世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

微积分(下册)
学习辅导与习题解答

（经管类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

微积分（下册）
学习辅导与习题解答
（经管类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

微积分（经管类·第五版）（下册）学习辅导与习题解答/吴赣昌主编.
—北京：中国人民大学出版社，2018.9
21世纪数学教育信息化精品教材　大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-26064-8

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第186206号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
微积分（下册）学习辅导与习题解答
（经管类·第五版）
吴赣昌　主编
Weijifen (Xiace) Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　　格	148 mm×210 mm　32开本	**版　　次**	2018年9月第1版
印　　张	8.125	**印　　次**	2018年9月第1次印刷
字　　数	303 000	**定　　价**	35.00元

前言

人大版“21 世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新型“立体化教材”。教材自出版以来，历经多次升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育在新时代的教育改革要求，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国 600 余所高等院校广泛采用。

作者本次启动的“大学数学立体化教材”（第五版）的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件，为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境。

作者本次关于“大学数学立体化教材”（第五版）的改版具体包括：面向普通本科院校的“理工类·第五版”、“经管类·第五版”与“纯文科类·第四版”；面向普通本科少学时或三本院校的“理工类·简明版·第五版”与“经管类·简明版·第五版”；面向专升本或高职本科的“综合类·应用型本科版”；面向高职高专院校的“理工类·高职高专版·第四版”、“经管类·高职高专版·第四版”与“综合类·高职高专版·第三版”。

本次改版的指导思想：为帮助教材用户更好地理解教材中重要的概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验，包括数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D 函数图形实验、3D 函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等。与教材正文所举示例相比，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大。本系列教材于 2017 年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验。其中，大部分实验都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中。

为方便同学们使用最新版“大学数学立体化教材”，学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”。该系列教辅书均根据教材章节顺序建设了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的主要知识归纳、典型例题分析与习题解答等内容，而每一章的设计中包括了

该章的教学基本要求、知识点网络图、题型分析与总习题解答。上述设计有助于学生在课后自主研读这些教辅书时，更好更快地掌握所学知识，从而在较短时间内取得好成绩。

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了。事实上，你需要在课后花更多时间主动去做相关训练，才能真正掌握所学知识。而在课后的自学与练习过程中，首先要认真、反复地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解。

与传统的教材与教辅建设缺乏教学互动不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者团队，通过数苑网（www. sciyard. com）为本系列教材的用户提供在线学习服务。另外，用户还可扫描下方二维码并关注“数苑”公众号，通过在线学习栏目获得相关在线服务。

吴赣昌

2018 年 2 月 26 日

目　　录

第 6 章　多元函数微积分

在前面几章中，我们讨论的函数都只是一个自变量，这种函数称为一元函数. 但在许多实际问题中，我们往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是要考虑一个变量（因变量）与另外多个变量（自变量）的相互依赖关系，因此引出了多元函数和多元函数微积分问题. 本章将在一元函数微分学的基础上，进一步讨论多元函数微分学. 讨论中将以二元函数为主要对象，这不仅因为二元函数的有关概念和方法大都有比较直观的解释，便于理解，而且因为这些概念和方法大都能自然推广到二元以上的多元函数.

本章教学基本要求：

1. 了解空间坐标系的有关概念，会求两点之间的距离；
2. 了解平面上点的邻域、区域以及其边界点、内点等的概念；
3. 了解多元函数的概念，了解二元函数的表示法与几何意义；
4. 了解二元函数的极限与连续的直观意义；
5. 理解多元函数的偏导数与全微分的概念，了解二元函数的线性化近似，熟练掌握求偏导数与全微分的方法，掌握求多元函数偏导数以及隐函数的偏导数的方法；
6. 了解二元函数极值与条件极值的概念，掌握二元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值与最小值，会求解一些简单的应用题；
7. 了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分在直角坐标系与极坐标系下的计算方法，会计算无界区域上的较简单的二重积分.

§6.1　空间解析几何简介

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 6-1-1 和表 6-1-2.

表 6-1-1　　空间直角坐标系的概念

坐标系	过空间一点 O，按右手规则作三条相互垂直的数轴：x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），这样的三条坐标轴称为一个空间直角坐标系，点 O 称为坐标原点.

