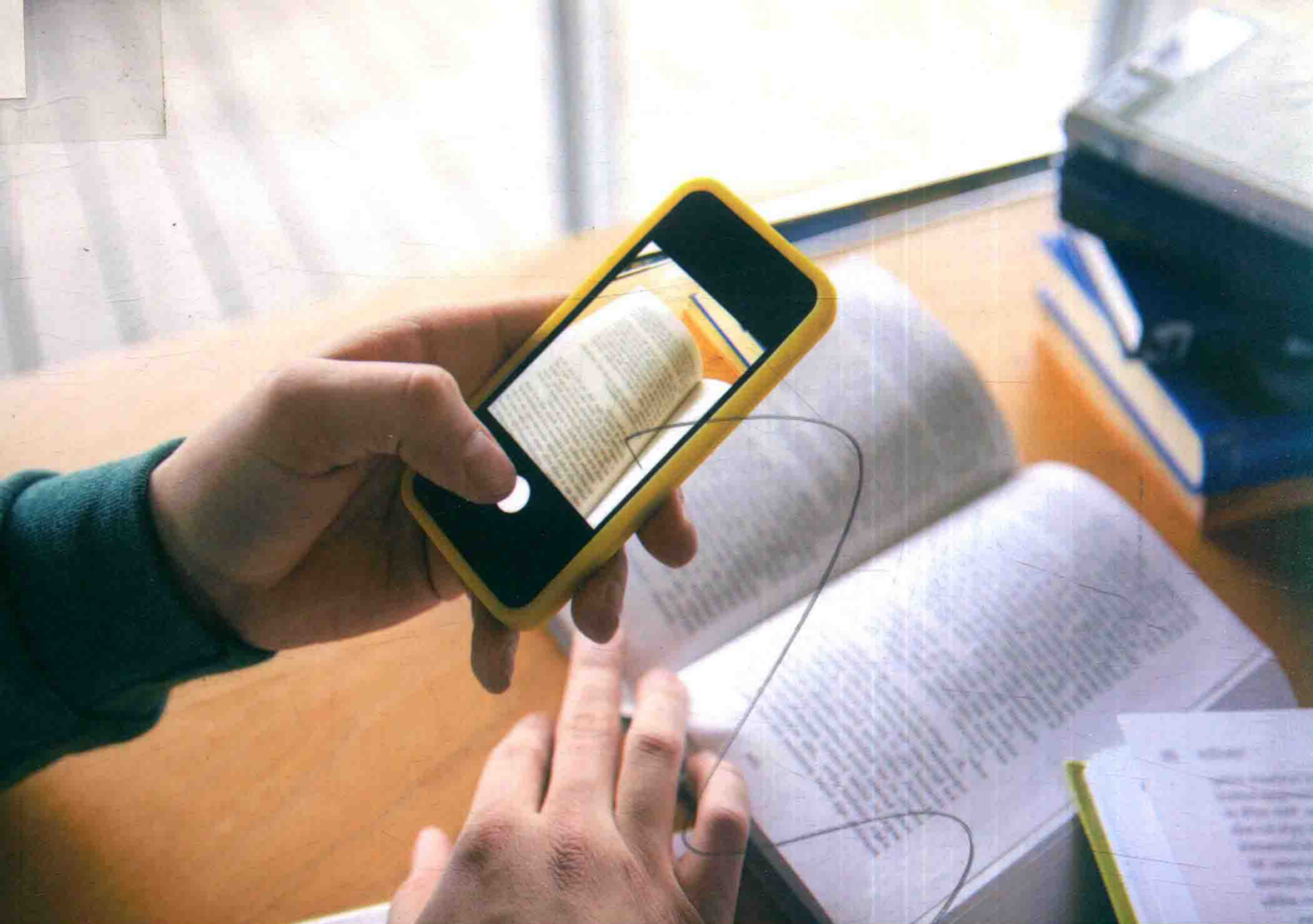


"十三五"移动学习型规划教材

线性代数

李俊华　裴慧丽　白喜梅　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”移动学习型规划教材

线性代数

李俊华　裴慧丽　白喜梅　编

机械工业出版社

本教材共有七章，内容包括预备知识、行列式、线性方程组、矩阵、线性空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型．全书系统地介绍了线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，由浅入深，力求用浅显易懂的方式引入基本概念和抽象的数学理论，同时设置问题研讨和同步训练，并配有不同层次的习题，注重培养学生的综合能力．

