概率统计选讲

孙荣恒　著

科学出版社

概率统计选讲

孙荣恒　著

科学出版社
北京

内　容　简　介

本书内容主要集中在概率论和数理统计方面，包括它是作者近 30 年在概率论和数理统计方面的主要工作，解决了概率论和数理统计中五个难题，给出了十多个新概念和十多个行之有效的新方法.

本书读者对象为高等院校理工科的数学与应用数学、概率论和数理统计、信息与计算机等专业的高年级本科生学生、研究生、教师、数学爱好者和科技工作者.

图书在版编目（CIP）数据

概率统计选讲/孙荣恒著. —北京：科学出版社，2019.1

ISBN 978-7-03-059124-1

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①孙…　Ⅲ.①概率统计　Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 237940 号

责任编辑：李　欣／责任校对：邹慧卿

责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2019 年 1 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16

2019 年 1 月第一次印刷　印张：7 3/4

字数：154 000

定价：58.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

本书内容主要集中在概率论和数理统计方面, 包括作者近 30 年在概率论和数理统计方面的主要工作.

作者从 1979 年起研究随机问题, 一直坚持到今天. 主要工作集中在概率论和数理统计方面, 虽然概率论和数理统计已是非常成熟的两门学科, 但是仍还有一些遗留问题有待解决以及一些方法有待改进. 例如:

(1) 在概率论中, 离散型随机变量特征函数的反演公式只给出极限公式, 无法应用. 1988 年, 作者通过比较离散型随机变量分布函数的导数和连续型随机变量分布函数的导数, 引出了狄拉克 (Dirac) 函数. 由于连续型随机变量的密度函数是其分布函数的导数, 很自然, 会利用狄拉克函数, 给出离散型随机变量的密度函数定义, 再利用狄拉克函数的性质, 就证明了: 无论离散型随机变量还是连续型随机变量, 其密度函数与其特征函数恰好是一傅变换对. 从而解决了这个遗留问题.

(2) 在数理统计中, 有效估计量, 既无偏又方差最小, 因此, 它是我们最想得到的估计量. 但是, 它什么时候存在, 什么时候唯一; 如果存在, 又如何求它? 由 R-C 不等式, 一般求有效估计量, 先求出 R-C 不等式的下界, 再在估计量中找待估计参数的无偏估计量, 但是, 无偏估计量, 可能找到, 也可能找不到, 也可能找到很多. 然后还要求出这些无偏估计量的方差, 看看方差中有没有等于 R-C 不等式下界的, 如果有, 有效估计量就存在, 这个估计量就是有效估计量. 这种方法不仅很烦琐, 而且有很大盲目性. 我们知道, R-C 不等式是用柯西–施瓦茨不等式证明的. 而有效估计量是用 R-C 不等式中等号成立来定义的. 柯西–施瓦茨不等式中等号成立的充要条件也就是 R-C 不等式中等号成立的充要条件, 而作者在文献 [1] 中已证明这个充要条件就是定理 2.1 中的充要条件. 从而不仅给出有效估计量存在唯一的充要条件, 而且给出有效估计量、费希尔信息量和 R-C 不等式下界的非常简捷求法. 从而解决了又一遗留问题.

(3) 在概率论中, 经常要计算事件发生的概率. 然而有些事件的概率计算起来很麻烦. 例如, 五同六同等问题. 四同和四同以下的概率还可以直接计算. 但是, 四

同以上的概率直接计算非常复杂, 无法进行下去. 作者由鞋子配对 (二同) 问题引出 S 矩阵、R 矩阵和 H 矩阵, 解决了这个遗留难题.

