线性代数
学习指导

第2版

谢政 陈挚 编著

清华大学出版社

线性代数

学习指导

第2版

谢政 陈挚 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是与谢政编著的《线性代数》(高等教育出版社，2012)相配套的辅导教材. 全书分为六章：线性方程组、矩阵、行列式、向量空间与线性空间、矩阵的相似化简、二次型. 每章包括基本要求、内容综述、疑难辨析、范例精讲、同步练习、单元测验(第1章和第5章除外)、习题选解共七个部分. 书末提供了四套往年期末考试试题，并给出了同步练习、单元测验和期末考试试题的参考解答.

本书既可以作为学生学习课程的辅导教材、考研复习的指导书，也可以供教师开设习题课或考研辅导课参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/谢政，陈挚编著. —2版. —北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-51282-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①谢… ②陈… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第215354号

责任编辑：佟丽霞 陈 明
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：董 瑾

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm 印 张：16.25 字 数：396千字
版 次：2012年10月第1版 2018年9月第2版 印 次：2018年9月第1次印刷
定 价：39.00元

产品编号：080528-01

前言

线性代数是高等院校非数学类本科生的一门重要的数学基础课程，也是全国硕士研究生入学统一考试的必考内容. 这门课程概念抽象，结论繁多，方法灵活，计算复杂，初学者普遍感到"看书抓不住重点，做题不知如何下手，证明题没思路，计算题出错误". 为了引导读者抓住重点、攻克难点、把握精髓、拓展视野，启迪他们发现问题、分析问题和解决问题，更好地巩固基础知识、掌握基本技能、领悟基本思想，我们编写了这本学习指导书.

本书分为六章：线性方程组、矩阵、行列式、向量空间与线性空间、矩阵的相似化简、二次型. 每章包括基本要求、内容综述、疑难辨析、范例精讲、同步练习、单元测验(第 1 章和第 5 章除外)、习题选解共七个部分.

基本要求是根据教育部审定的线性代数课程教学基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲提出的，它明确了需要掌握的知识点，并用"理解、了解、知道"或"掌握、熟悉、会"的次序表示对基本概念和基本理论或基本方法的不同要求，使读者能心中有数，有的放矢.

内容综述系统梳理了基本概念和基本理论，简略概括了基本知识点，突出了重点与难点，厘清了各知识点之间的联系，使读者能透视脉络，总览全局.

疑难辨析是本书的特色部分，针对重点、难点内容，容易混淆的概念，以及读者遇到的带有共性的困惑，编者将三十余载的教学精华很好地凝聚在一问一答之中，用通俗易懂但不失严谨的语言剖析每一个精心设计的疑难问题，有效地帮助读者走出"问不出问题，学不会知识"的窘境，澄清模糊认识，领会问题实质.

范例精讲是本书的重要部分，选取的例题少而精，且具有很强的典型性和示范性. 除了一些重点内容、常考内容和易错内容的例题外，还有一些对后继课程学习有指导意义的例题. 编者对主要题型进行了综合分类，对解题方法进行了归纳整理，通过分析解题思路，揭示解题规律，总结解题步骤，使读者能举一反三，触类旁通.

同步练习选编了一定数量的与范例精讲搭配的题目，希望读者能同步地、有针对性地进行自我训练，以巩固所学知识，掌握各种题型的解题技巧，增强独立解题能力.

单元测验要求读者在 150 分钟内独立完成，然后按照参考解答自行评分，以检查学习效果，发现学习中存在的问题，明确努力方向，提高应试能力.

习题选解对主教材中部分的(A)类习题和全部的(B)类习题，都给出了规范、详细的解答.

书末提供了四套往年期末考试试题，读者应在学完全部内容之后再做(其他要求与单元则验完全相同)，总体检验全书学习效果，同时为即将迎来的期末考试热身.

在内容综述、疑难辨析、范例精讲和习题选解四个部分中有不少评注，内容包括概念或定理的内涵与外延，相关概念或方法的异同，与已有概念或方法的类比，解题步骤的总结，方法的推广，题型的常用解法，例题的其他解法或证法，容易犯错之处等. 这些评注具有画龙点睛的作用，值得读者仔细研读、品味.

