动态测量数据处理理论

Theory of Kinematic Surveying Data Processing

赵长胜 著

测绘出版社

动态测量数据处理理论

Theory of Kinematic Surveying Data Processing

赵长胜 著

测绘出版社

·北京·

内容提要

本书归纳总结了动态数据处理理论与算法的主要内容,详细论述了卡尔曼滤波的基本原理和基本算法。主要包括卡尔曼滤波函数动态模型、观测模型、随机模型、误差探测诊断与修复、误差实时估计及抗差自适应卡尔曼滤波、有色噪声卡尔曼滤波、扩展卡尔曼滤波、无迹卡尔曼滤波、容积卡尔曼滤波和粒子滤波等。

本书侧重卡尔曼滤波的实用理论与方法,理论推导与论述力求深入浅出。本书可以作为测绘科学与技术及其相关学科硕士生和博士生的参考用书,也可供相关学科教师、科研人员和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

动态测量数据处理理论 / 赵长胜著. —北京 : 测绘出版社, 2016.12
ISBN 978-7-5030-4025-2

Ⅰ. ①动…　Ⅱ. ①赵…　Ⅲ. ①动态测量—数据处理—研究　Ⅳ. ①TP274

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 322804 号

责任编辑　巩　岩
执行编辑　侯杨杨　**封面设计**　李　伟　**责任校对**　石书贤　**责任印制**　陈　超

出版发行　测绘出版社
地　　址　北京市西城区三里河路 50 号
邮政编码　100045
电子信箱　smp@sinomaps.com
印　　刷　北京京华虎彩印刷有限公司
成品规格　169mm×239mm
印　　张　9
版　　次　2016 年 12 月第 1 版
印　　数　0001—1000
电　　话　010—83543956(发行部)
010—68531609(门市部)
010—68531363(编辑部)
网　　址　www.chinasmp.com
经　　销　新华书店
字　　数　173 千字
印　　次　2016 年 12 月第 1 次印刷
定　　价　48.00 元

书　　号　ISBN 978-7-5030-4025-2
本书如有印装质量问题,请与我社门市部联系调换。

前　言

从卡尔曼于1960年提出卡尔曼滤波以来，动态测量数据处理理论得到了很大发展，包括对动态数学模型的精化、各种误差的处理方法、自适应滤波和非线性滤波算法（扩展卡尔曼滤波、容积卡尔曼滤波、无迹卡尔曼滤波和粒子滤波等）。滤波技术在许多科技领域都有广泛应用，载体导航就是其中一项重要应用。卫星导航、惯性导航等多系统组合导航系统采用滤波技术很大程度上提高了导航的精度、可靠性和实时性。

本书共分为7章。第1章卡尔曼滤波，包括卡尔曼滤波的动态模型、观测模型与随机模型的描述，卡尔曼滤波的算法和新息向量的性质，误差探测、诊断与修复、随机模型的实时估计算法和发散问题的解决方案等内容。第2章抗差自适应卡尔曼滤波，包括动态模型误差、观测模型误差处理算法和随机误差的自适应估计方法。第3章有色噪声卡尔曼滤波，包括白噪声驱动下的有色噪声滤波、噪声相关的卡尔曼滤波算法、动态噪声或观测噪声或均为有色噪声情形下线性系统滤波、抗差有色噪声滤波等理论与算法。第4章扩展卡尔曼滤波，包括迭代滤波、广义卡尔曼滤波和顾及二次项的卡尔曼滤波。第5章无迹卡尔曼滤波，包括无迹卡尔曼滤波算法、抗差无迹卡尔曼滤波算法和自适应卡尔曼滤波算法。第6章容积卡尔曼滤波，包括容积卡尔曼滤波理论与算法和平方根容积卡尔曼滤波理论与算法。第7章粒子滤波，包括粒子滤波原理和算法。

在本书写作过程中，笔者参阅了大量国内外相关文献，在此，对所引用文献的作者表示衷心感谢。由于卡尔曼滤波理论与方法涉及面广，内容繁多，因此还有许多内容并未在本书中写入，加上笔者水平有限，书中难免有不足之处，恳请同行专家及广大读者批评指正。

目录

第1章 卡尔曼滤波

§1.1 卡尔曼滤波基础

1.1.1 卡尔曼数学模型

在许多科技问题中被估计的参数 $\boldsymbol{X}$ 是随时间 t 不断变化的随机向量，这样的系统就是动态系统。一般把 $\boldsymbol{X}(t)$ 称为动态系统在 t 时刻的状态。如果动态系统的运动状态 $\boldsymbol{X}(t)$ 随时间 t 连续变化，则称该系统为连续时间系统。通常用一个具有随机初始状态的向量微分方程来描述连续时间系统，该方程称为动态方程。这个方程可能受到某些随机干扰的影响及描述模型不准确的干扰等，这些干扰称为动态噪声，也就是模型噪声。观测量与状态变量之间可能有某些函数的依赖关系，这种关系可用方程来描述，该方程称为观测方程。同时，观测量存在随机测量误差，这种误差称为测量噪声。如果用 $\boldsymbol{X}(t)$、$\boldsymbol{L}(t)$ 分别表示动态系统 m 维的状态向量和 n 维观测向量，则动态方程和观测方程一般表示为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=f(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{U}(t),\boldsymbol{\Omega}(t),t)}{\mathrm{d}t},t\geqslant t_0\\&\boldsymbol{L}(t)=h(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{U}(t),\boldsymbol{\Delta}(t),t)\end{aligned}\right\}\tag{1.1.1}$$