坐标面	由 x 轴与 y 轴所确定的平面称为 xOy 坐标面； 由 y 轴与 z 轴所确定的平面称为 yOz 坐标面； 由 x 轴与 z 轴所确定的平面称为 xOz 坐标面.
卦限	三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为卦限，分别称为第Ⅰ至第Ⅷ卦限.
点的坐标	空间上任意点 M 在三条坐标轴上的投影 P，Q，R 在各自轴上的坐标记为 x，y，z，则点 M 与有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应关系，称 (x, y, z) 为点 M 的坐标，点 M 称为以 (x, y, z) 为坐标的点.
两点之间距离公式	设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，则 M_1 与 M_2 之间的距离为 $$d=\lvert M_1M_2\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

表 6-1-2　　**平面方程**

点法式	设平面 Π 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$，则 Π 的方程为 $$\Pi: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$
一般式	$$\Pi: Ax+By+Cz+D=0,$$ 其中 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ 为 Π 的法向量.
截距式	$$\Pi: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$ 其中 a，b，c 分别为 Π 在 x 轴，y 轴，z 轴上的截距.
两平面间的关系	设 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$， $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$， Π_1 与 Π_2 之间的夹角为 θ，则 (1) $\cos\theta=\dfrac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$； (2) $\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$； (3) $\Pi_1/\!/\Pi_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=0$. 特别当 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ 时，Π_1 与 Π_2 重合.
点到平面的距离	点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为 $$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

二、典型例题分析

例 1　已知 $A(1, 2, 3)$，$B(2, -1, 4)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解　设垂直平分面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为 $\overrightarrow{AB}$，即 $\boldsymbol{n}=(1,\ -3,\ 1)$，又平面过 A，B 的中点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$，故所求平面方程为

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)-3\left(y-\frac{1}{2}\right)+\left(z-\frac{7}{2}\right)=0,\ \text{即}\ x-3y+z-\frac{7}{2}=0.$$

小结：该例题从线与面的关系考虑.

例 2　求通过点 $P(2,\ -1,\ -1)$，$Q(1,\ 2,\ 3)$ 且垂直于平面 $2x+3y-5z+6=0$ 的平面方程.

解　设所求平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad ①$$

则其法向量 $\vec{n}\perp\{2,\ 3,\ -5\}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{PQ}=\{-1,\ 3,\ 4\}$，

$$\therefore \begin{cases}2A+3B-5C=0\\-A+3B+4C=0\end{cases}\Rightarrow A=-9B,\ C=-3B,$$

取 $B=-1\Rightarrow\vec{n}=\{9,\ -1,\ 3\}$，以点 $P(2,\ -1,\ -1)$ 代入方程①得

$$2A-B-C+D=0\Rightarrow D=-16,$$

故所求平面方程为

$$9x-y+3z-16=0.$$

例 3　求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$，使其过点 $A(0,\ 1,\ 0)$，$B(-3\sqrt{3},\ 2,\ 0)$ 和 $C(0,\ -3,\ 4\sqrt{2})$，并指出曲面名称.

解　由于过 A，B，C，故

$$\begin{cases}b=1\\27a+4b=1,\\9b+32c=1\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{1}{9}$，$b=1$，$c=-\frac{1}{4}$，即曲面为

$$-\frac{x^2}{9}+y^2-\frac{z^2}{4}=1,$$

为双叶双曲面.

三、习题 6-1 解答

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：

$A(1, -2, 3)$；　　　　$B(2, 3, -4)$；

$C(2, -3, -4)$；　　　　$D(-2, -3, 1)$.

解　想象各点及各卦限在空间中的位置，易知上列各点依次在第Ⅳ，Ⅴ，Ⅷ，Ⅲ卦限.

2. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？并指出下列各点的位置：

$A(3, 4, 0)$；　　　　$B(0, 4, 3)$；

$C(3, 0, 0)$；　　　　$D(0, -1, 0)$.

解　在 xOy、yOz、zOx 坐标面上的点的坐标中有一个为零，依次是 $z=0$，$x=0$ 与 $y=0$；在 x、y、z 轴上点的坐标中有两个坐标为零，依次为 $y=z=0$，$x=z=0$ 与 $x=y=0$.

本题所给四点依次在 xOy 面上、yOz 面上、x 轴上和 y 轴上.

3. 求点 (a, b, c) 关于 (1) 各坐标面，(2) 各坐标轴，(3) 坐标原点的对称点的坐标.

解　(1) 求关于坐标平面对称点的坐标，只需将原坐标中的一个坐标改为相反数，使得两对称点的连线垂直于该坐标平面.

点 (a, b, c) 关于 xOy，yOz，zOx 面的对称点依次是：$(a, b, -c)$，$(-a, b, c)$，$(a, -b, c)$.

(2) 关于各坐标轴的对称点可看成连续对两个坐标面施行了对称变换的结果，由 (1) 知，这时须将原三个坐标中的两个改成相反数.

