



张景中 科普文集

ZHANG JINGZHONG
KEPU WENJI



少年数学实验

张景中 王鹏远◎著

以“超级画板”免费版本为操作平台，设置由浅入深的 30 多个实验，让读者自己动手用计算机发现数学的奥秘，欣赏数学之美。

张景中
科普文集
ZHANG JINGZHONG
KEPU WENJI

少年数学实验

张景中 王鹏远◎著

图书在版编目 (CIP) 数据

少年数学实验 / 张景中, 王鹏远著. —武汉: 湖北科学技术出版社, 2016. 1

(张景中科普文集)

ISBN 978-7-5352-7211-9

I. ①少… II. ①张… ②王… III. ①数学—少年读物
IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 243755 号

出版统筹: 王小芳 刘志敏

责任编辑: 谭学军

封面设计: 戴 旻

出版发行: 湖北科学技术出版社

电话: 027—87679468

地 址: 武汉市雄楚大街 268 号

邮编: 430070

(湖北出版文化城 B 座 13—14 层)

网 址: <http://www.hbstp.com.cn>

印 刷: 武汉市金港彩印有限公司

邮编: 430023

710×1010 1/16

18 印张

268 千字

2016 年 1 月第 1 版

2016 年 1 月第 1 次印刷

定价: 38.00 元

本书如有印装质量问题 可找本社市场部更换

感谢湖北科学技术出版社督促我将这 30 多年里写的科普作品回顾整理一下。我想人的天性是懒的，就像物体有惰性。要是没什么鞭策，没什么督促，很多事情就做不成。我的第一本科普书《数学传奇》，就是在中国少年儿童出版社的文赞阳先生督促下写成的。那是 1979 年暑假，他到成都，到我家里找我。他说你还没有出过书，就写一本数学科普书吧。这么说了几次，盛情难却，我就试着写了，自己一读又不满意，就撕掉重新写。那时没有电脑或打字机，是老老实实在稿纸上写的。几个月下来，最后写了 6 万字。他给我删掉了 3 万，书就出来了。为什么要删？文先生说，他看不懂的就删，连自己都看不懂，怎么忍心印出来给小朋友看呢？书出来之后，他高兴地告诉我，很受欢迎，并动员我再写一本。

后来，其他的书都是被逼出来的。湖南教育出版社的《数学与哲学》，是我大学里高等代数老师丁石孙先生主编的套书中的一本。开策划会时我没出席，他们就留了“数学与哲学”这个题目给我。我不懂哲学，只好找几本书老老实实在地学了两个月，加上自己的看法，凑出来交卷。书中对一些古老的话题如“飞矢不动”“白马非马”“先有鸡还是先有蛋”“偶然与必然”，冒昧地提出自己的看法，引起了读者的兴趣。此书后来被 3 家出版社再版。又被选用改编为数学教育方向的《数学哲学》教材。其中许多材料还被收录于一些中学的校本教材之中。

《数学家的眼光》是被陈效师先生逼出来的。他说，您给文先生写了书，他退休了，我接替他的工作，您也得给我写。我经不住他一再劝说，就答应下来。一答应，就像是欠下一笔债似的，只好想到什么就写点什么。5 年积累下来，写

成了 6 万字的一本小册子。

这是外因，另外也有内因。自己小时候接触了科普书，感到帮助很大，印象很深。比如苏联伊林的《十万个为什么》《几点钟》《不夜天》《汽车怎样会跑路》；我国顾均正的《科学趣味》和他翻译的《乌拉·波拉故事集》，刘薰宇的《马先生谈算学》和《数学的园地》，王峻岑的《数学列车》。这些书不仅读起来有趣，读后还能够带来悠长的回味和反复的思索。还有法布尔的《蜘蛛的故事》和《化学奇谈》，很有思想，有启发，本来看上去很普通的事情，竟有那么多意想不到的奥妙在里面。看了这些书，就促使自己去学习更多的科学知识，也激发了创作的欲望。那时我就想，如果有人给我出版，我也要写这样好看的书。