作为一本配套辅导教材，读者在认真阅读主教材的基础上再阅读本书效果会更好. 对于练习、习题和试题，读者必须先独立思考，自己动手解题，然后与题解对照比较，才可能达到理解基本概念和基本理论、掌握基本方法、训练数学思维的目的.

需要特别强调的是，本书中包含了 1987—2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及解答，分章别类，针对性强. 鉴于全书知识框架的完备性，恕不一一指出.

刘春林、文军、海昕、苏芳四位副教授参与了习题选解的编写，在此表示衷心的感谢.

我们真诚地希望同行和读者对本书提出宝贵的意见和建议.

编　者

2018 年 6 月

于国防科技大学

目录

第 1 章　线性方程组 …… 1
- 基本要求 …… 1
- 内容综述 …… 1
- 疑难辨析 …… 2
- 范例精讲 …… 4
- 同步练习 …… 7
- 习题选解 …… 8

第 2 章　矩阵 …… 14
- 基本要求 …… 14
- 内容综述 …… 14
- 疑难辨析 …… 18
- 范例精讲 …… 21
- 同步练习 …… 40
- 单元测验 …… 43
- 习题选解 …… 45

第 3 章　行列式 …… 58
- 基本要求 …… 58
- 内容综述 …… 58
- 疑难辨析 …… 60
- 范例精讲 …… 64
- 同步练习 …… 77
- 单元测验 …… 80
- 习题选解 …… 82

第 4 章　向量空间与线性空间 …… 92
- 基本要求 …… 92
- 内容综述 …… 92
- 疑难辨析 …… 97
- 范例精讲 …… 101
- 同步练习 …… 119

单元测验…………………………………………………………………… 122
习题选解…………………………………………………………………… 124
第5章 矩阵的相似化简………………………………………………… 143
基本要求…………………………………………………………………… 143
内容综述…………………………………………………………………… 143
疑难辨析…………………………………………………………………… 145
范例精讲…………………………………………………………………… 147
同步练习…………………………………………………………………… 161
习题选解…………………………………………………………………… 163
第6章 二次型…………………………………………………………… 179
基本要求…………………………………………………………………… 179
内容综述…………………………………………………………………… 179
疑难辨析…………………………………………………………………… 180
范例精讲…………………………………………………………………… 183
同步练习…………………………………………………………………… 195
单元测验…………………………………………………………………… 198
习题选解…………………………………………………………………… 200
期末考试………………………………………………………………… 208
期末考试题(一)…………………………………………………………… 208
期末考试题(二)…………………………………………………………… 211
期末考试题(三)…………………………………………………………… 213
期末考试题(四)…………………………………………………………… 215
同步练习参考解答……………………………………………………… 217
单元测验参考解答……………………………………………………… 236
期末考试参考解答……………………………………………………… 244

第 1 章

线性方程组

基本要求

1. 理解线性方程组的基本概念.
2. 知道线性方程组解的几何意义.
3. 熟悉阶梯方程组的回代法,了解线性方程组解的三种情况.
4. 掌握线性方程组的三种初等变换和消元法.

内容综述

一、线性方程组及其解

线性方程就是一次方程.

$m\times n$ 线性方程组是指 m 个含相同的 n 个未知量的线性方程所构成的组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零,则称此方程组为 $m\times n$ 齐次线性方程组;否则称为 $m\times n$ 非齐次线性方程组.

注 "组"不同于"集合",组中元素有序且允许重复,而集合中元素无序且相异.

用 W 表示线性方程组的解集,有相同解集的两个方程组称为同解方程组;若 $W\neq\varnothing$,则称该方程组是相容的或有解;若 $W=\varnothing$,则称该方程组为不相容的或矛盾的或无解.若 W 只含一个元素,则称该方程组有唯一解.W 中任何一个元素,称为该方程组的一个特解;W 中全部元素的一个通用表达式称为该方程组的通解或一般解.

二、二元和三元线性方程组的几何意义

二元线性方程组表示平面上若干条直线的交点,方程组有唯一解等价于所有直线交于一点;方程组有无穷多解等价于所有直线都重合;方程组无解等价于所有直线既不交于一点也不重合.

三元线性方程组表示空间中若干个平面的交点，方程组有唯一解等价于所有平面交于一点；方程组有无穷多解等价于所有平面重合或交于一条直线；方程组无解等价于所有平面没有公共交点.