(4) 寿命试验绝大多数是截尾试验. 因此, 截尾试验是很重要一类试验. 但是关于截尾试验的参数估计、区间估计等内容在数理统计教材中却找不到, 为什么? 主要是参数的极大似然函数不好求. 寿命分布只有两种, 即指数分布与几何分布. 20 世纪末, 作者在文献中看到泊松过程与指数分布之间的关系 (即定理 3.4.1), 虽然证明都很复杂, 很难看懂. 但是, 作者还是利用泊松过程和指数分布之间的关系, 求出寿命服从指数分布的截尾试验的参数的极大似然函数, 并于 2003 年首次把截尾试验引入教材. 由于指数分布与几何分布的相似性, 以及伯努利过程定义与泊松过程定义相似, 既然指数分布是泊松过程到达间隔时间, 那几何分布一定是伯努利过程到达间隔时间 (即定理 3.3.1). 在 2002 年, 作者证明了这个结论并把它写入 [3] 中. 但是, 那里的证明有错, 错在求和上下限没取对. 2012 年, 在文献 [5] 中才给出正确证明, 由于定理 4.1 是两次利用全概率公式证明的, 自然会想到用全概率公式证明定理 5.1. 试一下, 成功了. 有了定理 4.1 与定理 5.1, 很自然不仅把几何分布寿命截尾试验引进了数理统计教材, 还把泊松过程的检验与伯努利过程的检验也引进了数理统计教材. 这两过程的检验是文献 [5] 首次给出的.

(5) 极大似然估计是比较好的估计方法. 但是, 对一般离散分布却用不上. 为什么? 还是因为其参数的似然函数不好求, 难点是其取值概率不好用一个式子表示. 作者想其分布函数借助单位阶跃函数可用一个式子表示, 在 2003 年, 作者引入了一个新函数, 脉冲函数 (也称为 S 函数), 才解决了这个难点, 从而, 给出一般离散分布概率函数的定义, 才解决了这一遗留难题. 这个方法具有一般性, 即对特殊离散分布也适用. 例如, 对二项分布、几何分布、负二项分布等也都适用. 但是, 有个例外, 对超几何分布不适用. 对超几何分布来说, 除了极大似然函数不好确定外, 还无法建立似然方程. 这是由于求导数太复杂. 通过对极大似然原理的分析, 作者首先确定了极大似然函数, 为了避开求导数, 又研究了该极大似然函数相邻两项之比, 先找出使似然函数取极大的样本容量为 1 的参数的估计量, 在此基础上, 又求出样本容量为 n 的估计量, 从而解决了这个遗留问题.

此外, 现作两点说明: 第一, 本书中一些结果和方法, 已被很多教材、文献引用, 如有效估计量存在唯一定理及其求法、求置信区间和拒绝域的待定实数法、求贝叶

斯估计量的函数核法、证明贝叶斯定理的正规方程法求骰子点数和分布的逐个纸上作业法、抽样分布定理另一证法、证明一个过程是泊松过程的全概率公式法、一些组合公式的概率证明 (法)、超几何分布参数估计计算法、截尾试中参数似然函数求法、解五同六同等问题的 S 矩阵法等. 除离散分布密度函数定义和概率函数定义外, 本书还给出了频数分布、频数母函数、事件奇交和偶交 (S 运算)、S 函数、S 分布 (见 [5])、S 矩阵、R 矩阵、H 矩阵、S 公式、S 不等式等新概念. 第二, 之所以详细叙述上述 5 点, 是想把解决问题的思想方法告诉读者, 希望对读者能有一点点帮助. 在很多时候, 想法比结果还重要.

本书收录了作者在概率论与数理统计方面 22 项研究成果. 这些研究成果解决了概率论与数理统计中五个遗留问题; 首次把截尾试验和两个随机过程的检验 (其检验方法非常简单) 引进数理统计教材; 给出了十多个新概念和十多个行之有效的新方法, 使得概率论与数理统计这两门学科的理论得到了进一步完善, 内容得到了进一步充实, 方法得到了进一步改进和应用得到了进一步推广.

感谢两位评审专家对本书的匿名评审! 再一次感谢作者的大哥孙曼和大嫂闵锐, 没有他们的教育和培养, 不会有作者的今天.

由于作者水平所限, 书中一定存在不足之处, 恳请读者指正!

孙荣恒

2017 年 11 月

目　　录

第 1 讲　概率论方面的研究成果

1.1　多个事件奇交 (对称差) 的定义及其性质 [5]

1.1.1　事件序列的极限运算

定义 1.1.1　设 $\{A_n\}$ 为 Ω 中的事件序列, 定义:

(1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的上极限, 记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, 即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$;

(2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的下极限, 记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, 即 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$;

(3) 如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, 则称事件序列 $\{A_n\}$ 的极限存在, 且称 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 为其极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

定理 1.1.1　设 $\{A_n\}$ 为 Ω 中的事件序列, 则

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{e:e\text{ 属于无穷多个}A_n\}$;

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{e:e\text{ 属于几乎一切}A_n\}$,

其中 “e 属于几乎一切 A_n” 的意思是: 除事件序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 中的有限个事件外, e 属于其余一切事件.