点 (a, b, c) 关于 x、y、z 轴的对称点依次是：$(a, -b, -c)$，$(-a, b, -c)$，$(-a, -b, c)$.

(3) 求关于原点的对称点的坐标，则须把原坐标的三个数都改成相反数，(a, b, c) 关于原点的对称点的坐标是 $(-a, -b, -c)$.

4. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，求出各垂足的坐标.

解　作坐标面的垂线，垂足在该坐标面上，因此对应的那个坐标为零. 例如：过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 依次引 xOy，yOz，zOx 面垂线的垂足，其坐标依次为

$$(x_0, y_0, 0), (0, y_0, z_0), (x_0, 0, z_0).$$

而坐标轴上的点有两个坐标为零. 因此，垂足在各坐标轴上，另两个坐标应为零. 于是，过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 作 x、y、z 轴垂线，垂足坐标依次是

$$(x_0, 0, 0), (0, y_0, 0), (0, 0, z_0).$$

5. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

解　过点 M 向各坐标轴作垂线，垂足依次是：$N_1(4, 0, 0)$，$N_2(0, -3, 0)$，$N_3(0, 0, 5)$. 因此 M 到各坐标轴的距离依次为

$$d_x=|N_1M|=\sqrt{0+(-3)^2+5^2}=\sqrt{34};$$
$$d_y=|N_2M|=\sqrt{4^2+0+5^2}=\sqrt{41};$$
$$d_z=|N_3M|=\sqrt{4^2+(-3)^2+0}=5.$$

6. 一动点与两定点（2，3，1）和（4，5，6）等距离，求该动点的轨迹方程.

解 设该动点坐标为 (x, y, z)，则

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2,$$

∴ $$-4x-6y-2z+14=-8x-10y-12z+77,$$

即 $$4x+4y+10z-63=0,$$

此即所求轨迹的方程.

注：通常我们略去了验证前述问题中“不在曲面上的点的坐标都不满足方程”这一工作，以下同.

7. 求以点 $O(1, 3, -2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程.

解 先求半径，设球面半径为 R，因为球面通过原点，所以

$$R=\sqrt{(1-0)^2+(3-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{14},$$

故所求球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14,$$

即 $$x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0.$$

8. 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x=2$；　(2) $y=x+1$；

(3) $x^2+y^2=4$；　(4) $x^2-y^2=1$.

解 见下表：

方程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=2$	平行于 y 轴的直线	平行于 yOz 面的平面
$y=x+1$	斜率为 1 的直线	平行于 z 轴的平面
$x^2+y^2=4$	圆心在原点、半径为 2 的圆	以 z 轴为中心轴、半径为 2 的圆柱面
$x^2-y^2=1$	两半轴均为 1 的双曲线	母线平行于 z 轴的双曲柱面

9. 指出下列各方程表示哪种曲面：

(1) $x^2+y^2+z^2=1$；　(2) $x^2+y^2-2z=0$；　(3) $x^2-y^2=0$；

(4) $x^2+y^2=0$；　(5) $xyz=0$；　(6) $y-\sqrt{3}z=0$；

(7) $y^2-4y+3=0$;　　(8) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$;　　(9) $x^2-\frac{y^2}{9}=1$;

(10) $x^2=4y$;　　(11) $z^2-x^2-y^2=0$.

解　(1) 球面;　　(2) 旋转抛物面;　　(3) 两相交平面;

(4) z 轴;　　(5) 三坐标平面;　　(6) 过 x 轴的平面;

(7) 两平行平面;　　(8) 椭圆柱面;　　(9) 双曲柱面;

(10) 抛物柱面;　　(11) 圆锥面.

10. 方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\\ y=3\end{cases}$ 在平面解析几何与空间解析几何中各表示什么?

解　在平面解析几何中，方程组表示椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 与其一水平切线 $y=3$ 的交点 (0, 3).

在空间解析几何中，方程组表示椭圆柱面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 与其一切平面 $y=3$ 的交线

$$\begin{cases}x=0\\ y=3\end{cases}.$$

11. 求曲面 $x^2+9y^2=10z$ 与 yOz 平面的交线.

解　根据旋转曲面的定义，可见方程 $x^2+9y^2=10z$ 表示旋转抛物面. yOz 平面的方程为 $x=0$，代入得到 $y^2=\frac{10}{9}z$，从而所求交线的方程为

$$\begin{cases}y^2=\frac{10}{9}z\\ x=0\end{cases}.$$

12. 指出下列各方程组表示什么曲线:

(1) $\begin{cases}x+2=0\\ y-3=0\end{cases}$;　　(2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=20\\ z-2=0\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}x^2-4y^2+9z^2=36\\ y=1\end{cases}$;　　(4) $\begin{cases}x^2-4y^2=4z\\ y=-2\end{cases}$.