本教材可作为高等学校经济管理类专业的线性代数教材，也可作为相关工作人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/李俊华，裴慧丽，白喜梅编．—北京：机械工业出版社，2018.7

“十三五”移动学习型规划教材

ISBN 978-7-111-59795-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李…②裴…③白… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第087374号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：汤 嘉 责任编辑：汤 嘉 李 乐

责任校对：刘雅娜 封面设计：路恩中

责任印制：孙 炜

北京中兴印刷有限公司印刷

2018年6月第1版第1次印刷

184mm×260mm · 15.75印张 · 388千字

标准书号：ISBN 978-7-111-59795-7

定价：38.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线：010－88379833

读者购书热线：010－88379649

网络服务

机 工 官 网：www.cmpbook.com

机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

金 书 网：www.golden-book.com

前　　言

一、线性代数课程的地位和作用

线性代数课程是经管类本科生必修的一门数学课，因其为后续课程（投入产出学、经济计量学、金融数学等）的数学基础，所以在学科上属于专业基础课程，在整个大学的课程中，是非常重要的根基课程．经管类学生要学好这门课程，从而为顺利完成大学学业打下良好的基础．

学习线性代数课程可以使学生掌握本课程的基本理论、方法，从更高的层面来讲，可以培养学生具备较好的分析问题、解决问题和自主学习的能力，从而成为具有较扎实理论基础和较强学习能力以及较强创新意识的高素质人才．

二、教材的编写思路和特色

考虑到经管类学生的数学基础深浅不一（文理兼收），学习目标需求高低不同（考研与否），课程自身交错复杂的网状结构以及课程高度抽象的特点，编写教材的老师们结合多年的教学经验及学生在学习时存在的问题进行了详细的探讨，确定了教材的编写思路，并形成了自己的一些特色：

(1) 编写第零章，介绍将用到的数学基础和数学符号．

(2) 将课程的顺序理顺，以线性方程组和矩阵两条线串起课程的主要内容．

(3) 对于较抽象的概念，注意结合几何背景来讲解，以解决学生在理解上的困难．

(4) 对于较为复杂的结论，采取前期举例并分析其要点的引入方法，使学生既能明白其中道理又能比较自然地理解抽象的证明．完整的证明以二维码的形式出现，以供不同需求的老师和学生选择讲解和使用．

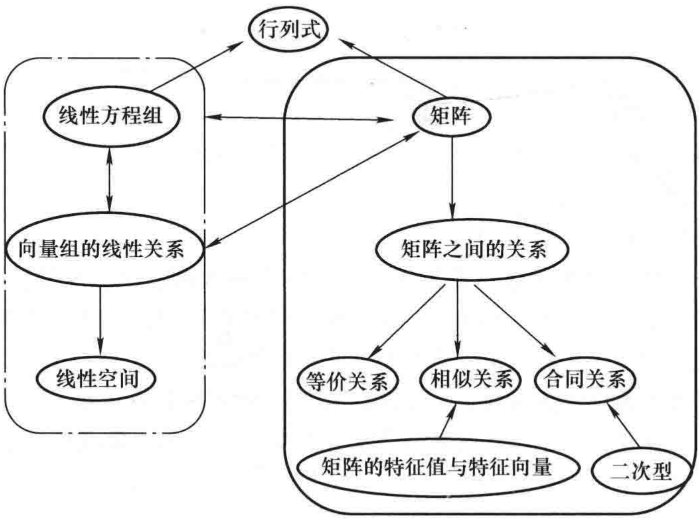
(5) 设置了“思考与讨论”，让学生参与教学环节．这样不但能使学生弄清课本知识的关联和实质，而且也能提高学生的学习能动性和参与教学过程的主动性，从而形成较好的课堂氛围，达到良好的教学效果．