法布尔写的书，以十大卷的《昆虫记》为代表，不但是科普书，也可以看成是科学专著。这样的书，小朋友看起来趣味盎然，专家看了也收获颇丰。他的科学研究和科普创作是融为一体的，令人佩服。

写数学科普，想学法布尔太难了。也许根本不可能做到像《昆虫记》那样将科研和科普融为一体。但在写的过程中，总还是禁不住想把自己想出来的东西放到书里，把科研和科普结合起来。

从一开始，写《数学传奇》时，我就努力尝试让读者分享自己体验过的思考的乐趣。书里提到的“五猴分桃”问题，在世界上流传已久。20 世纪 80 年代，诺贝尔奖获得者李政道访问中国科学技术大学，和少年班的学生们座谈时提到这个问题，少年大学生们一时都没有做出来。李政道介绍了著名数学家怀德海的一个巧妙解答，用到了高阶差分方程特解的概念。基于函数相似变换的思想，我设计了“先借后还”的情景，给出一个小学生能够懂的简单解法。这个小小的成功给了我很大的启发：写科普不仅仅是搬运和解读知识，也要深深地思考。

在《数学家的眼光》书中，提到了祖冲之的密率 $355/113$ 有什么好处的问題。数学大师华罗庚在《数论导引》书中用丢番图理论证明了，所有分母不超过 366 的分数中， $355/113$ 最接近圆周率 π 。另一位数学家夏道行，在他的《 e 和 π 》书中用连分数理论推出，分母不超过 8000 的分数中， $355/113$ 最接近圆周率

π 。在学习了这些方法的基础上我做了进一步探索，只用初中数学中的不等式知识，不多几行的推导就能证明，分母不超过 16586 的分数中， $355/113$ 是最接近 π 的冠军。而 $52163/16604$ 比 $355/113$ 在小数后第七位上略精确一点，但分母却大了上百倍！

我的北京大学老师程庆民教授在一篇书评中，特别称赞了五猴分桃的新解法。著名数学家王元院士，则在书评中对我在密率问题的处理表示欣赏。学术前辈的鼓励，是对自己的鞭策，也是自己能够长期坚持科普创作的动力之一。

在科普创作时做过的数学题中，我认为最有趣的是生锈圆规作图问题。这个问题是美国著名几何学家佩多教授在国外刊物上提出来的，我们给圆满地解决了。先在国内作为科普文章发表，后来写成英文刊登在国外的学术期刊《几何学报》上。这是数学科普与科研相融合的不多的例子之一。佩多教授就此事发表过一篇短文，盛赞中国几何学者的工作，说这是他最愉快的数学经验之一。

1974 年我在新疆当过中学数学教师。一些教学心得成为后来科普写作的素材。文集中多处涉及面积方法解题，如《从数学教育到教育数学》《新概念几何》《几何的新方法和新体系》等，系源于教学经验的启发。面积方法古今中外早已有了。我所做的，主要是提出两个基本工具（共边定理和共角定理），并发现了面积方法是具有普遍意义的几何解题方法。1992 年应周咸青邀请访美合作时，从共边定理的一则应用中提炼出消点算法，发展出几何定理机器证明的新思路。接着和周咸青、高小山合作，系统地建立了几何定理可读证明自动生成的理论和算法。杨路进一步把这个方法推广到非欧几何，并发现了一批非欧几何新定理。国际著名计算机科学家保伊尔（Robert S. Boyer）将此誉为计算机处理几何问题发展道路上的里程碑。这一工作获 1995 年中国科学院自然科学一等奖和 1997 年国家自然科学二等奖。从教学到科普又到科学研究，20 年的发展变化实在出乎自己的意料！