证明　(1) 设 $e_0\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$, 则对任意正整数 $n, e_0\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$, 所以 e_0 属于无穷多个 A_n, 如果不然, 则必存在 n_0, 使得当 $m>n_0$ 时, 均有 $e_0\overline{\in}\bigcup\limits_{k=m}^{\infty}A_k$, 矛盾. 于是证得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\{e:e\text{属于无穷多个}A_n\}$.

反之, 设 $e_0\in\{e:e\text{属于无穷多个}A_n\}$, 则对任意正整数 n, 有 $e_0\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$, 从而 $e_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$, 于是得 $\{e:e\text{属于无穷多个}A_n\}\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, 从而 (1) 得证.

(2) 设 $e_0 \in \{e: e属于几乎一切A_n\}$, 则存在正整数 m, 使得 $e_0 \in \bigcap\limits_{k=m}^{\infty} A_k$, 故 $e_0 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 即 $\{e: e属于几乎一切A_n\} \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

反之, 设 $e_0 \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 则至少存在一个正整数 m, 使 $e_0 \in \bigcap\limits_{k=m}^{\infty} A_k$, 故对一切 $k \geqslant m$, 均有 $e_0 \in A_k$, 即 e_0 属于几乎一切 A_n, 所以有 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \{e: e属于几乎一切A_n\}$, 从而 (2) 得证.

推论 1.1.1　$\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

证明　因为属于几乎一切 A_n 的样本点一定属于无穷多个 A_n, 所以 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

推论 1.1.2　改变事件序列 $\{A_n\}$ 中的有限多项不影响 $\{A_n\}$ 的上、下极限.

推论 1.1.3　(1) $\overline{\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \overline{A_n}$;

(2) $\overline{\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \overline{A_n}$.

证明　(1) 由德 · 摩根对偶定律得

$$\overline{\varliminf_{n\to\infty} A_n}\;\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=\infty}^{\infty}\left(\overline{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\overline{A_k} = \varlimsup_{n\to\infty}\overline{A_n}$$

同理可证 (2); 或在 (1) 式中将 A_n 换成 $\overline{A_n}$, 两边再取逆并由 $\overline{\overline{A}} = A$ 可立得 (2).

定理 1.1.2　设 $\{A_n\}$ 为 Ω 中的事件序列.

(1) 如果 $\{A_n\}$ 单调不减, 即 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

(2) 如果 $\{A_n\}$ 单调不增, 即 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

证明　(1) 设 $e_0 \in \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 由定理 1.1.1 知, e_0 属于无究多个 A_n, 故总存在正整数 m, 使得 $e_0 \in A_m$. 因为 $\{A_n\}$ 单调不减, 所以当 $k \geqslant m$ 时均有 $e_0 \in A_k$, 即 e_0 属于几乎一切 A_n, 所以 $e_0 \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 由此说明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 又由推论 1.1.1

知 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, 于是 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在. 因为 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 所以证得 (1).

(2) 因为 $\{A_n\}$ 单调不增, 所以 $\{\overline{A_n}\}$ 单调不减, 由 (1) 知 $\lim_{n\to\infty} \overline{A_n}$ 存在且 $\underline{\lim}_{n\to\infty} \overline{A_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. 由定理 1.1.1 的推论与德 · 摩根对偶定律, 对上式两边取逆得 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 故 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

定理 1.1.3 设 $\{A_{n_k}\}$ 为事件序列 $\{A_n\}$ 的子事件序列. 如果 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在, 则 $\lim_{k\to\infty} A_{n_k}$ 也存在; 反之, 如果 $\lim_{k\to\infty} A_{n_k}$ 不存在, 则 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 也不存在.

证明 如果 $e_0 \in \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, 则 e 属于几乎一切 A_n, 故存在正整数 m(由 $AB \subset A$), 当 n 与 k 都大于 m 时, $e \in \bigcap_{n=m+1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{k=m+1}^{\infty} A_{n_k}$, 即 e 属于几乎一切 A_n, 也即 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \underline{\lim}_{k\to\infty} A_{n_k}$, 又因 $\underline{\lim}_{k\to\infty} A_{n_k} \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_{n_k} \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, 所以

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \underline{\lim}_{k\to\infty} A_{n_k} \subset \overline{\lim}_{k\to\infty} A_{n_k} \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$$

从而定理得证.