式中，f 和 h 分别为已知的 m 维和 n 维向量函数，$\boldsymbol{U}(t)$ 是 r 维控制(或输入)向量，$\boldsymbol{\Omega}(t)$ 是 p 维随机动态噪声向量，$\boldsymbol{\Delta}(t)$ 为 n 维随机观测噪声向量，初始状态 $\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0$ 是具有确定分布的 m 维随机向量。状态方程和观测方程是动态系统的函数模型。若式(1.1.1)中两个方程都是关于 $\boldsymbol{X}(t)$、$\boldsymbol{U}(t)$、$\boldsymbol{\Omega}(t)$、$\boldsymbol{\Delta}(t)$ 的线性函数，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{\Omega}(t)}{\mathrm{d}t},t\geqslant t_0\\&\boldsymbol{L}(t)=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{\Delta}(t)\end{aligned}\right\}\tag{1.1.2}$$

式中，$\boldsymbol{F}(t)$、$\boldsymbol{C}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{G}(t)$ 分别为已知且为随时间 t 连续变化的系数矩阵，则称式(1.1.2)所描述的动态系统和观测系统为线性系统。

如果需要的只是在某些离散时刻(测量时刻或抽样时刻)$\{t_k\}$ 的状态，则状态参数和测量变量就分别为两个随机序列 $\{\boldsymbol{X}(t_k)\}$ 和 $\{\boldsymbol{L}(t_k)\}$，把这样的动态系统称为离散系统。在离散系统中，随时间变化的状态所满足的动态方程，一般表示为具有随机初始状态，并带有随机扰动的差分方程(递推方程)，它通常可由连续时间系

统的动态微分方程经过离散化得到。

如果先不考虑系统具有确定性输入时，离散动态系统的卡尔曼滤波状态方程和观测方程为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{X}_k&=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}+\boldsymbol{\Omega}_k\\\boldsymbol{L}_k&=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\Delta}_k\end{aligned}\right\}\tag{1.1.3}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}$为状态转移矩阵，$\boldsymbol{B}_k$为观测设计矩阵，$\boldsymbol{\Omega}_k$和$\boldsymbol{\Delta}_k$分别为动态噪声和观测噪声，$\boldsymbol{X}_0$为初始状态。假定$\boldsymbol{X}_0$、$\boldsymbol{\Omega}_k$和$\boldsymbol{\Delta}_k$的统计性质是已知的。

状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}$具有如下两个特性：

(1)累积规则，$\boldsymbol{\Phi}_{k,j}\boldsymbol{\Phi}_{j,i}=\boldsymbol{\Phi}_{k,j}$，$k>j>i$。

(2)求逆规则，$\boldsymbol{\Phi}_{k,j}=\boldsymbol{\Phi}_{j,k}^{-1}$。

系统的随机模型有以下几种情况：

(1)系统的初始状态$\boldsymbol{X}_0$是具有正态分布或其他分布的随机变量，其均值和方差矩阵为

$$E(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{\mu}_{X_0},\mathrm{var}(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{D}_{X_0}\tag{1.1.4}$$

(2)系统的动态噪声$\boldsymbol{\Omega}_k$和观测噪声$\boldsymbol{\Delta}_k$是零均值白噪声或高斯白噪声序列，且动态噪声与观测噪声互不相关，即有

$$\left.\begin{aligned}&E(\boldsymbol{\Omega}_k)=0\\&E(\boldsymbol{\Delta}_k)=0\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_j)=\boldsymbol{D}_{\Omega_k}\delta_{kj}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Delta}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=\boldsymbol{D}_{\Delta_k}\delta_{kj}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1.5}$$

式中

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j\\0, & k\neq j\end{cases}$$

(3)系统的动态噪声$\boldsymbol{\Omega}_k$是有色噪声序列，而观测噪声$\boldsymbol{\Delta}_k$是零均值白噪声序列，且动态噪声与观测噪声互不相关，即有

$$\left.\begin{aligned}&E(\boldsymbol{\Omega}_k)=0\\&E(\boldsymbol{\Delta}_k)=0\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_j)=\boldsymbol{D}_{\Omega_k}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Delta}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=\boldsymbol{D}_{\Delta_k}\delta_{kj}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1.6}$$

(4)系统的动态噪声$\boldsymbol{\Omega}_k$是零均值白噪声序列，观测噪声$\boldsymbol{\Delta}_k$是有色噪声序列，且动态噪声与观测噪声互不相关，即有

$$\left.\begin{aligned}&E(\boldsymbol{\Omega}_k)=0\\&E(\boldsymbol{\Delta}_k)=0\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_j)=\boldsymbol{D}_{\Omega_k}\delta_{kj}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Delta}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=\boldsymbol{D}_{\Delta_k}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1.7}$$

(5)系统的动态噪声 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 和观测噪声 $\boldsymbol{\Delta}_k$ 均为有色噪声序列,且动态噪声与观测噪声互不相关,即有

$$\left.\begin{aligned}&E(\boldsymbol{\Omega}_k)=0\\&E(\boldsymbol{\Delta}_k)=0\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_j)=\boldsymbol{D}_{\Omega_k}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Delta}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=\boldsymbol{D}_{\Delta_k}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1.8}$$

