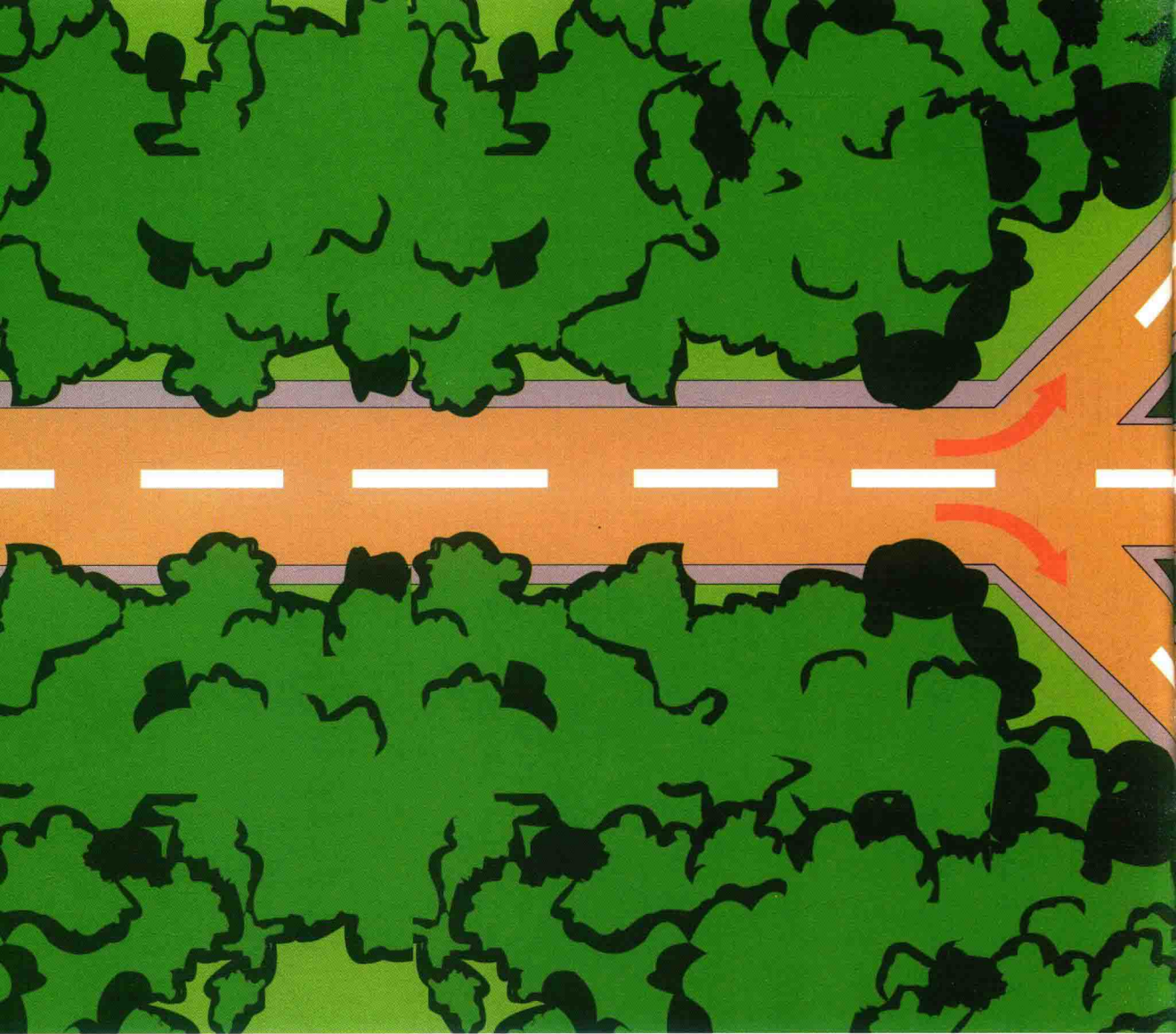
他心想：只是问一句话，无论国王的回答指出哪 10,000 个不幸者，都只剩下两个人。我的机会就从 $1/10,002$ 平白的大跃进到 $1/2$ 。