(6) 在基本理论系统完整的情况下，结合学生不同的学习目标，将例题和习题难易分层．每章的最后一节设立提高题，分模块整理本章的难点，并且兼顾考研的常见类型和知识点．

(7) 编写一些在经济上的应用实例，使学生初步了解这门课程的应用，以提高学生的学习兴趣．设置“同步训练”，供学生进行同类型的习题练习，教师可根据时间进行课堂练习或课下习题．设置习题A，B，C三套，习题A是基本知识和基本方法的练习，习题B是本章或已学知识的综合练习，习题C主要是基础知识，学生可以检验本章知识点的学习效果．

“线性代数”课程的基本知识结构

线性代数以线性方程组和矩阵为主线，向量为副线，主要讨论了行列式、矩阵、向量、线性方程组、二次型、线性空间和线性变换等内容，其中线性变换对于经管类学生不做要求，因此在本教材中没有出现．矩阵不仅是研究对象，也是解决线性代数中其他问题的主要计算工具．利用矩阵作为主线，可以巧妙地将内容串联起来．线性代数的基本知识框架如下图所示：



读者在完成线性代数这门课程的学习后，结合知识框架，可以将线性代数的详细知识点在上图中进行补充.

三、编写分工

本教材以白喜梅为负责人，并对所有章节逐一进行讨论，最终完成，具体分工如下：

第零章、第一章，由裴慧丽编写；

第二章、第三章，由白喜梅编写；

第四章、第五章、第六章，由李俊华编写；

王亚萍参加了所有章节习题的编写和整本书的审核和校对工作.

四、致谢

感谢河北大学的有关领导在编写过程中给予的支持与鼓励，是他们的关心和信任使得此书的编写能够顺利完成；感谢河北省机器学习与计算智能重点实验室给予的资助；感谢同行教师的中肯意见和建议；感谢所有曾经给予我们帮助的同事、家人和朋友们，历时一年半的时间，终于得以完成. 但是由于编者水平和经验有限，本教材难免会有一些疏漏和不当之处，还请各位专家和广大同行多多批评指正. 请将您的意见和建议致信给我们，在教材修订时，一定会认真考虑您的建议，在此先深表感谢.

电子邮箱：562288404@qq.com；2589420647@qq.com；13197047@qq.com.

编者

目　录

第零章　预备知识

在本章中，我们要对学习线性代数课程所需的基础知识进行简要的归纳总结，内容包括：

（1）数域、复数基础；

（2）数学归纳法；

（3）连加号与连乘号；

（4）一元多项式．

本章内容不纳入计划课时，教师自行安排学生自学，需要时备查．

第一节　数域、复数基础

数是数学上一个最基本的概念，我们在讨论与数有关的问题时，通常会给定所考虑的数的范围．例如，对于多项式 x^4-4，在有理数范围内可以分解为 $(x^2-2)(x^2+2)$，在实数范围内还可以进一步分解为 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$，而在复数范围内还可以继续分解为 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}\mathrm{i})(x+\sqrt{2}\mathrm{i})$．这说明同一个问题在不同的数的范围内讨论，可能会有不同的结论．而谈到数时，往往会自然想到数的加、减、乘、除这些基本运算，所以我们考虑的数的范围是一个加、减、乘、除都可以做的数集——数域，下面我们就引入这一概念．

定义 0.1　若非空集合 F 中任意两个元素作某一运算的结果仍在 F 中，则称集合 F 对此运算是**封闭**的．

定义 0.2　设 F 是包含 0 与 1 的数集，如果 F 对于加法、减法、乘法、除法（分母不为零）是封闭的，则称 F 为一个**数域**．

由定义可知，全体有理数构成的集合、全体实数构成的集合、全体复数构成的集合都是数域，这三个数域分别用 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ 来表示．而全体整数构成的集合不是数域，因为任意两个整数的商（分母不为零）不一定都是整数．