(6)系统的动态噪声 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 和观测噪声 $\boldsymbol{\Delta}_k$ 均为有色噪声序列,且动态噪声与观测噪声相关,即有

$$\left.\begin{aligned}&E(\boldsymbol{\Omega}_k)=0\\&E(\boldsymbol{\Delta}_k)=0\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_j)=\boldsymbol{D}_{\Omega_k}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Delta}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=\boldsymbol{D}_{\Delta_k}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=\boldsymbol{D}_{\Omega_{\Delta_k}}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.9}$$

(7)系统的动态噪声 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 和观测噪声 $\boldsymbol{\Delta}_k$ 均为白噪声序列,但动态噪声与观测噪声相关,即有

$$\left.\begin{aligned}&E(\boldsymbol{\Omega}_k)=0\\&E(\boldsymbol{\Delta}_k)=0\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_j)=\boldsymbol{D}_{\Omega_k}\delta_{kj}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Delta}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=\boldsymbol{D}_{\Delta_k}\delta_{kj}\\&\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=\boldsymbol{D}_{\Omega_{\Delta_k}}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.10}$$

如果式(1.1.3)中的 $\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}=\boldsymbol{\Phi}$,以及 $\{\boldsymbol{\Omega}_k\}$ 为平稳随机序列,则式(1.1.3)所描述的线性动态系统称为定常的;同样,如果 $\boldsymbol{B}_k=\boldsymbol{B}$,以及 $\{\boldsymbol{\Delta}_k\}$ 为平稳随机序列,则式(1.1.3)所描述的线性观测系统称为定常的;此时,式(1.1.3)总称为定常线性系统。

1.1.2 卡尔曼滤波算法

设动态离散系统函数模型为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}+\boldsymbol{\Omega}_k\\&\boldsymbol{L}_k=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\Delta}_k\end{aligned}\right\}\tag{1.1.11}$$

式中，系统的动态噪声 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 和观测噪声 $\boldsymbol{\Delta}_k$ 是互不相关的零均值白噪声或高斯白噪声序列。系统初始状态和随机模型分别具有式(1.1.4)和式(1.1.5)所表述的统计性质，其中 $\boldsymbol{X}_0$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_{X_0}$ 分别是动态系统的初始状态及其方差。

设如果在测量 $k-1$ 次后，已经得到 $\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$ 的估计值，那么根据动态方程就可以预测等于 k 次的状态值，即

$$\bar{\boldsymbol{X}}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1} \tag{1.1.12}$$

预测值 $\bar{X}_k$ 的协方差为

$$\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{D}_{\hat{X}_{k-1}}\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Omega_k} \tag{1.1.13}$$

将预测值 $\bar{\boldsymbol{X}}_k$ 作为 k 时刻的虚拟观测值，与 k 时刻的实际观测值联合平差，可获得 k 时刻状态参数的最优估值 $\hat{\boldsymbol{X}}_k$。联合平差的函数模型为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{\bar{X}_k}&=\hat{\boldsymbol{X}}_k-\bar{\boldsymbol{X}}_k\\ \boldsymbol{V}_k&=\boldsymbol{B}_k\hat{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{L}_k\end{aligned}\right\} \tag{1.1.14}$$

其权为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{\bar{X}_k}&=\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}^{-1}\\ \boldsymbol{P}_k&=\boldsymbol{D}_{\Delta_k}^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{1.1.15}$$

组成法方程，并求解得

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k=(\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}^{-1}+\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\Delta_k}^{-1}\boldsymbol{B}_k)^{-1}(\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}^{-1}\bar{\boldsymbol{X}}_k+\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\Delta_k}^{-1}\boldsymbol{L}_k) \tag{1.1.16}$$

$\hat{\boldsymbol{X}}_k$ 的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{D}_{\hat{X}_k}^{-1}=(\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}^{-1}+\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\Delta_k}^{-1}\boldsymbol{B}_k)^{-1} \tag{1.1.17}$$

由矩阵反演公式可得

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\bar{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k})^{-1}(\boldsymbol{B}_k\bar{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{L}_k) \tag{1.1.18}$$

令

$$\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{X_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k})^{-1} \tag{1.1.19}$$

则式(1.1.18)为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\bar{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{J}_k(\boldsymbol{B}_k\bar{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{L}_k) \tag{1.1.20}$$

令

$$\bar{\boldsymbol{V}}_k=\boldsymbol{B}_k\bar{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{L}_k \tag{1.1.21}$$

其协方差矩阵为

$$\boldsymbol{D}_{\bar{V}_k}=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k} \tag{1.1.22}$$

将式(1.1.21)代入式(1.1.20)得

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\bar{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{J}_k\bar{\boldsymbol{V}}_k \tag{1.1.23}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{X}}_k$ 是根据动态系统状态方程获得的状态估值，称为一步预估值，$\boldsymbol{B}_k\bar{\boldsymbol{X}}_k$ 是观测值的预估值，$\bar{\boldsymbol{V}}_k$ 称为新息向量，也称为预报残差，$\boldsymbol{J}_k\bar{\boldsymbol{V}}_k$ 是第 k 时刻新观测值对一步预估值 $\bar{\boldsymbol{X}}_k$ 的修正值，也是用新观测值对动态系统状态方程的修正值，$\boldsymbol{J}_k$ 为增益

