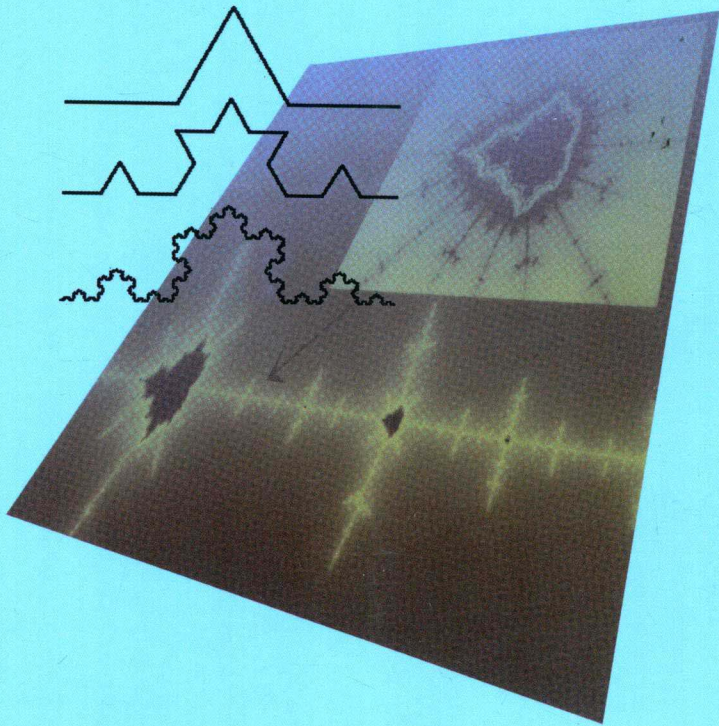
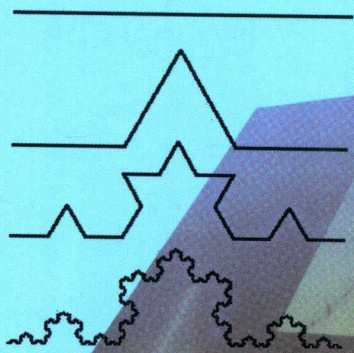


# 分形几何学

(第二版)

陈颢 陈凌 编著



地震出版社

# 分形几何学

(第二版)

陈 颢 陈 凌 编著

地 震 出 版 社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

分形几何学/陈颢, 陈凌编著. —2 版. —北京: 地震出版社, 2018. 1

ISBN 978-7-5028-4898-9

I. ①分… II. ①陈… ②陈… III. ①分形学—高等学校—教材 IV. ①O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 298878 号

地震版 XM4094

## 分形几何学 (第二版)

陈 颢 陈 凌 编著

责任编辑: 刘晶海

责任校对: 孔景宽

---

出版发行: 地震出版社

北京市海淀区民族大学南路 9 号

邮编: 100081

发行部: 68423031 68467993

传真: 88421706

门市部: 68467991

传真: 68467991

总编室: 68462709 68423029

传真: 68455221

<http://www.dzpress.com.cn>

经销: 全国各地新华书店

印刷: 北京鑫丰华彩印有限公司

---

版 (印) 次: 2018 年 1 月第二版 2018 年 1 月第一次印刷

开本: 787×1092 1/16

字数: 266 千字

印张: 18.5

印数: 0001~2000

书号: ISBN 978-7-5028-4898-9/O (5601)

定价: 58.00 元

版权所有 翻印必究

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

# 序

复杂性一直是各种学科面临的共同问题之一。

传统科学能准确地预测日食、月食的出现和行星的碰撞，但科学家们也同时发现：世界上没有两次台风的途径是完全一样的，没有两次厄尔尼诺现象的过程完全是一样的，也没有两次地震所表现出的前兆是一样的。事物本质上的复杂性问题，仿佛到了20世纪末才被人们重视起来。传统科学上的难题，只有靠不断创新来解决。

描述复杂现象的一个引人注目的动态，就是分形几何的出现。复杂现象的背后往往存在着一些简单的规律；反过来，利用简单的规则，外加一些灵活的约束，可以产生出万花筒般千变万化的复杂现象。