1.1.2 多于两个事件的对称差

前面我们给出事件 A 与 B 的对称差为 $A\Delta B = (A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)$. 由于 $A\Delta B$ 仍为事件, 很自然, 我们会引入 $A\Delta B$ 与另一事件 C 的对称差 $(A\Delta B)\Delta C$, 更进一步, 我们会引入多个事件对称差的概念.

定义 1.1.2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 中的 n 个事件, 记

$$A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_n = \{[(A_1\Delta A_2)\Delta A_3]\Delta\cdots\}\Delta A_n$$

称 $A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_n$ 为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的对称差或奇交, 并简记为 $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{n} A_i$, 即 $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_n$.

引理 1.1.1 设 A, B, C 为 Ω 中的事件, 则

$$(A\Delta B)\Delta C = (B\Delta C)\Delta A = (C\Delta A)\Delta B.$$

证明 因为 $A\Delta B = A\overline{B} + B\overline{A}$, 故

$$(A\Delta B)\Delta C = (A\overline{B} + B\overline{A})\Delta C = [(A\overline{B} + B\overline{A})\overline{C}] + [\overline{(A\overline{A} + B\overline{A})}C]$$

$$=A\overline{B}\,\overline{C}+B\overline{A}\,\overline{C}+[(\overline{A}\bigcup B)(\overline{B}\bigcup A)C]$$

$$=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+ABC$$

同理得

$$(B\Delta C)\Delta A=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+ABC$$

$$(C\Delta B)\Delta B=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+ABC$$

从而引理 1.1.1 得证.

定理 1.1.4　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 中的 n 个事件, $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一种排列, 则对任意正整数 $n\geqslant 2$ 有 $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{n}A_i=\mathop{\Delta}\limits_{k=1}^{n}A_{i_k}$.

证明　由引理 1.1.1 知, 当 $n=2$ 与 $n=3$ 时结论均成立. 现设 $n=k$ 时结论成立, 往证 $n=k+1$ 时结论也成立.

因为

$$A_1\Delta A_2\Delta A_3\Delta\cdots\Delta A_{k+1}\tag{1.1.1}$$

与

$$A_{i_1}\Delta A_{i_2}\Delta A_{i_3}\Delta\cdots\Delta A_{i_{k+1}}\tag{1.1.2}$$

可以看成 $k+1$ 个不同元素 $A_1,A_2,\cdots,A_{k+1}$ 的两种排列. 而对于 $k+1$ 个不同元素的任意两种排列都可以通过变动其前 k 个元素, 使得两种排列的前 $k-1$ 个元素 (包括顺序) 彼此一样. 现变动 (1.1.1) 与 (1.1.2) 中的前 k 个元素使得它们的前 $k-1$ 元素 (包括顺序) 彼此一样. 由归纳假设这种变动不影响运算的结果. 记变动后前 $k-1$ 个元素 (事件) 的对称差为 A, 则

$$\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{k+1}A_i=(A\Delta A_{i_k})\Delta A_{k+1}$$

$$\mathop{\Delta}\limits_{j=1}^{k+1}A_{i_j}=(A\Delta A_{k+1})\Delta A_{i_k}$$

由引理 1.1.1 得

$$(A\Delta A_{i_k})\Delta A_{k+1}=(A\Delta A_{k+1})\Delta A_{i_k}$$

这说明, 当 $n=k+1$ 时, 结论也成立, 从而定理 1.1.4 得证.

用数学归纳法易证下述定理.

定理 1.1.5 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个互不相交的事件, 则 $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

由

$$
\begin{aligned}
A_1 \Delta A_2 =& A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 \\
A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 =& A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_2\overline{A}_1\overline{A}_3 + A_3\overline{A}_1\overline{A}_2 + A_1A_2A_3 \\
\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{4} A_i =& A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 A_4 \\
& + \overline{A}_1 A_2A_3A_4 + A_1\overline{A}_2 A_3A_4 + A_1A_2\overline{A}_3 A_4 + A_1A_2A_3\overline{A}_4
\end{aligned}
$$

当 $e \in A_1 \Delta A_2$ 时, e 只属于 A_1, A_2 之一; 当 $e \in \mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{3} A_i$ 或 $e \in \mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{4}$ 时, e 只能属于奇数个 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$. 我们有如下定理.