矩阵。

将式(1.1.17)按矩阵反演展开可以得到协方差矩阵的递推算法，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{X_k}&=\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}-\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k})^{-1}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\\&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{B}_k)\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

上述式(1.1.18)至式(1.1.23)就是离散动态系统卡尔曼滤波递推公式。

1.1.3 新息向量的性质

1.新息向量的数学期望等于零

由式(1.1.21)定义的新息向量实际是 t_k 时刻预报观测向量 $\bar{\boldsymbol{L}}_k=\boldsymbol{B}_k\bar{\boldsymbol{X}}_k$ 与实际观测向量 $\boldsymbol{L}_k$ 的差值，即

$$\bar{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}-\boldsymbol{L}_k \tag{1.1.25}$$

新息向量 $\bar{\boldsymbol{V}}_k$ 的数学期望为

$$\begin{aligned}E(\bar{\boldsymbol{V}}_k)&=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}E(\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1})-E(\boldsymbol{L}_k)\\&=\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X}_k\\&=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{1.1.26}$$

新息向量 $\bar{\boldsymbol{V}}_k$ 的协方差为

$$\boldsymbol{D}_{\bar{V}_k}=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k} \tag{1.1.27}$$

2.新息向量的方差大于观测残差的方差

t_k 时刻观测残差是观测值平差值与观测值的差值，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_k&=\hat{\boldsymbol{L}}_k-\boldsymbol{L}_k=\boldsymbol{B}_k\hat{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{L}_k\\&=\boldsymbol{B}_k(\bar{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{J}_k\bar{\boldsymbol{V}}_k)-\boldsymbol{L}_k\\&=\bar{\boldsymbol{V}}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{J}_k\bar{\boldsymbol{V}}_k\\&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{J}_k)\bar{\boldsymbol{V}}_k\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

因此，可得观测残差协方差矩阵与预报残差矩阵之间的关系为

$$\boldsymbol{D}_{V_k}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{J}_k)\boldsymbol{D}_{\bar{V}_k}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{J}_k)^{\mathrm{T}} \tag{1.1.29}$$

在测量平差中，可以证明：观测残差的协方差矩阵等于观测值的协方差矩阵与观测值平差值的协方差矩阵之差，即

$$\boldsymbol{D}_{V_k}=\boldsymbol{D}_{\Delta_k}-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{X_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}} \tag{1.1.30}$$

将式(1.1.24)带入式(1.1.30)，还可以得到

$$\boldsymbol{D}_{\bar{V}_k}=\boldsymbol{D}_{V_k}+\boldsymbol{B}_k(\boldsymbol{D}_{X_k}+\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k})\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}} \tag{1.1.31}$$

显然有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}_{\bar{V}_k})>\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}_{V_k}) \tag{1.1.32}$$

即新息向量的方差大于观测残差的方差。

3.新息向量序列 $\bar{\boldsymbol{V}}_1$、$\bar{\boldsymbol{V}}_2$、…、$\bar{\boldsymbol{V}}_k$ 互相正交，或者称新息向量为白噪声序列

证明该性质即证明下式成立，则

$$E(\bar{\boldsymbol{V}}_k\bar{\boldsymbol{V}}_i^{\mathrm{T}})=0 \quad (1\leqslant i\leqslant k-1) \tag{1.1.33}$$

即信息向量之间统计独立。

为证明式(1.1.33)成立，先证明 $\bar{\boldsymbol{V}}_k$ 与 $\bar{\boldsymbol{V}}_{k-1}$ 统计独立。由预测残差定义式可得

$$\bar{\boldsymbol{V}}_k=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}-\boldsymbol{L}_k \tag{1.1.34}$$

类似式(1.1.16)，可将 $\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$ 表示为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}=\boldsymbol{P}_{\hat{X}_{k-1}}^{-1}\boldsymbol{D}_{\bar{X}_{k-1}}\bar{X}_{k-1}+\boldsymbol{P}_{\hat{X}_{k-1}}^{-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{L}_{k-1} \tag{1.1.35}$$

式中，$\boldsymbol{P}_{\hat{X}_{k-1}}$ 是 $\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$ 的权矩阵，且

$$\boldsymbol{P}_{\hat{X}_k}=\boldsymbol{P}_{\bar{X}_k}+\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\Delta_k}^{-1}\boldsymbol{B}_k \tag{1.1.36}$$

将式(1.1.35)代入式(1.1.34)，得

$$\bar{\boldsymbol{V}}_k=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{\hat{X}_{k-1}}^{-1}\boldsymbol{D}_{\bar{X}_{k-1}}+\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{\hat{X}_{k-1}}^{-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{L}_{k-1}-\boldsymbol{L}_k \tag{1.1.37}$$

同样由新息向量定义式可得

$$\bar{\boldsymbol{V}}_{k-1}=\boldsymbol{B}_{k-1}\bar{\boldsymbol{X}}_{k-1}-\boldsymbol{L}_{k-1} \tag{1.1.38}$$

由于观测噪声为白噪声，即有 $\boldsymbol{D}_{L_kL_{k-1}}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{D}_{\bar{X}_{k-1}L_{k-1}}=\boldsymbol{0}$，则有

$$\boldsymbol{D}_{\bar{V}_k\bar{V}_{k-1}}=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{\hat{X}_{k-1}}^{-1}\boldsymbol{P}_{\bar{X}_{k-1}}\boldsymbol{D}_{\bar{X}_{k-1}}\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{\hat{X}_{k-1}}^{-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{D}_{\Delta_{k-1}} \tag{1.1.39}$$