由Mandelbrot这位奇才倡议的分形几何，成为了众多学科的热门话题。分形几何像一个魔术师，似乎给众多的复杂现象找到了简单的普适性的答案。于是，无数的论文、专著、期刊像雪片般问世了，其中不乏创新之作，但也混杂了不少赶时髦的作品。今天，分形几何的发展已不像前10年了，它正处于一个十字路口，有可能发展，也有可能衰亡。本书就是在这个时期写的一本科普教科书。

已经出版了许多关于分形的书，读者可以在本书后的参考书目中找到。但本书的目的，则是希望在深入与普及、发展与衰亡中开辟一条出路，把这个严肃的问题提交给广大读者。

自从20世纪90年代开始，我在中国科学院研究生院（北京）讲授了“分形几何”的研究生课程。由于不断更新讲稿，文献看了不少，同意的却不多，自行其是，有不少怪异的观点。如果说一本书也有其关键词的话，则这本书的关键词一是分形与演化（迭代函数与各种演化过程）；二是有限样本的统计分形。在这两个方面，书

中记录了我在研究工作中的体会和教训。

1998年地震出版社曾出版了《分形几何学》一书，最初的设想是用来作为研究生的教材和参考书，但实际的读者面则远远超出了研究生的范围，很快这本书就用完了。这次出版，在原来的基础上作了较大的改动。一是增加了本书的可读性，不是过多的讲数学，而是突出复杂性中的问题；二是根据最近几年的学科进展，加入了一章“小波理论及形研究中的应用”及一部分“分形和计算机”的内容。再次出版《分形几何学》修订版的目的，也是为了进一步将这门已经深入到各个学科的横断科学向更多的读者推广，使各个学科相互联系，互相推进，将分形与其他学科的发展紧密联系起来。

罗桂纯同志系统地整理了全书的文稿和插图，改绘了插图和更新了部分参考文献；李娟博士提供了她的最新的研究成果，我对他们表示衷心的感谢。

希望这本小书对于广大读者研究分形几何有参考价值，也欢迎读者对本书中的错误和不足之处提出批评与建议。

陈 颢

2005年1月于北京

# 目 录

第一章 分形和分维 .....	(1)
1.1 欧氏几何和分形几何 .....	(3)
1.2 自相似性和标度不变性 .....	(5)
1.3 Koch 曲线 .....	(8)
1.4 Cantor 集合 .....	(14)
1.5 Sierpinski 垫片 .....	(18)
1.6 能充满整个平面的曲线 .....	(23)
附录 分形几何学研究中的—些重要事件 .....	(26)
练习题 .....	(28)
第二章 分形的原因——相互作用、反馈和迭代 .....	(31)
2.1 相互作用——反馈和迭代 .....	(32)
2.2 多功能复印机 .....	(35)
2.3 吸引子 .....	(37)
2.4 IFS——迭代函数系 .....	(39)
2.5 非线性的反馈过程 .....	(44)
附录 线性变换 .....	(49)
练习题 .....	(51)
第三章 分形测量 .....	(53)
3.1 分形曲线的测量和幂律(power law) .....	(54)
3.2 分维 .....	(58)
3.3 数盒子法(Box-Counting method) .....	(62)
3.4 周长-面积关系 .....	(66)
3.5 截面约定(zero-sets) .....	(71)
练习题 .....	(74)