定理 1.1.6 (结构定理) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 中的 n 个事件, 则

$$
\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{n} A_i = \{e : e\text{仅属于奇数个}A_i\}
$$

这也是我们称 $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的奇交的理由.

证明 由上述知, 当 $n=2$ 和 $n=3$ 时定理结论都成立. 设 $n=k$ 时定理结论成立, 即当 $e_0 \in \mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{k}$ 时, $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中仅有奇数个 A_i 含有 e_0, 现在证明 $n=k+1$ 时定理结论也成立. 如果 $e_0 \in \mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{k+1} A_i$, 则因为 $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{k+1} = \left(\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{k} A_i\right)\overline{A}_{k+1} + A_{k+1}\overline{\left(\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{k} A_i\right)}$, 故 e_0 仅属于 $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{k} A_i$ 与 A_{k+1} 之一, 即 e_0 属于 $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{k} A_i$ 而不属于 A_{k+1} 或属于 A_{k+1} 而不属于 $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{k} A_i$, 此示 $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$ 中仅能有奇数个 A_i 含有 e_0, 由数学归纳法, 本定理得证.

推论 1.1.4 如果事件 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n$, 则 $(n \geqslant 2)$

$$
\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{n} A_i = \begin{cases}
\bigcup\limits_{i=1}^{n/2} (A_{2i-1} - A_{2i}), & n\text{ 为偶数} \\
\bigcup\limits_{i=1}^{(n-1)/2} (A_{2i-1} - A_{2i}) \bigcup A_1, & n\text{ 为奇数}
\end{cases}
$$

推论 1.1.5 如果事件 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$, 则 $(n \geqslant 2)$

$$\mathop{\Delta}_{i=1}^{n} A_i = \begin{cases} \bigcup\limits_{i=1}^{n/2}(A_{2i} - A_{2i-1}), & n \text{ 为偶数} \\ \bigcup\limits_{i=1}^{(n-1)/2}(A_{2i+1} - A_{2i} + A_1), & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 中的 n 个事件. 现从这 n 个事件中任取 j 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_j}$ 与其余的 $n-j$ 个事件的逆事件 $\overline{A}_{i_{j+1}}, \overline{A}_{i_{j+2}}, \cdots, \overline{A}_{i_n}$ 相交得 $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_j} \overline{A}_{i_{j+1}} \cdots \overline{A}_{i_n}$, 然后再求所有可能的和, 并用 $B_{j/n}$ 表示这个和. 例如

$$B_{1/2} = A_1\overline{A}_2 + A_2\overline{A}_1, \quad B_{2/2} = A_1A_2, \quad B_{0/2} = \overline{A}_1\overline{A}_2$$

$$B_{1/3} = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_2\overline{A}_1\overline{A}_3 + A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$$

$$B_{2/3} = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$$

$$B_{3/3} = A_1A_2A_3, \quad B_{0/3} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

$$B_{1/4} = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + A_2\overline{A}_1\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$$

$$B_{0/4} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4, \quad B_{4/4} = A_1A_2A_3A_4 \cdots$$

引入符号 $B_{j/n}(0 \leqslant j \leqslant n)$ 后, 由定理 1.1.6 立得如下推论.

推论 1.1.6　对 Ω 中任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有

$$\mathop{\Delta}_{i=1}^{n} A_i = B_{1/n} + B_{3/n} + B_{5/n} + \cdots + B_{(2[(n+1)/2]-1)/n} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} B_{(2j-1)/n}$$

因

$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \bigcup A_2) - A_1A_2$$

$$A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \bigcup A_2\overline{A}_1\overline{A}_3 \bigcup A_3\overline{A}_1\overline{A}_2 \bigcup A_1A_2A_3$$

且

$$\begin{aligned} &(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) - (A_1A_2 \bigcup A_1A_3 \bigcup A_2A_3) \\ =&(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3)\overline{(A_1A_2 \bigcup A_1A_3 \bigcup A_2A_3)} \\ =&(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3)(\overline{A}_1\overline{A}_2 \bigcup \overline{A}_1\overline{A}_2 \bigcup \overline{A}_2\overline{A}_3 \bigcup \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \end{aligned}$$

$$=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_2\overline{A}_1\overline{A}_3\bigcup A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$$

所以 $\overset{3}{\underset{i=1}{\Delta}} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{3} A_3-(A_1A_2\bigcup A_1A_3\bigcup A_2A_3)+A_1A_2A_3$, 由此, 我们猜想有下述表达式定理.