解　(1) 方程组表示两平面的交线: $\begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases}$.

(2) 表示球面 $x^2+y^2+z^2=20$ 与平面 $z-2=0$ 的交线.

$$\begin{cases}x^2+y^2=16\\ z=2\end{cases}\text{(圆)}.$$

(3) 表示单叶双曲面 $x^2-4y^2+9z^2=36$ 与平面 $y=1$ 的交线.

$$\begin{cases}x^2+9z^2=40\\ y=1\end{cases}\text{(椭圆)}.$$

(4) 表示双曲抛物面 $x^2-4y^2=4z$ 与平面 $y=-2$ 的交线.

$$\begin{cases}x^2-16=4z\\ y=-2\end{cases}\text{(抛物线)}.$$

13. 指出下列各平面的特殊位置:

(1) $x=0$; (2) $3y-1=0$;

(3) $2x-3y-6=0$; (4) $x-\sqrt{3}y=0$;

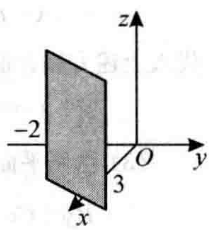
(5) $y+z=1$; (6) $x-2z=0$;

(7) $6x+5y-z=0$.

解 (1) $x=0$ 表示 yOz 平面.

(2) $3y-1=0$,即 $y=1/3$,在 xOy 平面上,它是直线;在空间,它是在 y 轴上截距为 1/3 且平行于 xOz 平面的平面.

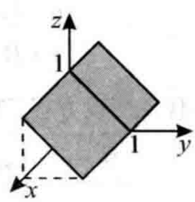
(3) 将原方程化为 $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$,在 xOy 平面上,它是截距分别为 3 和 -2 的直线;在空间,它是过该直线且平行于 z 轴的平面. 如题 13(3) 图所示.



题 13 (3) 图

(4) $x-\sqrt{3}y=0$,即 $x=\sqrt{3}y$,在 xOy 平面上是过原点的直线;在空间,它表示过该直线和 z 轴的平面.

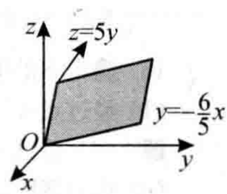
(5) $y+z=1$,在 yOz 平面上是截距都为 1 的直线;在空间,它是过该直线且平行于 x 轴的平面. 如题 13(5) 图所示.



题 13 (5) 图

(6) 即 $x=2z$,它在 xOz 平面上是过原点的直线;在空间它是过该直线和 y 轴的平面.

(7) 平面 $6x+5y-z=0$,过原点,它与 xOy、yOz 平面的交线为 $\begin{cases}y=-\frac{6}{5}x\\ z=0\end{cases}$,$\begin{cases}z=5y\\ x=0\end{cases}$. 如题 13(7) 图所示.



题 13 (7) 图

14. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 xOy 面且经过点 $(2,-5,3)$.

(2) 通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$ 的平面方程.

(3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$.

解　(1) 因所求平面平行于 xOy 面，故设所求平面方程为

$$Cz+D=0,$$

又平面经过点 $(2, -5, 3)$，代入上述方程，得

$$3C+D=0 \Rightarrow D=-3C,$$

从而所求平面为

$$z-3=0.$$

(2) 可先设该平面方程为

$$Ax+By=0,$$

以 $(-3, 1, -2)$ 代入，得

$$-3A+B=0, \text{ 即 } B=3A,$$

代入上述方程并消去 A，得所求平面方程为

$$x+3y=0.$$

(3) 由于平面平行于 Ox 轴，故可设所求平面方程为

$$By+Cz+D=0,$$

又平面经过两点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$，代入上述方程得

$$\begin{cases} 0 \cdot B-2C+D=0 \\ 1 \cdot B+7C+D=0 \end{cases} \Rightarrow B=-\frac{9}{2}D,\ C=\frac{D}{2},$$

代入所设方程，得

$$-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0,$$

显然 $D \neq 0$，消去 D，并整理得所求平面方程

$$9y-z-2=0.$$

15. 确定 k 的值，使平面 $x+ky-2z=9$ 满足下列条件之一：

(1) 经过点 $(5, -4, -6)$.　　　　(2) 在 y 轴上的截距为 -3.

解　(1) 将已知点代入题设方程可得 $k=2$.

(2) 化为截距式，得

$$\frac{x}{9}+\frac{y}{9/k}+\frac{z}{-9/2}=1,$$

由题设　$9/k=-3 \Rightarrow k=-3$.