因为 $\boldsymbol{P}_{\bar{X}_{k-1}}$，$\boldsymbol{D}_{\bar{X}_{k-1}}=I$，$\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{D}_{\Delta_{k-1}}=\boldsymbol{I}$，则式(1.1.39)为

$$\boldsymbol{D}_{\bar{V}_k\bar{V}_{k-1}}=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{\hat{X}_{k-1}}^{-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{\hat{X}_{k-1}}^{-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0} \tag{1.1.40}$$

即

$$\bar{\boldsymbol{V}}_k\sim N(0,\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k}) \tag{1.1.41}$$

该性质说明当动态噪声 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 和观测噪声 $\boldsymbol{\Delta}_k$ 服从正态分布，则新息向量也服从正态分布，这是新息向量检验的基础。

4. t_k 时刻观测向量 $\boldsymbol{L}_k$ 是状态初值 $\hat{\boldsymbol{X}}_0$ 和新息向量 $\bar{\boldsymbol{V}}_1$、$\bar{\boldsymbol{V}}_2$、…、$\bar{\boldsymbol{V}}_k$ 的线性组合

预测残差 $\bar{\boldsymbol{V}}_k$ 与观测向量 $\boldsymbol{L}_k$ 的关系式为

$$\boldsymbol{L}_k=\boldsymbol{B}_k\bar{\boldsymbol{X}}_k-\bar{\boldsymbol{V}}_k \tag{1.1.42}$$

将 $\bar{\boldsymbol{X}}_k$ 的表达式(1.1.12)展开，顾及式(1.1.23)得

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{X}}_k&=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}\\&=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\bar{\boldsymbol{X}}_{k-1}-\boldsymbol{J}_{k-1}\bar{\boldsymbol{V}}_{k-1})\\&=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\boldsymbol{\Phi}_{k-1,k-2}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-2}-\boldsymbol{J}_{k-1}\bar{\boldsymbol{V}}_{k-1})\\&=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-2}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-2}-\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{J}_{k-1}\bar{\boldsymbol{V}}_{k-1}\\&=\cdots\end{aligned}$$

$$\bar{\boldsymbol{X}}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k,0}\hat{\boldsymbol{X}}_0-\sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k,i}\boldsymbol{J}_i\bar{\boldsymbol{V}}_i$$

将上式代入式(1.1.42)，得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_k &= \boldsymbol{B}_k\left(\boldsymbol{\Phi}_{k,0}\hat{\boldsymbol{X}}_0 - \sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k,i}\boldsymbol{J}_i\overline{\boldsymbol{V}}_i\right) - \overline{\boldsymbol{V}}_k \\ &= \boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,0}\hat{\boldsymbol{X}}_0 - \boldsymbol{B}_k\sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k,i}\boldsymbol{J}_i\overline{\boldsymbol{V}}_i - \overline{\boldsymbol{V}}_k \end{aligned} \tag{1.1.43}$$

显然，$\boldsymbol{L}_k$ 变为初值 $\hat{\boldsymbol{X}}_0$ 与各次观测值新息向量的函数。

1.1.4　卡尔曼滤波计算步骤

卡尔曼滤波公式繁琐，形式复杂，为了方便因而将各符号定义和公式分别列成表 1.1和表 1.2。卡尔曼滤波计算步骤归纳如下：

(1)存储 t_{k-1}时刻的状态估值向量 $\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$和状态估值的协方差矩阵 $\boldsymbol{D}_{\hat{X}_k-1}$。

(2)计算 t_k 的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}$和状态噪声的协方差矩阵 $\boldsymbol{D}_{\Omega_k}$。

(3)计算预测状态向量和协方差矩阵 $\overline{\boldsymbol{X}}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$，$\boldsymbol{D}_{\overline{X}_k}=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{D}_{\hat{X}_{k-1}}\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Omega_k}$。

(4)计算 t_k 的观测量误差方程系数矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 和常数向量 $\boldsymbol{L}_k$。

(5)确定观测向量的协方差矩阵或权矩阵。

(6)计算新息向量及其协方差矩阵 $\overline{\boldsymbol{V}}_k=\boldsymbol{B}_k\overline{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{L}_k$，$\boldsymbol{D}_{\overline{V}_k}=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\overline{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k}$。

(7)计算增益矩阵 $\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{D}_{k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\overline{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k})$。

(8)计算 t_k 时刻的状态估值向量估值及其协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{J}_k\hat{\boldsymbol{V}}_k$、$\boldsymbol{D}_{\hat{X}_k}$、$\boldsymbol{D}_{\hat{X}}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_k-\boldsymbol{B}_k)\boldsymbol{D}_{\overline{X}_k}$；令 $k=k+1$，回到(1)。