在《数学家的眼光》中，用一个例子说明，用有误差的计算可能获得准确的结果。基于这一想法，最近几年开辟了“零误差计算”的新的研究方向，初步有

了不错的结果。例如，用这个思想建立的因式分解新算法，对于两个变元的情形，比现有方法效率有上千倍的提高。这个方向的研究还在发展之中。

1979—1985年，我在中国科学技术大学先后为少年班和数学系讲微积分。在教学中对极限概念和实数理论做了较深入的思考，提出了一种比较容易理解的极限定义方法——“非 ϵ 语言极限定义”，还发现了类似于数学归纳法的“连续归纳法”。这些想法，连同面积方法的部分例子，构成了1989年出版的《从数学教育到教育数学》的主要内容。这本书是在四川教育出版社余秉本女士督促下写出来的。书中第一次提出了“教育数学”的概念，认为教育数学的任务是“为了数学教育的需要，对数学的成果进行再创造。”这一理念渐渐被更多的学者和老师们认同，导致2004年教育数学学会（全名是“中国高等教育学会教育数学专业委员会”）的诞生。此后每年举行一次教育数学会年，交流切磋为教育而改进数学的心得。这本书先后由三家出版社发行，从此面积方法在国内被编入多种奥数培训读物。师范院校的教材《初等几何研究》（左铨如、季素月编著，上海科技教育出版社1991年出版）中详细介绍了系统面积方法的基本原理。已故的著名数学家和数学教育家，西南师大陈重穆教授在主持编写的《高效初中数学实验教材》中，把面积方法的两个基本工具“共边定理”和“共角定理”作为重要定理，教学实验效果很好。1993年，四川都江堰教育学院刘宗贵老师根据此书中的想法编写的教材《非 ϵ 语言一元微积分学》在贵州教育出版社出版。在教学实践中效果明显，后来还发表了论文。此后，重庆师范学院陈文立先生和广州师范学院萧治经先生所编写的微积分教材，也都采用了此书中提出的“非 ϵ 语言极限定义”。

10多年之后，受林群先生研究工作的启发带动，我重启了关于微积分教学改革思考。文集中有关不用极限的微积分的内容，是2005年以来的心得。这方面的见解，得到著名数学教育家张奠宙先生的首肯，使我坚定了投入教学实践的信心。我曾经在高中尝试过用5个课时讲不用极限的微积分初步。又在南方科技大学试讲，用16个课时不用极限讲一元微积分，严谨论证了所有的基本定理。

初步实验的，效果尚可，系统的教学实践尚待开展。

也是在 2005 年后，自己对教育数学的具体努力方向有了新的认识。长期以来，几何教学是国际上数学教育关注的焦点之一，我也因此致力于研究更为简便有力的几何解题方法。后来看到大家都在删减传统的初等几何内容，促使我作战略调整的思考，把关注的重点从几何转向三角。2006 年发表了有关重建三角的两篇文章，得到张奠宙先生热情的鼓励支持。这方面的想法，就是《一线串通的初等数学》一书的主要内容。书里面提出，初中一年级就可以学习正弦，然后以三角带动几何，串联代数，用知识的纵横联系驱动学生的思考，促进其学习兴趣与数学素质的提高。初一学三角的方案可行吗？宁波教育学院崔雪芳教授先吃螃蟹，做了一节课的反复试验。她得出的结论是可行！但是，学习内容和国家教材不一致，统考能过关吗？做这样的教学实验有一定风险，需要极大的勇气，也要有行政方面的保护支持。2012 年，在广州市科协开展的“千师万苗工程”支持下，经广州海珠区教育局立项，海珠实验中学组织了两个班的初中全程的实验。两个实验班有 105 名学生，入学分班平均成绩为 62 分和 64 分，测试中有三分之二的学生不会作三角形的钝角边上的高，可见数学基础属于一般水平。实验班由一位青年教师张东方负责备课讲课。她把《一线串通的初等数学》的内容分成 5 章 92 课时，整合到人教版初中数学教材之中。整合的结果节省了 60 个课时，5 个学期内不仅讲完了按课程标准 6 个学期应学的内容，还用书中的新方法从一年级下学期讲正弦和正弦定理，以后陆续讲了正弦和角公式，余弦定理这些按常规属于高中课程的内容。教师教得顺利轻松，学生学得积极愉快。其间经历了区里的 3 次期末统考，张东方老师汇报的情况如下：