三、阶梯方程组及其回代法

阶梯方程组应该满足如下两个条件：

(1) 若某个方程的未知量系数全为零，则它下方的所有方程的未知量系数均为零；

(2) 若某个方程中第一个系数不为零的未知量是 x_i，则它下方的所有方程中前 i 个未知量的系数全为零.

若阶梯方程组出现矛盾方程，则阶梯方程组无解. 否则，删去所有“0=0”的方程后，可选每个方程的第一个未知量为基本未知量，其余未知量均为自由未知量，即

自由未知量个数＝未知量个数－方程个数，

基本未知量个数＝方程个数.

从阶梯方程组中最后一个方程开始求解，逐次将所解得的基本未知量的值代入到前一个方程中，使得该方程只含一个基本未知量，从而可以求解，这就是回代法.

当未知量个数等于方程个数时，方程组有唯一解；当未知量个数大于方程个数时，方程组有无穷多解，可用自由未知量表示出其通解.

四、线性方程组的初等变换

(1) 对调变换ⓘ↔ⓙ：对调第 i 个与第 j 个方程的位置；

(2) 倍乘变换 kⓙ：以数 $k\neq 0$ 乘以第 j 个方程；

(3) 倍加变换ⓘ+kⓙ：将第 j 个方程的 k 倍加到第 i 个方程上.

三种初等变换的逆变换：

ⓘ↔ⓙ的逆变换是ⓘ↔ⓙ；

kⓙ的逆变换是$\frac{1}{k}$ⓙ；

ⓘ＋kⓙ的逆变换是ⓘ－kⓙ.

初等变换具有如下性质：

(1) 一个线性方程组经有限次初等变换得到的必是同解方程组，即有限次初等变换不改变方程组的解集.

(2) 任何一个线性方程组都可以经过有限次初等变换化成阶梯方程组.

利用初等变换逐次消去一些方程中的未知量，化一般线性方程组为阶梯方程组的过程称为消元.

用消元和回代两个过程求解线性方程组的方法称为消元法.

疑难辨析

问题 1　一个线性方程组经过初等变换后，出现“0＝0”的方程有什么含义？

答　对一个线性方程组做初等变换后，出现 k 个“0＝0”的方程，则表明线性方程组中有

k 个方程是多余的，即去掉这 k 个方程不会改变方程组的解集. 例如，在线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ x_2+\ 3x_3=1, \\ x_1-4x_2-\ 2x_3=3, \\ 2x_1+7x_2+11x_3=0 \end{cases}$$

中，将第一个方程的(-3)倍、第二个方程都加到第三个方程，得到方程 $0=0$，这说明该方程组的解完全由前两个方程确定，所以第三个方程可以去掉，即第三个方程是多余的.

问题 2 给定有限个平面，不画图能否确定这些平面的位置关系？

答 能. 例如，给定三个平面方程

$$\pi_1: x_1+x_2-x_3=2,$$
$$\pi_2: x_1+2x_2+x_3=3,$$
$$\pi_3: -x_1+2x_2+3x_3=1.$$

为了考查 π_1 与 π_2 的位置关系，只需将它们对应的两个方程联立成线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ x_2-x_3=2, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \end{cases}$$

做初等变换得阶梯方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-\ x_3=2, \\ \qquad x_2+2x_3=1, \end{cases}$$

即知方程组有无穷多解，故 π_1 与 π_2 相交. 同理 π_1 与 π_3，π_2 与 π_3 都相交.

将 π_1，π_2 和 π_3 对应的三个方程联立成线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ x_2-\ x_3=2, \\ x_1+2x_2+\ x_3=3, \\ -x_1+2x_2+3x_3=1, \end{cases}$$

通过初等变换得到阶梯方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-\ x_3=2, \\ \qquad x_2+2x_3=1, \\ \qquad\quad -4x_3=0, \end{cases}$$

方程组有唯一解 $x_1=1,x_2=1,x_3=0$，即三个平面 π_1，π_2 和 π_3 交于点$(1,1,0)$.