<b>第四章 统计分形</b> .....	(76)
4.1 数学分形和统计分形 .....	(76)
4.2 统计特征和超越率函数 .....	(79)
4.3 无标度区 .....	(82)
4.4 布朗(Brown)运动 .....	(86)
4.5 逾渗模型 .....	(95)
练习题 .....	(98)
<b>第五章 自仿射分形</b> .....	(101)
5.1 自仿射数学分形 .....	(102)
5.2 自仿射统计分形 .....	(105)
5.3 正问题——自仿射分形制图术 .....	(107)
5.4 反问题——相关函数和功率谱密度 .....	(111)
5.5 地貌与自仿射分形 .....	(115)
练习题 .....	(117)
<b>第六章 多重分形</b> .....	(119)
6.1 成矿作用模型 .....	(119)
6.2 多重分形 .....	(121)
6.3 例 .....	(124)
练习题 .....	(129)
<b>第七章 时间记录分析和 R/S 方法</b> .....	(131)
7.1 Hurst 的经验关系和 R/S 方法的提出 .....	(132)
7.2 随机时间记录的模拟 .....	(137)
7.3 有长期依存性的随机记录的模拟 .....	(141)
7.4 布朗运动和 R/S 分析 .....	(143)
7.5 地震时间序列的 R/S 分析 .....	(147)
练习题 .....	(162)
<b>第八章 地震学中的分形</b> .....	(164)
8.1 地震活动性 .....	(164)
8.2 地球介质的层次结构 .....	(170)
8.3 数学分形和物理分形 .....	(176)

8.4	分维随时间、空间的变化 .....	(181)
<b>第九章</b>	<b>小波理论及其在分形研究中的应用 .....</b>	<b>(185)</b>
9.1	构造-谱域双域信号分析 .....	(186)
9.2	小波及小波变换 .....	(190)
9.3	离散小波变换 .....	(195)
9.4	正交小波变换和多尺度分析 .....	(196)
9.5	小波包分析 .....	(202)
9.6	小波分析在分形研究中的应用 .....	(207)
<b>第十章</b>	<b>分形和计算机 .....</b>	<b>(215)</b>
10.1	分形与计算机 .....	(216)
10.2	分形与艺术 .....	(218)
10.3	分形图像压缩 .....	(222)
10.4	Fractal Windows 软件 .....	(242)
10.5	几个生成典型分形图形的计算机算法 .....	(252)
<b>参考文献</b>	.....	<b>(263)</b>
<b>习题参考答案</b>	.....	<b>(280)</b>



# 第一章 分形和分维

自然界大多数的图形都是十分复杂而且不规则的。事实上关于自然现象的复杂性，人们早就了解了，从古代人们对于自然现象的描述中，很容易找到这种描述复杂性的例子。中国藏族 10 世纪的壁画对天上云彩形状的刻画（图 1.1）和日本早期对海浪的描述（图 1.2），都充分显示了人们对自然现象复杂性的认识，传统的几何学习惯用一些简单而规则的基本元素，去近似地代表所研究的对象。但天上的云不是球状的，海浪也不是简单的曲面，传统的几何学在绚丽多姿的大自然面前就显得十分软弱无力了。因此人们一直希望能找到能够描述这些复杂现象的几何工具。