凭经验就知道这种想法是自欺欺人。世上若有这种免费午餐，人人都中彩票了。



回到故事里的场景。囚犯 B 问了国王一句话。心想，无论国王如何回答，他的机会都会从 $1/3$ 跳到 $1/2$ 。这个平白的小跃进和替代场景里的大跃进完全是同一个思路。如果觉得大跃进的想法可笑，但还坚持小跃进没错，那就好比“以五十步笑百步”。意思是说，两军交锋，有士兵溃逃，一个向后跑了五十步停了下来，另一个则退了一百步。那溃逃五十步的，就嘲笑一百步的。所以， $1/3$ 的概率不能平白跳到 $1/2$ 。结论是，国王是对的，囚犯 B 是错的。以下还有两种侧重于计量精确性的解释，也给出同样的结论，同时还为后续的故事做铺垫。





概率的数学符号是 $Prob\{\text{某事件}\}$ 。譬如说,

$$Prob\{B \text{ 抽中了幸运号码}\} = 1/3$$

还有一个较为复杂的符号 $Prob\{\text{某事件} \mid \text{某条件}\}$, 意思是在某条件之下某事件发生的概率。譬如说,

- $Prob\{B \text{ 的请求得到的回答是 } C \text{ 不幸} \mid A \text{ 抽中了幸运号码}\} = 1$
- $Prob\{B \text{ 的请求得到的回答是 } C \text{ 不幸} \mid B \text{ 抽中了幸运号码}\} = 1/2$
- $Prob\{B \text{ 的请求得到的回答是 } C \text{ 不幸} \mid C \text{ 抽中了幸运号码}\} = 0$

通常的条件概率里, 条件是作为事件发生的前提, 所以发生于较早前. 此时囚犯 B 存活的机会是:

$$Prob\{B \text{ 抽中了幸运号码} \mid B \text{ 的请求得到的回答是 } C \text{ 不幸}\}$$

这个条件概率的时间顺序有点别扭, 条件发生的时间反而晚于事件. 这种颠倒时序的条件概率叫作**后验概率** (Posteriori probability). 计算后验概率只需要中学程度的逻辑, 写成公式用到的数学符号却很繁杂, 不养眼, 叫作**贝叶斯定律** (Bayes rule).



醉驾公路网以卡通的形式计算后验概率, 返璞归真, 不需要数学符号. 公路网的地图显示, 入口在左端, 车流向右. 公路网内的醉驾者漫无目的地前行, 到达第一个分叉点, 醉驾者被轮流分发往**幸运A公路**、**幸运B公路**、**幸运C公路**. 其中进入**幸运B公路**的, 还会遇到第二个分叉点, 又被轮流分发往两个方向. 最终所有的醉驾者都去了两个终点站, 叫作**王说C站**和**王说A站**.

囚犯B存活的后验概率翻译成

$Prob\{\text{该马车当初走过幸运B公路} \mid \text{马车最终到达王说C站}\}$

理由如下.

- “马车最终到达王说C站”象征: 抽签之后的对答中, 国王说C不幸.
- “该马车”不是任何一辆马车, 而必须是最终到达王说C站的马车.
- “当初走过幸运B公路”象征: 囚犯B当初抽中幸运号码.

地图上显示, 一开始有六辆马车上路. 其中两辆进入**幸运A公路**、两辆进入**幸运B公路**、两辆进入**幸运C公路**.

如图所示，最终这六辆马车之中有三辆到达王说 C 站。任取这三辆之一，我们问：当初它经过幸运 B 公路的概率是多少？因为这三辆之中只有一辆当初经过幸运 B 公路，所以

$Prob\{\text{该马车当初走过幸运 B 公路} \mid \text{马车最终到达王说 C 站}\} = 1/3$
这又说明了国王是对的。