表 1.1　卡尔曼滤波变量定义及维数

变量	定义	维数
$\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$	t_{k-1}时刻的状态向量估值	$m\times1$
$\boldsymbol{D}_{\hat{X}_{k-1}}$	t_{k-1}时刻的状态向量估值 $\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$的协方差	$m\times m$
$\overline{\boldsymbol{X}}_k$	t_k 时刻的状态向量估值的一步预测值	$m\times1$
$\boldsymbol{D}_{\overline{X}_k}$	t_k 时刻的状态向量估值预测值 $\overline{\boldsymbol{X}}_k$ 的协方差	$m\times m$
$\hat{\boldsymbol{X}}_k$	t_k 时刻的状态向量估值	$m\times1$
$\boldsymbol{D}_{\hat{X}_k}$	t_k 时刻的状态向量估值 $\hat{\boldsymbol{X}}_k$ 的协方差	$m\times m$
$\boldsymbol{L}_k$	t_k 时刻的观测向量	$n_k\times1$
$\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}$	t_{k-1}到 t_k 时刻的状态转移矩阵	$m\times m$
$\boldsymbol{B}_k$	t_k 时刻的观测设计矩阵	$n_k\times m$
$\boldsymbol{\Delta}_k$	t_k 时刻的观测噪声向量	$n_k\times1$
$\boldsymbol{\Omega}_k$	t_k 时刻的状态模型噪声向量	$m\times1$
$\boldsymbol{D}_{\Delta_k}$	t_k 时刻的观测噪声协方差矩阵	$n_k\times n_k$

续表

变量	定义	维数
$\boldsymbol{D}_{\Omega_k}$	t_k 时刻的状态模型噪声协方差矩阵	$m\times m$
$\boldsymbol{P}_k$	t_k 时刻的观测向量的权矩阵	$n_k\times n_k$
$\boldsymbol{P}_{\bar{X}_k}$	t_k 时刻的状态向量预测值的权矩阵	$m\times m$
$\boldsymbol{V}_k$	t_k 时刻的观测残差向量	$n_k\times 1$
$\bar{\boldsymbol{V}}_k$	t_k 时刻的新息向量	$n_k\times 1$
$\boldsymbol{D}_{\bar{V}_k}$	t_k 时刻的新息向量的协方差	$n_k\times 1$
$\boldsymbol{J}_k$	t_k 时刻的增益矩阵	$m\times n_k$

表 1.2 白噪声卡尔曼滤波公式

观测向量	$\boldsymbol{L}_1、\boldsymbol{L}_2、\cdots、\boldsymbol{L}_{n_k}$
已知量	$\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1},\boldsymbol{B}_k,\boldsymbol{D}_{\Delta_k}$（或 $\boldsymbol{P}_k$），$\boldsymbol{D}_{\Omega_k}$
预测状态	$\bar{\boldsymbol{X}}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}$
预测状态协方差矩阵	$\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{D}_{\hat{X}_{k-1}}\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Omega_k}$
新息向量	$\bar{\boldsymbol{V}}_k=\boldsymbol{B}_k\bar{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{L}_k$
新息向量协方差矩阵	$\boldsymbol{D}_{\bar{V}_k}=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k}$
增益矩阵	$\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\Delta_k})^{-1}$
状态估计向量	$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\bar{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{J}_k\bar{\boldsymbol{V}}_k$
状态估计向量协方差矩阵	$\boldsymbol{D}_{\hat{X}_k}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{B}_k)\boldsymbol{D}_{\bar{X}_k}$
残差向量	$\boldsymbol{V}_k=\boldsymbol{B}_k\hat{\boldsymbol{X}}_k-\boldsymbol{L}_k$
残差向量协方差矩阵	$\boldsymbol{D}_{V_k}=\boldsymbol{D}_{\Delta_k}-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_{\hat{X}_k}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}$
初始条件	$\hat{\boldsymbol{X}}_0=(\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{B}_0)^{-1}\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{D}_{\Delta_0}^{-1}$ $\boldsymbol{D}_{\hat{X}_0}=\hat{\sigma}_0^2(\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{B}_0)^{-1},\hat{\sigma}_0^2=\dfrac{\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{V}_0}{n_0-m}$

§1.2 动态模型与观测模型

动态定位的主要目的是确定载体的运动状态，包括某个瞬时载体的位置、速度和加速度。动态模型提供的信息可作为载体运动的先验信息，建立描述载体运动的动态方程至关重要。现在常用的动态模型有匀速模型(CV 模型)、匀加速模型

(CA 模型)和变加速模型三种。

1.2.1　CV 模型

在三维直角坐标系中,载体在时刻 t_k 的位置向量 $\boldsymbol{X}(t_k)=[X(t_k)\quad Y(t_k)\quad Z(t_k)]^{\mathrm{T}}$,速度向量分别为 $\dot{\boldsymbol{X}}(t_k)=[\dot{X}(t_k)\quad \dot{Y}(t_k)\quad \dot{Z}(t_k)]^{\mathrm{T}}$,若考虑传感器的钟差,则 $\boldsymbol{X}$ 和 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 均为四维向量。假设载体做匀速运动,可采用 CV 模型。

CV 模型的状态方程可表达为

$$\begin{bmatrix} X(t_k) \\ Y(t_k) \\ Z(t_k) \\ \dot{X}(t_k) \\ \dot{Y}(t_k) \\ \dot{Z}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & t_k-t_{k-1} & & \\ & 1 & & & t_k-t_{k-1} & \\ & & 1 & & & t_k-t_{k-1} \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t_{k-1}) \\ Y(t_{k-1}) \\ Z(t_{k-1}) \\ \dot{X}(t_{k-1}) \\ \dot{Y}(t_{k-1}) \\ \dot{Z}(t_{k-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{X(t_k)} \\ W_{Y(t_k)} \\ W_{Z(t_k)} \\ W_{\dot{X}(t_k)} \\ W_{\dot{Y}(t_k)} \\ W_{\dot{Z}(t_k)} \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