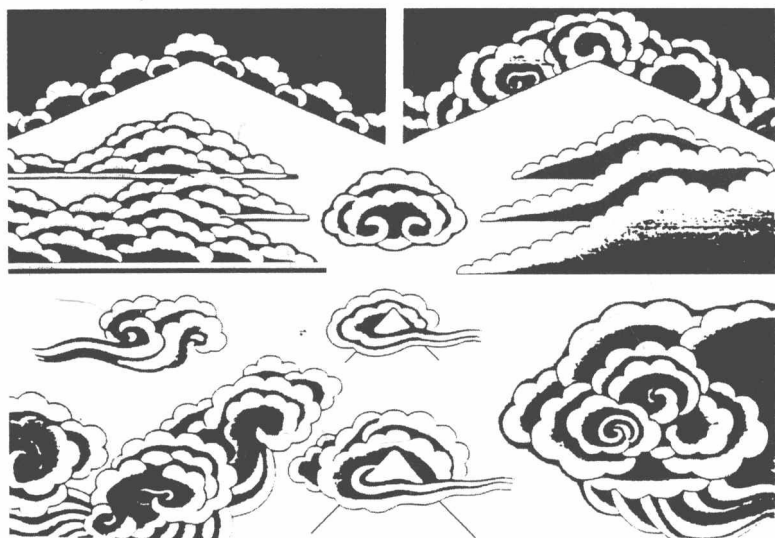


图 1.1 布达拉宫中藏族壁画中的云的形状



图 1.2 日本传统绘画中对海浪的描述

图 1.3 给出了山脉的一幅照片。同样，山脉的形状十分复杂，不同的山有不同的形状，它们都不是能用简单的圆锥形就可以代表的。如果我们在山脉形状复杂多样性的背后，再深入地想一想，为什么会有这么多复杂的形状呢？地质学家的研究表明山脉的复杂形状是长期地质构造运动和至今还在进行的侵蚀作用的结果，那么能否由形状的复杂性推断产生这种复杂形状的运动过程？数字规律又



图 1.3 山脉的复杂形态

如何？当然，回答这些问题真是太难了。大多数人都会认为：复杂的形状是由复杂的过程所造成的，但是否有这样的一种可能性：长期持续并不断重复的简单过程也可以产生非常复杂的形状。如果这种可能性存在的话，用以描述复杂性的分形几何学与用以解释复杂性的演化过程就发生了联系，几何学与动力学就发生了联系。本书前几章将沿着这样的线索向读者介绍分形几何学。首先我们仍然回到传统欧几里德几何学的经典中。

## 1.1 欧氏几何和分形几何

普通的几何对象，具有整数维数。零维的点、一维的线、二维的面、三维的体，乃至四维的“时空”，是人们熟知的例子。然而近十几年来，具有不必是整数的分维（fractal dimension）的几何对象——分形（fractal）引起了人们的广泛注意。分形几何的主要价值在于它在极端有序和真正混沌之间提供了一种中间可能性。分形最显著的特征是：本来看来十分复杂的事物，事实上大多数均可用仅含很少参数的简单公式来描述。

维数是几何对象的一个重要特征量。直观地说，维数就是为了确定几何对象中一个点的位置所需的独立坐标的数目，或者说独立方向的数目。在平直的欧氏空间中，维数是自然的。地图上的点有经度、纬度两个坐标，一个集装箱有长、宽、高三个尺寸，它们分别是二维和三维的几何对象。欧氏几何中的这种维数就是拓扑维，用字母  $d$  表示。整数维数构成了欧几里德几何学的法则。

现在从欧氏几何维数定义作进一步的推广。把一个正方形的每个边长增加为原来的 3 倍，得到一个大正方形，它正好等于  $3^2 = 9$  个原来的正方形。类似地，把一个立方体的每个边长增加为原来的 3 倍，就得到  $3^3 = 27$  个原来大小的立方体。推而广之，一个  $d$  维几何对象的每个独立方向，都增加为原来的  $l$  倍，结果得到  $N$  个原来的对象。这三个数之间的关系是  $l^d = N$ ，读者不难验证，对于欧氏几何中一切普通的几何对象，这个简单关系都是成立的。现在把这个

关系式两边取对数，写成

$$d = \frac{\ln N}{\ln l} \quad (1.1)$$

由式 (1.1) 定义的拓扑维  $d$  在欧氏几何中都是整数。但若将式 (1.1) 作为维数的定义，对其不加以取整数的限制，我们则向前完成了一次“飞跃”。下面把这样推广定义的维数称为分维，用大写字母  $D$  来表示，

$$D = \frac{\ln N}{\ln l} \quad (1.2)$$

我们这里再强调一下关系式

$$N = l^d$$

式中的  $l$  是变换倍数，我们可以把它看作是函数关系中的自变量，而  $N$  是得到的结果，它是自变量的函数，即  $N = f(l)$ 。最常见的函数关系有线性关系 (图 1.4 (a))、指数关系 (图 1.4 (b)) 和幂指数关系 (图 1.4 (c))，它们分别对应

$$\left. \begin{aligned} N &\sim cl + d \\ N &\sim c^l \\ N &\sim l^c \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