问题 3 线性方程组为何不会出现有 $k(1<k<\infty)$个解的情况？

答 下面以 $m\times 3$ 线性方程组为例给出几何解释. 在空间直角坐标系中，m 个方程组对应于 m 个平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m$，方程组的每个解对应于空间中一个点. 假如该方程组有 k 个解，$k\geqslant 2$，则空间中至少有两点 A 和 B 均在平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m$ 上，从而过 A，B 两点的直线 L 也在这 m 个平面，即直线 L 上的点都是该方程组的解，此与方程组只有有限个解相矛盾.

问题 4 当 $m<n$ 时，$m\times n$ 线性方程组的解会出现什么情况？

答 经过有限次初等变换可以将 $m\times n$ 线性方程组化成阶梯方程组，如果阶梯方程组中最后一个方程是“$0=d(d\neq 0)$”，则 $m\times n$ 线性方程组无解；如果最后一个方程含有未知量，则线性方程组有解，此时阶梯方程组中方程个数 $r\leqslant m$，从而 $r<n$，于是至少有一个自由未知量，故 $m\times n$ 线性方程组有无穷多解. 这表明 $m<n$ 时 $m\times n$ 线性方程组不会有唯一解.

问题 5 当线性方程组有无穷多解时，自由未知量可以任意选取吗？

答 不可以. 例如，对线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

做倍加变换②—2①，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_3 = -1, \end{cases}$$

这个 2×3 阶梯方程组有1个自由未知量，但 x_3 不能选作自由未知量，可选 x_1 或 x_2 为自由未知量. 为防止选错，可选阶梯方程组中每个方程的第一个未知量为基本未知量，余下的未知量就是自由未知量.

范例精讲

题型1　非齐次线性方程组的求解

例1　判断下列非齐次线性方程组是否有解.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

解　对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8, \end{cases} \xrightarrow[③-3②]{②-①} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{②-3① \\ ③+①}]{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8, \\ -10x_2 + 11x_3 = 34, \\ 0 = -6. \end{cases}$$

因第三个方程为矛盾方程，故该方程组无解.

例2　求下列非齐次方程组的通解：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13, \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5. \end{cases}$$

解　对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13, \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \end{cases} \to \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ 7x_2 - 7x_3 = 14, \\ 14x_2 - 14x_3 = 28, \\ 7x_2 - 7x_3 = 14, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - x_3 = 2, \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1, \\ x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

取 x_3 为自由未知量，从而求得方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 1, \\ x_2 = \quad x_3 + 2, \\ x_3 = \quad x_3, \end{cases} \quad x_3 \text{ 为任意数}.$$

注 消元法的一般步骤是：

(a) 将线性方程组做初等变换，化为阶梯方程组.

(b) 如果出现矛盾方程，则原方程组无解.

(c) 当线性方程组有解时，用回代法求出阶梯方程组的解.

题型 2 齐次线性方程组的求解

例 3 求下列齐次方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解 对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -4x_3 = 0, \\ -4x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

取 x_2, x_4 为自由未知量，从而方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_2 = \quad x_2, \\ x_3 = \quad 0, \\ x_4 = \quad x_4, \end{cases} \quad x_2, x_4 \text{ 为任意数}.$$

注 齐次线性方程组的解有两种情况：一是只有零解，即有唯一解；二是有非零解，从而有无穷多解.

题型 3 含参线性方程组的解的讨论

例 4 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

(1) k 取何值时，方程组无解？

(2) k 取何值时，方程组有唯一解？

(3) k 取何值时，方程组有无穷多解？并求方程组的通解.

解 对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ (k+1)x_2 + (k+1)x_3 = k^2 + 4, \\ -2x_2 + (2-k)x_3 = -8, \end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\2x_2+(k-2)x_3=8,\\\frac{1}{2}(k+1)(4-k)x_3=k(k-4).\end{cases}$$

(1) 当 $k=-1$ 时,方程组无解;

(2) 当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时,方程组有唯一解.对方程组继续做初等变换,得

$$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\2x_2+(k-2)x_3=8,\\\frac{1}{2}(k+1)(4-k)x_3=k(k-4),\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{k^2+2k}{k+1},\\x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1},\\x_3=-\frac{2k}{k+1}.\end{cases}$$

因此方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{k^2+2k}{k+1},x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1},x_3=-\frac{2k}{k+1}.$$

(3) 当 $k=4$ 时,方程组有无穷多解,此时方程组化为

$$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3=4,\\x_2+x_3=4,\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1+3x_3=0,\\x_2+x_3=4,\end{cases}$$

取 x_3 为自由未知量,从而方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=-3x_3,\\x_2=-x_3+4,\\x_3=x_3.\end{cases}\quad x_3\text{ 为任意数.}$$

注 含参线性方程组解的讨论方法归纳如下:

(a) 对线性方程组做初等变换,将其化为阶梯方程组.