定理 1.1.7 (表达式定理)　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 中的 n 个事件, 则

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} A_i=\bigcup_{I=1}^{n} A_i-\bigcup_{1\leqslant i<j}^{n} A_iA_j+\bigcup_{1\leqslant i<j<k}^{n} A_iA_jA_k-\cdots+(-1)^{n-1}A_1A_2\cdots A_n$$

其中 $\bigcup\limits_{1\leqslant i<j}^{n} A_iA_j$ 表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两积的和, $\bigcup\limits_{1\leqslant i<j<k}^{n} A_iA_jA_k$ 为 n 个事件三三积的和, 其中符号 “$-$” 表示 “$\backslash$”, “$+$” 表示 “$\bigcup$”, 且规定

$$+(-1)=\backslash,\quad +(+1)=\bigcup,\quad (-1)^{2k}=+=\bigcup,\quad (-1)^{2k-1}=\backslash$$

由数学归纳法可证定理. 但是, 因为较复杂和冗长, 故略.

定理 1.1.8　对事件 A 与任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有 $A\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} A_i\right)=\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}}(AA_i)$.

证明是明显的.

推论 1.1.6 和定理 1.1.7 给出了 n 个事件对称差 $\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} A_i$ 的表达式. 我们自然会进一步问 $\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} A_i$ 的概率等于什么? 因为 $A_1A_2\subset A_1\bigcup A_2$, 所以

$$P\{A_1\Delta A_2\}=P\{A_1\bigcup A_2\}-P\{A_1A_2\}=P\{A_1\}+P\{A_2\}-2P\{A_1A_2\}$$

又因

$$\overset{3}{\underset{i=1}{\Delta}} A_i=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_2\overline{A}_1\overline{A}_3+A_3\overline{A}_1\overline{A}_2+A_1A_2A_3$$

故

$$P\left\{\overset{3}{\underset{I=1}{\Delta}} A_1\right\}=P\{A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}+P\{A_2\overline{A}_1\overline{A}_3\}+P\{A_3\overline{A}_1\overline{A}_2\}+P\{A_1A_2A_3\}$$

且

$$P\{A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}=P\{A_1\backslash A_2\backslash A_3\}=P\{A_1-A_1A_2-(A_1-A_1A_2)A_3\}$$

$$=P\{A_1-A_1A_2\}-P\{(A_1-A_1A_2)A_3\}$$

$$=P\{A_1\}-P\{A_1A_2\}-P\{A_1A_3\}+P\{A_1A_2A_3\}$$

同理

$$P\{A_2\overline{A}_1\overline{A}_3\}=P\{A_2\}-P\{A_2A_1\}-P\{A_2A_3\}+P\{A_1A_2A_3\}$$

$$P\{A_3\overline{A}_1\overline{A}_2\}=P\{A_3\}-P\{A_3A_1\}-P\{A_3A_2\}+P\{A_1A_2A_3\}$$

从而

$$P\left\{\mathop{\Delta}_{I=1}^{3}A_i\right\}=\sum_{i=1}^{3}P\{A_i\}-2\sum_{1\leqslant i\leqslant j}^{3}P\{A_iA_j\}+4P\{A_1A_2A_3\}$$

由此, 我们猜想有如下的定理.