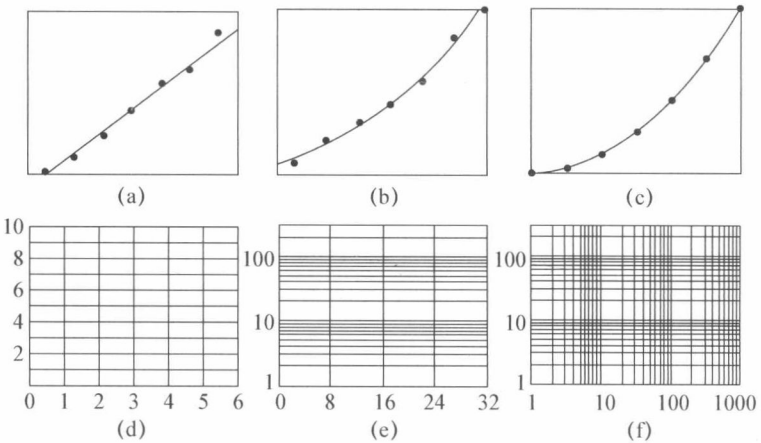


图 1.4 几种函数关系以及研究这些函数关系常用的坐标系

- (a) 线性；(b) 指数；(c) 幂指数函数关系；(d) 线性坐标系；  
(e) 半对数坐标系；(f) 双对数坐标系

式中  $c, d$  皆为常数。从上面变换时的讨论可知, 与分维定义有关的函数关系是幂指数关系, 简称幂律 (power law), 用图示方法研究线性关系、指数关系和幂指数关系最方便的坐标系分别是线性坐标系、半对数坐标系和双对数坐标系 (图 1.4 (d, e, f))。当我们研究分形与分维问题时, 最经常用到的是双对数坐标。

## 1.2 自相似性和标度不变性

地质现象的描述, 离不开标度。对一些地质现象拍照时, 一定要放上一个能表示尺度大小的物体 (作为一种特征尺度), 如一枚硬币, 一把锤子或站上一个人。没有这些物体, 很难确定这些照片反映的是 10 m 还是 10 km 范围的现象。如果我们有一幅关于岩石海岸线的照片, 而没有表示特征长度的物体, 如一棵树或一所房屋, 那么就很难确定照片是从多高的地方拍摄的。这是因为海岸线具有自相似性, 即将海岸线的一部分放大后, 它与原来的海岸线看起来是相似的。如果几何对象的一个局部放大后与其整体相似, 这种性质就叫作自相似性 (self-similarity)。地球科学中许多现象都具有自相似性。1860 年, Rukin 在一本书中写道: “当观察一块石头时, 你会发现它像一座缩微的山脉。大自然的神工鬼斧, 可以把大尺度的山脉缩微成小尺度。在一块 1 m 大小的石块上, 你可以找到自然界中各种图形和构造的变化形态。石块上的苔藓像森林, 晶体的颗粒像悬崖, 岩石的表面像山脉……” 当观测标度变化时, 几何体 (或集合) 的许多性质保持不变。这种标度不变性 (scale invariant) 在地质学中也经常见到。具有自相似或标度不变性的几何对象, 我们说它们是分形的。研究分形体的数学基础是测度论 (measure theory) 和公度拓扑学 (metric topology)。由测度论给出的分形定义 (Mandelbrot, 1992) 难于被不熟悉测度论的人理解, 并且在实际中也难于应用。而分形理论的奠基人 Mandelbrot 给出了更易理解的概念。下面给出的两个定义, 虽然不够精确和不够数学化, 但在物理上易于理解。

定义 1 (Mandelbrot, 1986): 部分以某种形式与整体相似的形

状叫作分形。

定义 2 (Edgar, 1990): 分形集合是这样一种集合, 它比传统几何学研究的所有集合还要更加不规则 (irregular), 无论是放大还是缩小, 甚至进一步地缩小, 这种集合的不规则性仍是明显的。

分形 (fractal) 一词是从拉丁文 fractus 转化而来的。它的原意是“不规则的、支离破碎的”物体, 英文字典中出现 fractal 一词是 1975 年以后的事情。而在山西五台山南山寺的影壁墙上的碑文 (图 1.5) 中, 早在清朝时代就有了“日月光明, 分形变化”的语句。