例 1　证明所有具有形式 $a+b\sqrt{2}$ 的数（其中 a，b 是任意有理数）构成一个数域．通常用 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 来表示这个数域．

证明　显然 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 包含 0 与 1，并且它对于加法、减法是封闭的．下证它对于乘法、除法也是封闭的．任取 $a+b\sqrt{2}$，$c+d\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$，有

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

因为 a，b，c，d 都是有理数，所以 $ac+2bd$，$ad+bc$ 也是有理数．这就说明 $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$ 还在 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 内，所以 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 对于乘法是

封闭的.

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，于是 $a-b\sqrt{2}\neq 0$，$a^2-2b^2\neq 0$，而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2},$$

因为 a，b，c，d 都是有理数，所以$\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}$，$\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}$也是有理数．这就证明了 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 对于除法封闭．综上 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 是一个数域． □

下面就线性代数学习中用到的关于复数域的部分知识给出简单介绍.

定义 0.3 形如 $x+y\mathrm{i}$ 的数，称为**复数**，记作 $z=x+y\mathrm{i}$. 其中 i 为**虚数单位**，$\mathrm{i}^2=-1$ 或取 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$；x 与 y 都是实数，分别称为复数 z 的**实部**与**虚部**，分别记作 Rez 与 Imz. 实部为 0 的非零复数称为**纯虚数**.

虚部为 0 的数显然是实数，可见，实数包含于复数之内.

定义 0.4 给定复数 $z=x+y\mathrm{i}$，则复数 $x-y\mathrm{i}$ 称为复数 z 的**共轭复数**，记作 $\overline{z}$，即 $\overline{z}=x-y\mathrm{i}$. 显然有 $x=\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$，$y=\mathrm{Im}z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$.

定义 0.5 复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$ 与 $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}(z_2\neq 0)$ 的和、差、积、商分别定义为

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)\mathrm{i},$$
$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i},$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}.$$

例 2 计算复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$ 与 $z_2=3-4\mathrm{i}$ 的和、差、积、商.

解

$$z_1+z_2=(1+3)+[2+(-4)]\mathrm{i}=4-2\mathrm{i},$$
$$z_1-z_2=(1-3)+[2-(-4)]\mathrm{i}=-2+6\mathrm{i},$$
$$z_1\cdot z_2=[1\times 3-2\times(-4)]+[1\times(-4)+3\times 2]\mathrm{i}=11+2\mathrm{i},$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}=\frac{1\times 3+2\times(-4)}{3^2+(-4)^2}+\frac{3\times 2-1\times(-4)}{3^2+(-4)^2}\mathrm{i}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}.$$ □

第二节 数学归纳法

数学归纳法在数学、物理等学科中被广泛使用，在中学的一些数学问题上，我们也已经有所接触．数学归纳法是一种数学证明方法，通常被用于证明某个给定命题在整个（或者局部）正整数范围内成立．它通过有限步骤来完成一个无限验证的过程，其表现形式有第一数学归纳法、第二数学归纳法、跳跃数学归纳法等，这里我们主要介绍第一和第二数学归纳法.

定义 0.6　数学归纳法是证明与正整数有关的数学命题的方法.

数学归纳法分为第一数学归纳法和第二数学归纳法.

1. 利用第一数学归纳法证明命题的步骤:

设 $p(n)$ 是一个关于正整数 $n(n\geqslant n_0)$ 的命题,

(1) 证明当 $n=n_0$ 时命题 $p(n)$ 正确.

(2) 假设当 $n=k$(k 为正整数, $k\geqslant n_0$) 时结论正确, 证明当 $n=k+1$ 时结论成立.

综上, 结论对所有正整数 $n(n\geqslant n_0)$ 成立.