(b) 根据参数的不同取值,讨论方程组是无解、有唯一解还是有无穷多解.

例5 设有线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2.\end{cases}$$

问当 a,b 取何值时,方程组有解,并求方程组的通解.

解 对方程组做初等变换,得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2,\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\0=b-3a,\\0=1-a.\end{cases}$$

当 $a=1$ 且 $b=3$ 时,方程组有无穷多解.此时方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3,\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1-x_3-x_4-5x_5=-2,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=1,\end{cases}$$

取 x_3,x_4,x_5 为自由未知量,从而方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 2, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 1, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4, \\ x_5 = x_5, \end{cases} \quad x_3,x_4,x_5 \text{ 为任意数.}$$

注 4×5 线性方程组不会有唯一解,参见本章疑难辨析中问题 4.

同步练习

1. 填空题

(1) 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 10, \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ 的解为________.

(2) 齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 的通解中含自由未知量的个数为______.

(3) 设方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解,则 $k=$______.

(4) 设方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + (a+8)x_3 = 8, \end{cases}$ 当 $a=$______时,方程组无解.

(5) 若方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2\lambda \end{cases}$ 有解,则 $\lambda=$______.

2. 已知平面上三条不同的直线方程分别为

$$l_1: x_1 - 2x_2 = 0, \quad l_2: x_1 + 2x_2 = 4, \quad l_3: x_1 - x_2 = a,$$

问 a 取何值时三条直线交于一点?

3. 求下列非齐次方程组的通解:

(1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$

4. 求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

5. 讨论当 a,b 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+bx_2+x_3=0, \\ x_1+2bx_2+x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？并求出该方程组的所有解.

6. 讨论当 a,b 取何值时，非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ x_2+(3-a)x_3+2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解？在方程组有解时，求出该方程组的所有解.

7. 在光合作用下，植物利用太阳光的辐射能量把二氧化碳(CO_2)和水(H_2O)转化成葡萄糖($C_6H_{12}O_6$)和氧气(O_2)，其化学反应方程式为

$$x_1CO_2+x_2H_2O \longrightarrow x_3C_6H_{12}O_6+x_4O_2,$$

试确定 x_1,x_2,x_3 和 x_4，将方程式配平.

习题选解

(A)

4. 已知 $A(1,-5)$，$B(-1,1)$ 和 $C(2,7)$ 三点位于抛物线 $p(x)=ax^2+bx+c$ 上，求参数 a,b,c，并确定抛物线方程.

解 将 A,B 和 C 三点的坐标分别代入抛物线表达式，得到如下关于 a,b,c 的线性方程组

$$\begin{cases} a+b+c=-5, \\ a-b+c=1, \\ 4a+2b+c=7, \end{cases}$$

解方程组得 $a=5,b=-3,c=-7$. 从而抛物线方程为 $p(x)=5x^2-3x-7$.

5. 燃烧丙烷(C_3H_8)时，丙烷与氧气(O_2)发生反应生成二氧化碳(CO_2)和水(H_2O)，其方程式为

$$C_3H_8+O_2 \longrightarrow CO_2+H_2O,$$

请配平上述方程式.

解 设方程式中 C_3H_8、O_2、CO_2 和 H_2O 的系数分别为 x_1,x_2,x_3,x_4，因为方程式左右两端 C、H、O 的原子数对应相等，所以有

$$\begin{cases} 3x_1=x_3, \\ 8x_1=2x_4, \\ 2x_2=2x_3+x_4, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 3x_1-x_3=0, \\ 8x_1-2x_4=0, \\ 2x_2-2x_3-x_4=0, \end{cases}$$

用消元法求得通解

$$x_1=k, \quad x_2=5k, \quad x_3=3k, \quad x_4=4k, \quad k \text{ 为任意数}.$$

取 $k=1$，得配平后的方程式 $C_3H_8+5O_2=3CO_2+4H_2O$.