定理 1.1.9　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 中的 n 个事件, 则对任意正整数 $n\geqslant 2$, $\mathop{\Delta}\limits_{i=1}^{n}A_i$ 的概率为

$$P\left\{\mathop{\Delta}_{i=1}^{n}A_i\right\}=(-2)^0S_1+(-2)^1S_2+(-2)^2S_3+\cdots+(-2)^{n-1}S_n \tag{1.1.3}$$

其中

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\},\quad S_2=\sum_{i\leqslant i<j}^{n}P\{A_iA_j\}$$

$$S_3=\sum_{1\leqslant i<j<k}^{n}P\{A_iA_jA_k\},\quad \cdots,\quad S_n=P\{A_1A_2\cdots A_n\}$$

证明　现用数学归纳法证之. 因当 $n=2$ 和 $n=3$ 时, (1.1.3) 式成立. 现设 $n=k$ 时 (1.1.3) 式成立, 往证 $n=k+1$ 时 (1.1.3) 式也成立.

因为

$$P\left\{\mathop{\Delta}_{i=1}^{k+1}A_i\right\}=P\left\{\left(\mathop{\Delta}_{i=1}^{k}A_i\right)\Delta A_{k+1}\right\}$$
$$=P\left\{\mathop{\Delta}_{i=1}^{k}A_i\right\}+P\{A_{k+1}\}-2P\left\{A_{k+1}\left(\mathop{\Delta}_{i=1}^{k}A_i\right)\right\}$$

由归纳假设与定理 1.1.8, 得

$$P\left\{\mathop{\Delta}_{i=1}^{k+1}A_i\right\}=(-2)^0\sum_{i=1}^{k}P\{A_i\}$$

$$
\begin{aligned}
&+(-2)^1\sum_{1\leqslant i<j}^{k}P\{A_iA_j\}+(-2)^2\sum_{1\leqslant j<j<k}^{k}P\{A_iA_jA_k\}\\
&+\cdots+(-2)^{k-1}P\{A_1A_2\cdots A_k\}+P\{A_{k+1}\}\\
&-2\left[\sum_{i=1}^{k}\{A_{k+1}A_i\}+(-2)^1\sum_{1\leqslant i<j}^{k}P\{A_iA_jA_{k+1}\}\right.\\
&\left.+\cdots+(-2)^{k-1}P\{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}\}\right]\\
=&(-2)^0\sum_{i=1}^{k+1}P\{A_i\}+(-2)^1\sum_{1\leqslant i<j<k}^{k+1}P\{A_iA_jA_k\}\\
&+\cdots+(-2)^kP\{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}\}
\end{aligned}
$$

此式当 $n=k+1$ 时 (1.1.3) 式也成立, 于是定理 1.1.9 得证.

前面我们把两个事件的对称差概念推广到任意有限多个事件, 很自然我们会令 $n\to\infty$, 把这个概念推广到可数无穷多个事件.

定义 1.1.3 设 $\{A_i\}$ 为 Ω 中的事件序列, 记 $\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i$ 为 B_n, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n$ 存在, 即如果 $\varliminf\limits_{n\to\infty}B_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}B_n$, 则称 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\lim\limits_{n\to\infty}\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i$ 为 $\{A_i\}$ 的对称差或奇交. 记为 $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i$, 即 $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i=\lim\limits_{n\to\infty}\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i$.

给了 $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i$ 的定义后, 我们首先会问: 在什么条件下 $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i$ 存在? 为回答这个问题, 先来看几个例子.

例 1.1.1 如果 $\{A_i\}$ 为两两互斥事件序列, 则由定理 1.1.2 易见 $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i$ 存在, 且 $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i, \lim\limits_{i\to\infty}A_i=\varnothing$.

例 1.1.2 设 A 为 Ω 中的一个事件, 令 $A_i=A, i\geqslant 1$, 则由于事件序列 $\{A_i\}$ 的极限存在, 且 $\lim\limits_{i\to\infty}A_i=A$. 记 B_n 为 $\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}}A_i$, 则得事件序列 $\{B_n,n\geqslant 2\}$, 从而有 $B_2=A_1\Delta A_2=\varnothing, B_3=A, B_4=\varnothing, B_5=A,\cdots$, 即 $B_{2j}=\varnothing, B_{2j+1}=A, j=1,2,3,\cdots$. 对 Ω 中任意样本点 e, 如果 $e\in A$, 则 $e\in B_{2j+1}$, 且 $e\overline{\in}B_{2j}, j=1,2,3,\cdots$, 即有无穷多个 B_n 含有 e, 也有无穷多个 B_n 不含有 e, 由定理 1.1.1 知, $e\in\varlimsup\limits_{n\to\infty}B_n$,