例 1　求证: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证明　当 $n=1$ 时结论显然成立.

假设当 $n=k$ 时结论正确, 下证 $n=k+1$ 时结论也成立.

因为 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, 所以

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.\end{aligned}$$

于是结论对一切正整数成立, 证毕.　□

2. 利用第二数学归纳法证明命题的步骤:

设 $p(n)$ 是一个关于正整数 $n(n\geqslant n_0)$ 的命题,

(1) 证明当 n 小于等于 n_0 时命题 $p(n)$ 正确.

(2) 假设当 $n\leqslant k$ 时 (k 为正整数, $k\geqslant n_0$) 结论正确, 证明当 $n=k+1$ 时结论成立.

综上, 结论对一切正整数 $n(n\geqslant n_0)$ 成立.

例 2　已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系 $a_n=(\alpha+\beta)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2}$, $n\geqslant 3$, $\alpha\neq\beta$ 为常数, 其中 $a_1=\alpha+\beta$, $a_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, 证明 $a_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

证明　显然当 $n=1, 2$ 时结论成立.

假设当 $n\leqslant k$ 时结论正确, 即有

$$a_k=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}, a_{k-1}=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta},$$

下证 $a_{k+1}=\dfrac{\alpha^{k+2}-\beta^{k+2}}{\alpha-\beta}$.

由已知及假设有

$$a_{k+1}=(\alpha+\beta)a_k-\alpha\beta a_{k-1}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta},$$

将上式整理得

$$a_{k+1}=\frac{\alpha^{k+2}-\beta^{k+2}}{\alpha-\beta}.$$

于是，结论对 $n\geqslant 3$ 的正整数成立，结论得证． □

第三节　连加号与连乘号

数学中经常采用一些约定的符号，使得行文更加简洁．连加号与连乘号是本书中常用的数学符号，因此，这里简单介绍它们的含义及性质．

一、连加号

n 个数 a_1，a_2，…，a_n 的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 可以简单记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，即

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

其中符号 $\sum$ 称为**连加号**，a_i 表示一般项，$\sum$ 上下的数字 n 和 1 表示 i 的取值范围，i 称为**求和指标**．例如：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1).$$

需要指出的是，求和指标用什么字母表示是无关紧要的．因为将连加号的和展开时，求和指标不会在数学表达式中出现．例如：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

容易看出，连加号具有如下性质：

性质 1　$\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$；

性质 2　$\sum\limits_{i=1}^{n}(ta_i)=t\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，其中 t 是与 i 无关的数．

例 1　一元 n 次多项式 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，使用连加号可以表示为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix^i$． □

例 2　二项式定理

$$(a+b)^2=a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\mathrm{C}_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

使用连加号可以表示为 $\sum\limits_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^ia^{n-i}b^i$． □

现在，设 a_{ij}（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n）是 $m\times n$ 个数，把它们排列成下表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \tag{0-1}$$

设 S 是它们的总和，我们可以按照下面的方式得到 S：

先把式（0-1）中各行加起来，得到

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\triangleq b_1,$$

$$a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}=\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\triangleq b_2,$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}=\sum_{j=1}^{n}a_{mj}\triangleq b_m.$$

于是

$$S=b_1+b_2+\cdots+b_m=\sum_{i=1}^{m}b_i=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right).$$

双重连加号 $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)$ 简记为 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$，即 $S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$.

如果先把式（0-1）中各列加起来，得到

$$a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1}=\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\triangleq c_1,$$

$$a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2}=\sum_{i=1}^{m}a_{i2}\triangleq c_2,$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn}=\sum_{i=1}^{m}a_{in}\triangleq c_n.$$

于是

$$S=c_1+c_2+\cdots+c_n=\sum_{j=1}^{n}c_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right).$$

易得：

性质 3　$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$，即双重连加号可以交换次序．

二、连乘号

n 个数 a_1，a_2，…，a_n 的积 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$ 可以简单记为 $\prod_{i=1}^{n}a_i$，即

$$\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n.$$

在不引起误解的前提下，可略去乘号记为$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$. 其中符号“$\Pi$”称为**连乘号**，$a_i$ 表示一般项，Π 上下的数字 n 和 1 表示 i 的取值范围，i 为**求积指标**.