§6.2　多元函数的基本概念

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 6-2-1 和表 6-2-2.

表 6-2-1　　**平面区域的概念**

邻域		$P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上一点，δ 为某正数，则点集 $U(P_0, \delta)=\{P(x, y) \mid \lvert PP_0\rvert<\delta\}$ 称为 P_0 的 δ 邻域. 点集 $\mathring{U}(P_0, \delta)=\{P(x, y) \mid 0<\lvert PP_0\rvert<\delta\}$ 称为 P_0 的 δ 去心邻域.
内点		D 是 xOy 平面上的点集，P_0 为一点. 若存在 $\delta>0$，使 $U(P_0, \delta)\subset D$，则称 P_0 是 D 的内点.
外点		D 是 xOy 平面上的点集，P_0 为一点. 若存在 $\delta>0$，使 $U(P_0, \delta)\cap D=\varnothing$（$\varnothing$表示空集），则称 P_0 是 D 的外点.
边界点		D 是 xOy 平面上的点集，P_0 为一点. 若对 $\forall\delta>0$，$U(P_0, \delta)$ 内既有属于 D 的点，又有不属于 D 的点，则称 P_0 是 D 的边界点.
边界		平面点集 D 的边界点全体称为 D 的边界.
开集		若平面点集 D 中的点都是 D 的内点，则称 D 是开集.
区域	连通集	若 D 内任意两点都可用 D 中折线连接，则称 D 为连通集.
	开区域	连通的开集为开区域.
	闭区域	开区域加上边界称为闭区域.
	有界闭区域	若闭区域包含在某个以原点为圆心的圆内，则称 D 为有界闭区域.

说明：D 的内点必属于 D，D 的外点必不属于 D，D 的边界点可能属于 D 也可能不属于 D.

表 6-2-2　　**多元函数及其极限与连续的概念**

二元函数及图形	设 D 是 $R^2=R\times R$ 上的一个非空子集，称映射 $f: D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数，记为 $z=f(x, y), (x, y)\in D$, 其中点集 D 称为该函数 f 的定义域，x，y 称为自变量，z 称为因变量，$f(D)=\{z \mid z=f(x, y), (x, y)\in D\}$ 称为函数 f 的值域，空间点集 $\{(x, y, z) \mid z=f(x, y), (x, y)\in D\}$ 称为函数的图形.

极限	设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点. 若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<\|PP_0\|<\delta$，且 $P(x, y)\in D$ 时，恒有 $\|f(P)-A\|=\|f(x, y)-A\|<\varepsilon$，则称函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$ 时以 A 为极限，记为 $$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x, y)=A \text{ 或 } \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A.$$
连续	(1) 设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点，$P_0\in D$. 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$，则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续，$P_0(x_0, y_0)$ 称为函数 $f(x, y)$ 的连续点. (2) 若函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称函数 $f(x, y)$ 是 D 内的连续函数.
连续函数的性质	(1) 有界闭区域上的连续函数必有最大值与最小值； (2) 有界闭区域上的连续函数必有界； (3) 有界闭区域上的连续函数必可取到介于最大值与最小值之间的任何值.

要点说明：

(1) 以上概念都可推广到三元及三元以上函数.

(2) 函数可理解为点的函数，一元函数的自变量 x 在直线上变化，故一元函数为直线上动点 x 的函数，二元函数的两个自变量 x，y 是独立变化的，它的定义域为平面点集，故二元函数为平面上的动点 $P(x, y)$ 的函数，可记为 $z=f(P)$.

(3) 由点的函数理解二重极限，即为当动点 $P(x, y)$ 以任何方式无限接近于定点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，相应的函数值 $f(P)$ 无限接近于固定常数 A，故可记 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

二、典型例题分析

例 1　指出下列各区域是哪类区域.

(1) $\left\{(x, y)\,\middle|\,\dfrac{1}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\right\}$；

(2) $\{(x, y)\,|\,x+y>0\}$；

(3) $\{(x, y)\,|\,y-x>0,\ x\geqslant 0,\ x^2+y^2<1\}$；

(4) $\{(x, y)\,|\,x^2-2x-y\geqslant -1\}$；

(5) $\{(x, y)\,|\,0<x^2+4x-y<4\}$；

(6) $\{(x, y)\,|\,\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 1\}$；

(7) $\{(x, y)\,|\,1<\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{25}<4\}$；

(8) $\{(x, y)\,|\,1\leqslant x-4y\leqslant 5\}$.

解　(1) 有界闭区域；

(2) 无界开区域；

(3) 非开非闭有界区域；