从成绩看效果

期间经过三次全区期末统考。实验班学生做题如果用了教材以外的知识，必须对所用的公式给出推导过程。在全区 80 个班级中，实验班的成绩突出，比区平均分高很多。满分为 150 分，实验一班有 4 位同获满分，其中最差的个人成绩 120 多分。

	实验 1 班平均分	实验 2 班平均分	区平均分	全区所有班级排名
七年级下期末	140	138	91	第一名和第八名
八年级上期末	136	133	87.76	第一名和第五名
八年级下期末	145	141	96.83	第一名和第三名

这样的实验效果是出乎我意料的。目前，广州市教育研究院正在总结研究经验，并组织更多的学校准备进行更大规模的教学实验。

科普作品，以“普”为贵。科普作品中的内容若能进入基础教育阶段的教材，被社会认可为青少年普遍要学的知识，就普得不能再普了。当然，一旦成为教材，科普书也就失去了自己作为科普的意义，只是作为历史记录而存在。这是作者的希望，也是多年努力的目标。

文集编辑工作即将完成之际，湖北科学技术出版社刘虹老师建议我写个总序。我从记忆中检索出一些与文集中某些内容有关的往事杂感，勉强塞责。书中不当之处，欢迎读者指正。

湖北科学技术出版社何龙社长热心鼓励我出版文集；还有华中师范大学国家数字化学习工程中心彭翥成老师（《绕来绕去的向量法》作者之一，该书中绝大多数例题和题解由他提供）为文集的出版付出了辛勤劳动，在此谨表示衷心的感谢。



2014 年 10 月 14 日

软件安装	1
第一部分 漫游数学百花园	4
01 跟你的眼睛开个小玩笑	4
02 从小河上漂浮的树叶谈平移	10
03 打台球照镜子与轴对称	22
04 从小鸡吃米、风车与钟表说旋转	33
05 自行车中的数学	0
06 铺地板的学问	3
07 漫话相似	78
08 两个点如何相加	102
09 从面积到正弦	121
10 从正方体谈起	145
第二部分 电脑解题空间	164
11 电脑帮你解题——三角形	164

12 电脑帮你解题——四边形	190
13 电脑帮你解题——一次函数	215
14 电脑帮你解题——二次函数	233
附录 1	270
附录 2	272

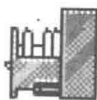
软件安装

【操作说明 0—1】 安装启动《超级画板》和打开课件.

进入思米教育网(www.thinkme.cn)或中少在线网(WWW.ccppg.com.cn), 在主页上可看到图标“少年数学实验”, 点击进入可以下载“少年数学实验配套资源”压缩文档, 把它解压后, 里面有动态数学软件《超级画板》和《立体几何》的免费版本以及“少年数学实验课件和方便面”三个文件夹. 先启动超级画板, 用超级画板可以打开“少年数学实验课件和方便面”里面与本书各节对应的课件, 课件编号和名称与书的小节目录一致, 每一个课件有若干页面, 用超级画板的翻页图标或计算机的上下翻页键可以自由选看.

这份超级画板软件不用安装, 把它复制到你的硬盘上即可运行. 打开软件的文件夹, 就能看到有一个文件 MathZjz.exe 的图标(图 0—1).

用鼠标左键双击它, 就可以启动超级画板. 为了以后的使用方便, 你可以按下右键把这个图标拖到桌面上, 创建一个快捷方式图标, 以后只要双击这个快捷方式图标, 就可以启动超级画板了. 启动后屏幕画面上部如图 0—2.