连乘号有些性质和连加号是一样的，求积指标用什么字母表示是无关紧要的，即

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{j=1}^{n} a_j = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

例 3 $\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\cdots(a_n + b_n).$ □

例 4 连乘号 $\prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j)$ 的含义是指 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 在条件 $1 \leqslant j < i \leqslant n$ 下所有可能的差（$x_i - x_j$）的连乘积，即

$$\begin{aligned}\prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j) = {} & (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1}) \\ & (x_{n-1} - x_1)(x_{n-1} - x_2)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})\cdots \\ & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1).\end{aligned}$$ □

第四节　一元多项式

一、一元多项式的基本概念及运算

一元多项式是代数学的一个基本内容，它的许多结果主要在本书的第五章计算矩阵的特征值以及讨论矩阵的对角化时需要用到，现将可能用到的有关概念与结论做一简单介绍.

定义 0.7 设 x 是一个文字（或称符号），n 是一个非负整数，F 为一个数域，形式表达式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{0-2}$$

称为数域 F 上的**一元多项式**，其中 $a_i \in F$，$i = 0$，1，2，…，n，数域 F 称为**多项式的系数域**.

当 F 是复数域时，$f(x)$ 称为**复系数多项式**；当 F 是实数域时，$f(x)$ 称为**实系数多项式**；当 F 是有理数域时，$f(x)$ 称为**有理系数多项式**；当 $a_i (i = 0$，1，…，$n)$ **均为整数时**，$f(x)$ 称为**整系数多项式**.

在式（0-2）中，若 $a_n \neq 0$，则 $a_n x^n$ 称为多项式 $f(x)$ 的**首项**（**或最高次项**），a_n 称为**首项系数**，n 称为多项式的**次数**，a_0 为**常数项**. 若式（0-2）中的系数均为零，则称 $f(x)$ 为**零多项式**.

说明 这里定义的多项式是符号或文字的形式表达式. 当这个符号是未知量时，它就是中学代数中的多项式. 视应用需要，这个符号还可代表其他待定事物. 为了能统一研究未知量和其他待定事物的多项式，我们才抽象地定义了上述形式表达式.

定义 0.8 若多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中除去系数为零的项外，同次项

的系数全相等，称**一元多项式**$f(x)$ 与 $g(x)$ **相等**，并记为$f(x)=g(x)$.

二、一元多项式的根

定义 0.9　设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$c$ 是数域 F 中的一个数，用$f(c)$ 表示多项式$f(x)$ 取 $x=c$ 时的值，即

$$f(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_1c+a_0\in F,$$

若$f(c)=0$，则称 c 是$f(x)$的一个**根**.

定理 0.1　数域 F 中的数 c 为数域 F 上**多项式**$f(x)$ 的一个根当且仅当 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式，即$f(x)$ 可表示成$f(x)=(x-c)q(x)$，其中 $q(x)$是数域 F 上的一个**多项式**.

例 1　设$f(x)=x^3+x^2-2x-2$，证明：-1 是$f(x)$ 的一个根.

证法一　因$f(-1)=-1+1+2-2=0$，所以 -1 是$f(x)$ 的一个根.