令

$$\boldsymbol{X}_k=\begin{bmatrix} X(t_k) \\ Y(t_k) \\ Z(t_k) \\ \dot{X}(t_k) \\ \dot{Y}(t_k) \\ \dot{Z}(t_k) \end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & \Delta t_k & & \\ & 1 & & & \Delta t_k & \\ & & 1 & & & \Delta t_k \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{X}_{k-1}=\begin{bmatrix} X(t_{k-1}) \\ Y(t_{k-1}) \\ Z(t_{k-1}) \\ \dot{X}(t_{k-1}) \\ \dot{Y}(t_{k-1}) \\ \dot{Z}(t_{k-1}) \end{bmatrix},\boldsymbol{W}_k=\begin{bmatrix} W_{X(t_k)} \\ W_{Y(t_k)} \\ W_{Z(t_k)} \\ W_{\dot{X}(t_k)} \\ W_{\dot{Y}(t_k)} \\ W_{\dot{Z}(t_k)} \end{bmatrix}$$

则三维直角坐标系统中的 CV 模型的状态方程为

$$\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}+\boldsymbol{W}_k \tag{1.2.2}$$

CV 模型的随机模型为

$$\boldsymbol{D}_{W(t_k)}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1\Delta t_k+\frac{1}{3}\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{S}_{23}\boldsymbol{q}_2 \\ \boldsymbol{S}_{32}\boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{S}_{33}\boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

式中,$\boldsymbol{q}_1$、$\boldsymbol{q}_2$ 分别为位置和速度动态噪声的谱密度矩阵,它们均为 3×3 阶对角矩阵。而 $\boldsymbol{S}_{ij}$ 为

$$\boldsymbol{S}_{22}=\begin{bmatrix} S_{22}(1) & & \\ & S_{22}(2) & \\ & & S_{22}(3) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_{23}=\begin{bmatrix} S_{23}(1) & & \\ & S_{23}(2) & \\ & & S_{23}(3) \end{bmatrix},\boldsymbol{S}_{32}=\boldsymbol{S}_{23}$$

$$\boldsymbol{S}_{33}=\begin{bmatrix} S_{33}(1) & & \\ & S_{33}(2) & \\ & & S_{33}(3) \end{bmatrix}$$

而 $S_{22}(i)=(-3+2\alpha_i\Delta t_k+4\mathrm{e}^{-\alpha_i\Delta t_k}-\mathrm{e}^{-2\alpha_i\Delta t_k})/2\alpha_i^3$，$S_{23}(i)=S_{32}(i)=(-1-2\mathrm{e}^{-\alpha_i\Delta t_k}-\mathrm{e}^{-2\alpha_i\Delta t_k})/2\alpha_i^2$，$S_{33}(i)=(1-\mathrm{e}^{-2\alpha_i\Delta t_k})/2\alpha_i$，$i=1、2、3$。其中 α_i 为前后历元相关长度的倒数。α_i 值越大，则相关长度越短，此时从 t_{k-1} 到 t_k 状态参数可以有较大的变化；α_i 值越小，则表明从 t_{k-1} 到 t_k 状态的相关性越强，即参数之间的改变量越小。当$\alpha_i\to 0$ 时，前后历元相关性极大，这时有

$$\boldsymbol{D}_{W(t_k)}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1\Delta t_k+\frac{1}{3}\boldsymbol{q}_2\Delta t_k^2 & \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_2\Delta t_k^2 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_2\Delta t_k^2 & \boldsymbol{q}_2\Delta t_k \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

以地理坐标表示的状态向量包括位置向量和速度向量，位置向量包括纬度 φ、经差 λ 和高差 h，速度向量包括 $\dot{\varphi}$、$\dot{\lambda}$ 和 $\dot{h}$，若考虑钟差 δt 和钟速 $\delta\dot{t}$，则位置向量和速度向量分别为

$\boldsymbol{r}(t_k)=[\varphi(t_k)\quad \lambda(t_k)\quad h(t_k)\quad \delta t(t_k)]^{\mathrm{T}}$，$\dot{\boldsymbol{r}}(t_k)=[\dot{\varphi}(t_k)\quad \dot{\lambda}(t_k)\quad \dot{h}(t_k)\quad \delta\dot{t}(t_k)]^{\mathrm{T}}$

在地理坐标下的 CV 模型为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t_k) \\ \dot{\boldsymbol{r}}(t_k) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_{\Delta t_k} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t_{k-1}) \\ \dot{\boldsymbol{r}}(t_{k-1}) \end{bmatrix}+\boldsymbol{W}(t) \tag{1.2.5}$$

式中，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{R},\frac{1}{R\cos\varphi},1,1\right)$，其中 R 为地球半径。

系统噪声协方差矩阵为

$$\boldsymbol{D}_{W(t_k)}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1\Delta t_k+\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}_{23}\boldsymbol{q}_2 \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}_{32}\boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{S}_{33}\boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