图 1.5 山西五台山南山寺的影壁上的诗句

“当初以来, 混元一气, 天地回履, 日月光明, 分形变化……”

南山寺中该影壁是 18 世纪重修的

自然界的许多系统、现象和过程都具有分形特征。比如星云的分布、海岸线的形状、山脉的起伏、地震、河网水系分布、湍流、凝集体、相变、人的血管系统、肺膜结构、城市噪音、气候剧烈变化、股票的变动等等。其复杂形态都可以用幂指数函数的  $D$  (即分维) 来描述。今天, 分形几何学已成为描述自然界, 特别是许多不规则地学现象的有力工具。翻开任何一本 20 世纪 90 年代的文献目录, “分形” 两字频繁出现。关于分形和分维的国际讨论会每年至少有好几次。

## 曼德尔布罗特 (B. B. Mandelbrot, 1924~)

——分形理论的创始人

Mandelbrot 1924 年出生于波兰华沙；1936 年他全家移居法国巴黎；经历了二战的变乱与动荡；1948 年在帕萨迪纳获航空学硕士学位；1952 年在巴黎大学获数学博士学位；曾是普林斯顿、日内瓦、巴黎的访问教授，哈佛大学的“数学实践讲座”的教授，IBM 公司的研究成员和会员。



在 Mandelbrot 时代，对人们来说，自然界大多数的图像都是十分复杂而且不规则的，传统的几何学在绚丽多姿的大自然面前就显得十分软弱无力了。人们一直希望能找到描述这些复杂现象的几何工具。分形的创立也是基于一个巧合，颇似当年哥伦布发现美洲新大陆的意外收获。Mandelbrot 原先是为了解决电话电路的噪声等实际问题，结果却发现了几何学的一个新领域。Mandelbrot 创造了分形几何学，为人们解决了这个困惑已久的问题。

1967 年发表于美国《科学》杂志上的“英国的海岸线有多长”的划时代论文，是他的分形思想萌芽的重要标志；1973 年，他提出了分形几何学的整体思想；1975 年，创造了 fractal 一词，来描述他所研究的那些不规则、破碎不堪、不光滑、不可微的东西，并著成了《分形：形状、机遇和维数 (Fractal, Form, Chance, and Dimension)》一书；1982 年，他的又一著作《大自然的分形几何 (The Fractal Geometry of Nature)》又与读者见面，此书被分形界的学者视为“圣经”。

分形的研究，是力图以数学的方法，模拟自然界存在的及科学研究中出现的那些看似无规律的各种现象。在过去的几十年里，分形在物理学、材料科学、地质勘探乃至股价的预测等方面都得到了广泛的应用或密切的注意，并且由于分形的引入，使得一些学科焕发了新的活力。由于 Mandelbrot 的不断研究、持续努力和非凡贡献，分形理论发展成为一门应用广泛、用途远大的学科。

### 1.3 Koch 曲线

下面以最简单的 Koch 曲线来说明什么是分形。

平面上 ( $d=2$ ) 有一单位线段 (图 1.6 (a)), 用以下迭代方法造出 Koch 曲线。第一步, 将单位线段分成三等份, 将中间部分用两条长  $1/3$  的折线来替代 (图 1.6 (b)); 第二步, 将图 1.6 (b) 中的每条线段三等份, 中间的一段用长  $1/3^2$  的两条折线替代, 得到图 (1.6 (c));