证法二　事实上，$x+1$ 是$f(x)$ 的因式，要证实这一点可仿照数的除法一样列式计算（称为**带余除法**）. 具体做法如下：将被除式 x^3+x^2-2x-2 写在中间，除式 $x+1$ 写在左边，右边留着准备写商式. 先对照被除式的最高次项 x^3 与除式的最高次项 x，得出商式的最高次项为 x^2. 将 x^2 写在右边商式的首位，并将 x^2 与除式 $x+1$ 相乘所得 x^3+x^2 写在被除式 x^3+x^2-2x-2 对应项的下面. 然后两者相减得余式 $-2x-2$，再对照余式和除式的最高次项，得出商式的第二项为 -2. 重复上述做法，直到余式为0. 整个过程可用竖式表示如下：

$$\begin{array}{r|l|l}
x+1 & x^3+x^2-2x-2 & x^2-2 \\
 & x^3+x^2 & \\
\hline
 & \qquad\qquad -2x-2 & \\
 & \qquad\qquad -2x-2 & \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

所以

$$f(x)=x^3+x^2-2x-2=(x+1)(x^2-2)=(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}),$$

由定理0.1 可知，-1 是$f(x)$ 的根，除了 -1，$f(x)$ 还有两个根分别为 $\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$.　□

定义 0.10　设 $f(x)$ 是数域 F 上的一个多项式，$c\in F$，k 是正整数，若

$$f(x)=(x-c)^kq(x),$$

其中 $q(x)$ 是数域 F 上的**多项式**，且 $q(c)\neq0$，则称 c 是$f(x)$ 的 k **重根**. 当 $k=1$ 时，称为**单根**；当 $k>1$ 时，称为**重根**.

一元多项式根的计算是一个很复杂的问题，下面介绍一元多项式根的一些基本理论.

定理 0.2　（**代数基本定理**）每个次数≥1 的复系数多项式在复数域中有一个根.

推论 1 每个 $n(n\geqslant 1)$ 次的复系数多项式在复数域中恰有 n 个根（重根按重数计算）.

推论 2 设 $f(x)$ 为 n 次多项式，首项系数为 a_n，若 $f(x)$ 的 n 个根为 λ_1，λ_2，…，λ_n，则 $f(x)=a_n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$.

定理 0.2 与推论 1 从理论上说明了多项式根的存在性，但没有给出确定这些根的具体方法，下面给出两个定理帮助我们去确定多项式的根.

定理 0.3 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

（1）若 $a_0=0$，则 0 是 $f(x)$ 的一个根；

（2）若 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$，则 1 是 $f(x)$ 的一个根；

（3）若奇次项系数之和与偶次项系数之和相等，则 -1 是 $f(x)$ 的一个根.

证明 在（1）的条件下，有 $f(0)=0$，故 0 是 $f(x)$ 的一个根，同理可证（2）和（3）. ■

需要注意的是，正是由本定理的（3）得出例 1 中的 $f(x)$ 有一个根 -1.

定理 0.4 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式，若 $f(x)$ 有一个有理根 $\frac{r}{s}$，其中 r，s 是互素整数（即 r，s 的公因子只有 ± 1），则 s 是 a_n 的一个因数，而 r 是 a_0 的一个因数. 特别地，若 $f(x)$ 的首项系数 $a_n=1$，则 $f(x)$ 的有理根都是整数，且均为 a_0 的因数.

【同步训练】

求 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 的有理根.

例 2 求 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x^2+\frac{3}{2}x+1$ 的有理根.

解 因 $f(x)=\frac{1}{2}(x^3-4x^2+3x+2)$，所以 $f(x)$ 与整系数多项式 $g(x)=x^3-4x^2+3x+2$ 有相同的根. 由定理 0.4 知，$g(x)$ 的有理根只可能是 ± 1，± 2. 计算得

$$g(1)=2\neq 0,g(-1)=-6\neq 0,g(2)=0,g(-2)=-28\neq 0.$$

所以 $g(x)$ 的有理根只有一个 2. 即 $f(x)$ 的有理根只有一个 2. □

第一章　行　列　式

重点难点提示：

知识点	重点	难点	要求
行列式的概念	•	•	理解
行列式的基本性质	•		掌握
余子式、代数余子式	•		掌握
行列式按行（列）展开定理	•	•	掌握
行列式的计算方法	•	•	掌握
克拉默法则			了解