1.2.2 CA 模型

假定载体处于稳定加速状态，则系统除了位置分量、速度分量，又增加了加速度分量，即

$$\ddot{\boldsymbol{X}}(t_k)=[\ddot{X}(t_k)\quad \ddot{Y}(t_k)\quad \ddot{Z}(t_k)]^{\mathrm{T}}$$

如此，载体的运动状态可以表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}(t_k) \\ \dot{\boldsymbol{X}}(t_k) \\ \ddot{\boldsymbol{X}}(t_k) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \Delta t\boldsymbol{I} & \frac{1}{2}\Delta t^2\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \Delta t\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}(t_{k-1}) \\ \dot{\boldsymbol{X}}(t_{k-1}) \\ \ddot{\boldsymbol{X}}(t_{k-1}) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\boldsymbol{W}(t_k) \tag{1.2.7}$$

其系统噪声协方差矩阵为

$$D_{W(t_k)}=\sigma_a^2\begin{bmatrix}\dfrac{\Delta t^4}{20} & \dfrac{\Delta t^3}{8} & \dfrac{\Delta t^2}{6}\\ \dfrac{\Delta t^3}{8} & \dfrac{\Delta t^2}{3} & \dfrac{\Delta t}{2}\\ \dfrac{\Delta t^2}{6} & \dfrac{\Delta t}{2} & 1\end{bmatrix} \tag{1.2.8}$$

若以地理坐标构建动态模型，则状态向量的加速度分量为

$$\ddot{r}(t_k)=[\ddot{\varphi}(t_k)\quad \ddot{\lambda}(t_k)\quad \ddot{h}(t_k)]^{\mathrm{T}} \tag{1.2.9}$$

则载体的 CA 模型为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}(t_k)\\ \dot{\boldsymbol{r}}(t_k)\\ \ddot{\boldsymbol{r}}(t_k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{SD} & \boldsymbol{UD}\\ & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{S}\\ & & \boldsymbol{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}(t_{k-1})\\ \dot{\boldsymbol{r}}(t_{k-1})\\ \ddot{\boldsymbol{r}}(t_{k-1})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ I\end{bmatrix}\boldsymbol{W}(t_k) \tag{1.2.10}$$

式中，$\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(S_i)=\mathrm{diag}\left(\dfrac{1-\Delta t_i}{\alpha_i}\right)$，$\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(T_i)=\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-\alpha_i\Delta t})$，$U=\mathrm{diag}(U_i)=\mathrm{diag}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha\Delta t}+\alpha_i\Delta t-1}{\alpha_i^2}\right)$。相应的系数噪声的协方差矩阵为

$$D_{W(t_k)}=\sigma_a^2\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1\Delta t+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{q}_2\Delta t^3+\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{q}_3 & \dfrac{1}{2}\boldsymbol{DUq}_2\Delta t^2+\boldsymbol{DS}_{12}\boldsymbol{q}_3 & \boldsymbol{DS}_{13}\boldsymbol{q}_3\\ \dfrac{1}{2}\boldsymbol{DUq}_2\Delta t^2+\boldsymbol{DS}_{21}\boldsymbol{q}_3 & \boldsymbol{q}_2\Delta t+\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{q}_3 & \boldsymbol{S}_{23}\boldsymbol{q}_3\\ \boldsymbol{DS}_{31}\boldsymbol{q}_3 & \boldsymbol{S}_{32}\boldsymbol{q}_3 & \boldsymbol{S}_{33}\boldsymbol{q}_3\end{bmatrix} \tag{1.2.11}$$

式中，$\boldsymbol{q}_3$ 为加速度谱密度矩阵，$\boldsymbol{S}_{11}=\mathrm{diag}\left((1+2\alpha_i\Delta t_k-2\alpha_i^2\Delta t_k+\dfrac{2}{3}\alpha_i^3\Delta t^3-4\alpha_i\Delta t_k\mathrm{e}^{-\alpha_i\Delta t_k}-\mathrm{e}^{-2\alpha_i\Delta t_k})/2\alpha_i^5\right)$，$\boldsymbol{S}_{12}=\boldsymbol{S}_{21}=\mathrm{diag}\left((1-2\alpha_i\Delta t_k+\alpha_i^2\Delta t_k^2+2\alpha_i\Delta t_k\mathrm{e}^{-\alpha_i\Delta t_k}+\mathrm{e}^{-2\alpha_i\Delta t_k})/2\alpha_i^4\right)$，$\boldsymbol{S}_{13}=\boldsymbol{S}_{31}=\mathrm{diag}\left((1-2\alpha_i\Delta t_k\mathrm{e}^{-\alpha_i\Delta t_k}-\mathrm{e}^{-2\alpha_i\Delta t_k})/2\alpha_i^3\right)$。

1.2.3　变加速度模型

当载体作非匀加速度运动时，也可构造相应的变加速模型，即

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{X}}\\ \ddot{\boldsymbol{X}}\\ \dddot{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \dot{\boldsymbol{X}}\\ \ddot{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{a}(t_k)+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{W}(t_k) \tag{1.2.12}$$

式中，$\boldsymbol{X}$、$\dot{\boldsymbol{X}}$和$\ddot{\boldsymbol{X}}$分别为载体的位置、速度和加速度向量，$\dddot{\boldsymbol{X}}$ 为扰动加速度向量，$\boldsymbol{a}(t_k)$为 t_k 时刻载体的加速度向量。