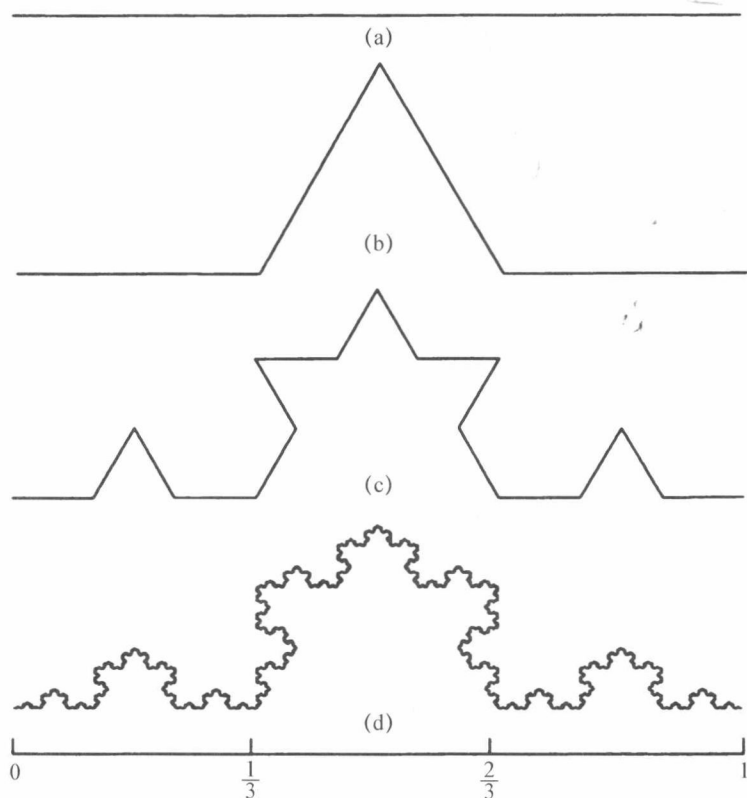


图 1.6 Koch 曲线的自相似特征

- (a) 单位线段; (b) 单位线段三等份, 中间一段用与其长度相同的两段替代;
- (c) 将 (b) 得到的图形中的线段再三等份, 中间用与其长度相同的两条折线替代;
- (d) 不断重复以上迭代做法得到 Koch 曲线



不断重复这样的迭代做法，无数次迭代后就生成了具有无穷多弯曲、处处连续、处处不可微商的 Koch 曲线。事实上，Koch 曲线是经常用作模拟雪花和海岸线形状的数学模型（请注意：上述数学的迭代过程对应的是物理世界中的一种演化过程）。

Koch 曲线是分形的，因为它是自相似的。自相似性就是跨尺度的对称性。它意味着递归，在一个图形内部还有图形（pattern）。从图 1.6 (d) 中可以清楚地看出这一点。自相似性指的是把要考虑的图形一部分放大，其形状与整体相同，设想把图 1.6 (d) 中 Koch 曲线区间  $[0, 1/3]$  中的图形放大 3 倍，放大后的图形与原来的曲线形状完全相同。把区间  $[2/3, 1]$  放大 3 倍，也会得到同样结果。虽然区间  $[1/3, 1/2]$ ， $[1/2, 2/3]$  的图形是倾斜的，但是把它放大，也会得到同样的结果。若把区间  $[0, 1/9]$  的图形放大 9 倍，同样也可以求得与原来相同的图形。对更小的部分进行放大也是如此。不论多小的部分，若把它放大到适当大小，应该能得出与原来相同的图形。

既然 Koch 曲线是分形的，下面求其分维。将图 1.7 中部的图形放大 3 倍后，得到图 1.7 下部曲线，它是由 4 个原来的图形组成的，因此，Koch 曲线的分维  $D$  为

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$$

在第  $n$  步迭代时，每个线段的长度为  $(1/3)^n$ ，一共有  $4^n$  个这样的线段。因此，Koch 曲线的长度在第  $n$  步时为

$$L_n = (4/3)^n$$

显然当时  $n \rightarrow \infty$ ， $L_n \rightarrow \infty$ 。这里我们见到一有趣的结果。一般（欧氏几何中）物体的长度与测量单位无关。对于镶嵌于平面之上的 Koch 曲线，其面积  $S$  为零，而当  $n \rightarrow \infty$ ，长度  $L \rightarrow \infty$ 。显然， $S$  和  $L$  都不能很好地描述 Koch 曲线这样的分形，而分维  $D = 1.26$  恰好反映了这种曲线的不规则性和复杂性。 $D = \ln 4 / \ln 3$  是它不规则性的度量。

下面是产生 Koch 曲线的程序代码：