行列式的概念是伴随着求解线性方程组而发展起来的，它是研究线性代数的一个重要工具．行列式的提出，可以追溯到 17 世纪，最初的雏形是由德国数学家莱布尼茨（微积分学奠基人之一）与日本数学家关孝和各自独立得出的，时间大致相同．1693 年，莱布尼茨在研究三元一次方程组的过程中，在没有矩阵定义的条件下，使用了行列式求解方程组，并讨论了解的情况．莱布尼茨对行列式的研究成果中已经包含了行列式的展开和克拉默法则，但这些成果当时并不为人所知．事实上，在用初等代数解二元和三元线性方程组时，我们已经利用了二阶、三阶行列式．在本章，我们将结合二元、三元线性方程组的解给出二阶、三阶行列式的定义，通过总结二阶、三阶行列式的规律，引入 n 阶行列式的概念，进而分析 n 阶行列式的性质和计算方法．

第一节　n 阶行列式

一、二阶、三阶行列式

二阶、三阶行列式是从二元、三元线性方程组的解中引出来的，所以我们先回忆初等代数中二元、三元线性方程组的解法．考虑如下方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

利用消元法解此方程组，在方程组（1-1）第一个方程的左右两边同时乘以 a_{22}，得

$$a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1; \tag{1-2}$$

再在方程组（1-1）第二个方程的左右两边同时乘以 a_{12}，得

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2; \tag{1-3}$$

然后式（1-2）减去式（1-3）消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则得到

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同理，在方程组（1-1）第一个方程的左右两边同时乘以 a_{21}，再在方程组（1-1）第二个方程的左右两边同时乘以 a_{11}，然后相减，若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则得到

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

故方程组（1-1）在 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 的条件下，有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了方便记忆上述结果，我们引入如下记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1-4}$$

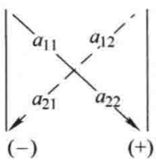


图 1-1

并称它为**二阶行列式（determinant）**. 二阶行列式中的横排和竖排分别称为行列式的**行**和**列**，其中数 a_{ij}（i，$j=1$，2）称为行列式的**元素**. 二阶行列式的计算也可以按照图 1-1 记忆. 有了二阶行列式的概念，当 $D \neq 0$时，方程组(1-1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \tag{1-5}$$

其中 D_1 就是将行列式 D 中第一列的元素换成方程组（1-1）的两个常数项 b_1，b_2，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12};$$

而 D_2 就是将行列式 D 中第二列的元素换成方程组（1-1）的两个常数项 b_1，b_2，即

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

总之，当方程组（1-1）中未知量的系数所排成的行列式 $D \neq 0$ 时，方程组（1-1）的解就可由（1-5）得到.

对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1-6}$$

同样，由消元法可得，当

$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$

时，方程组（1-6）的解为

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3), \\
x_2 = \dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}), \\
x_3 = \dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}).
\end{cases}
\tag{1-7}
$$

【同步训练 1】 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

类似地，为了方便记忆引入记号

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},
\tag{1-8}
$$

并称其为**三阶行列式**. 三阶行列式所表示的代数和也可以用图 1-2 记忆，图中，沿各实线相连的三个数的乘积取正号，沿各虚线相连的三个数的乘积取负号.

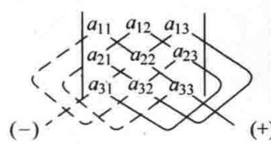


图 1-2

例 1 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 由定义，

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times 5 \times 1 + 0 \times 2 \times 0 + (-3) \times 1 \times (-1) - (-3) \times 5 \times 0 - 0 \times 1 \times 1 - 2 \times 2 \times (-1) \\
&= 10 + 0 + 3 - 0 - 0 + 4 = 17.
\end{aligned}
$$

□

有了三阶行列式，对三元线性方程组（1-6），若行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组（1-6）有唯一解，其结果可以用三阶行列式表示为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \; x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中 D_1，D_2，D_3 是用常数项 b_1，b_2，b_3 分别替换 D 的第 1，2，3 列所得到的行列式，即