(B)

6. 以三元线性方程组为例直接说明：若一个线性方程组有两个不同的解，则必有无穷多解.

解 对于给定的 $m\times 3$ 线性方程组，在空间直角坐标系中，m 个方程组对应于 m 个平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m$，方程组的每个解对应于空间中一个点. 设该方程组有两个解，即空间中有两点 A 和 B 均在平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m$ 上，从而过 A,B 两点的直线也在这 m 个平面上，于是该方程组有无穷多解.

7. 对于空间中任意给定的三个平面，讨论它们的各种位置关系，并指出它们的公共点的数量.

解 空间中平面方程为一个三元线性方程，这三个平面的公共点与三个线性方程构成的方程组的解相对应，因此有下面的结果.

(1) 方程组无解当且仅当三平面无公共交点.

此时，或三个平面两两平行，或其中两个平面平行而第三个平面与前两个平面相交，或三个平面两两相交但无公共交点.

(2) 方程组有唯一解当且仅当三平面仅有一个公共交点.

此时，三个平面交于一点.

(3) 方程组有无穷多解当且仅当三平面有无穷多个公共交点.

此时，或三平面相交于一条公共直线，或三个平面重合.

8. 试问参数 t 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ x_1+x_2+tx_3=4, \\ x_1-tx_2-x_3=-t^2 \end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷多解？

解 对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ x_1+x_2+tx_3=4, \\ x_1-tx_2-x_3=-t^2, \end{cases} \to \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_2+(t-2)x_3=8, \\ (1-t)x_2-3x_3=4-t^2, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_2+(t-2)x_3=8, \\ (t-4)(t+1)x_3=2t(4-t). \end{cases}$$

当 $t=4$ 时，对原线性方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_2+2x_3=8, \end{cases} \to \begin{cases} x_1=-3x_3, \\ x_2=-x_3+4, \end{cases}$$

故方程组有无穷多解.

当 $t=-1$ 时，线性方程组变为

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_2-3x_3=8, \\ 0=-10, \end{cases}$$

方程组中出现矛盾方程，故方程组无解.

综上，当 $t=-1$ 时，该线性方程组无解；当 $t=4$ 时，该线性方程组有无穷多解；当 $t\neq 4$ 且 $t\neq -1$ 时，该方程组有唯一解.

9. 讨论参数 a 取何值时，使得线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+ax_2+x_3=a, \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$$

的解中每个未知量的取值都是正整数.

解 对线性方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+ax_2+x_3=a, \\ x_1+x_2+ax_3=a^2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1-a)x_2+(1-a^2)x_3=1-a^3, \\ (a-1)x_2+(1-a)x_3=a-a^2, \\ x_1+x_2+ax_3=a^2, \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+ax_3=a^2, \\ (a-1)x_2-(a-1)x_3=-a(a-1), \\ -(a-1)(a+2)x_3=-(a-1)(a+1)^2. \end{cases}$$

当 $a=-2$ 时，方程组无解.

当 $a=1$ 时，方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=-x_2-x_3+1, \\ x_2=x_2, \\ x_3=x_3, \end{cases}$$

此时线性方程组的解中每个未知量的取值不可能同时为正整数.

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时，原方程组可化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=a^2, \\ x_2-x_3=-a, \\ x_3=\dfrac{(a+1)^2}{a+2}, \end{cases}$$

经过回代，得到方程组的唯一解

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{a+1}{a+2}, \\ x_2=\dfrac{1}{a+2}, \\ x_3=\dfrac{(a+1)^2}{a+2}. \end{cases}$$

若解中每个未知量的取值均为正整数，必有 $a+1<0$ 且 $a+2>0$，即 $-2<a<-1$. 又由 $-\dfrac{a+1}{a+2}$ 和 $\dfrac{(a+1)^2}{a+2}$ 为正整数可知 $a+1$ 为整数，即 a 为整数，矛盾！故此时亦无法保证线性方程组的解向量中每个未知量的取值均为正整数.

综上所述，无论参数 a 取何值，均不能使得方程组的解中每个未知量的取值都是正整数.