MathZjz

图 0-1 超级画板图标

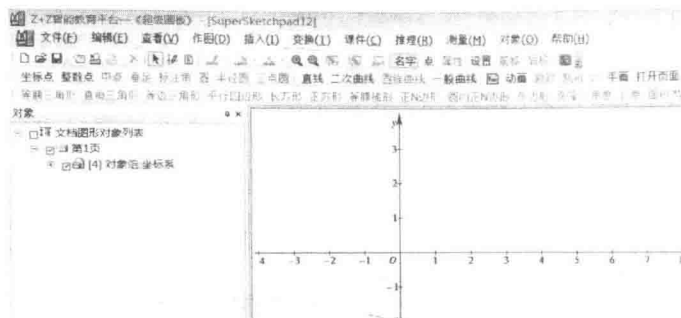


图 0-2 超级画板界面

画有一个坐标系的大窗口是展示课件或我们写字画图的地方,简称“作图区”。作图区左方有一个较小的窗口,窗口左上角有“对象”两字,这个窗口叫做“图形对象工作区”。

图形对象工作区里已经有几行字了,其中有一行是这样的:



图 0-3 图形对象工作区里的一行

单击带钩的小方框,钩不见了,作图区里的坐标系也消失了,再单击这个小方框,钩又有了,坐标系又出现了。

再单击带十号的小方框,十号立刻变成了一号,同时,这一行变成了下面的 5 行:

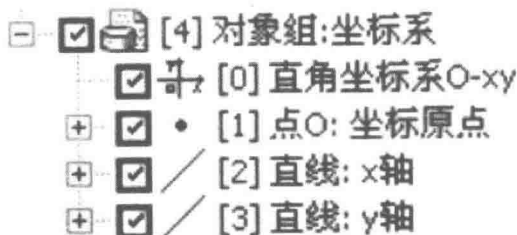


图 0-4 一行变成了 5 行

每行前面都有带钩的小方框.单击第一行的带钩的小方框,5个钩就都消失了.当然,如我们所料,作图区的坐标系也隐藏了.再单击它,隐藏的东西又显示出来.分别单击下面的几个钩,就知道它们都有什么作用了.

注意到这几行前面有数字[0][1][2][3],就明白了数字[4]的来历.原来,坐标系是一个对象组,它由0号对象、1号对象、2号对象和3号对象组成.顺序排下来,它就是4号对象了.这样把对象编号编组,为今后的操作带来不少方便.

单击“对象组”所在一行前面的一号,它变回十号,5行又变成一行,在作图区画图写字时,超级画板会自动地把你创造的新对象进行编号,记录到对象工作区.

执行菜单命令“文件|打开”或直接单击上方自左向右的第2个图标按钮,即“打开文件”的按钮,打开“少年数学实验课件和方便面”文件夹,即可选择打开所要用的文件.

01 跟你的眼睛开个小玩笑

世界是客观存在的, 公园里的小桥流水, 亭台水榭, 花草树木, 这一切都是客观存在的. 小桥亭台的形状大小不会因为是你看还是我看而有所变化, 但花园的美景却只能经过我们的感知而被欣赏. 我们通过感官才能得到外部世界的信息, 而视觉是人们认识外部世界最重要的途径.

现在的问题是, 我们的眼睛总可靠吗? 它提供的外部世界的视觉信息总准确吗? 让我们先进行一个小测试.

【实验 1-1】 下面这张图(图 1-1)中 AB 和 BC 哪条线段长?

1-1 AB 长还是 BC 长?

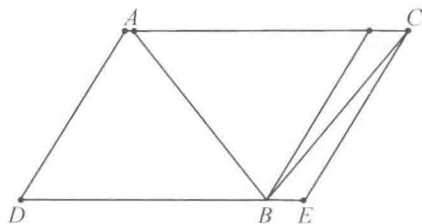


图 1-1 哪条线段长

你的第一反应可能和我一样,感到 AB 比 BC 长.

如何检验自己的感觉是否正确呢? 你会想到各种方法, 例如用刻度尺度量一下, 结果你可能发现 AB 比 BC 还短一点! 因为两条线段相差无几, 也许是测量得不够精确? 有没有其他更可靠的检验方法呢? 除了刻度尺, 文具盒里还有圆规. 以 B 为圆心过 A 作个圆看看, 结果如下图(图 1-2), C 在圆外, 看来确实 AB 比 BC 还短. 这个测试跟我们的眼睛开了个小玩笑!

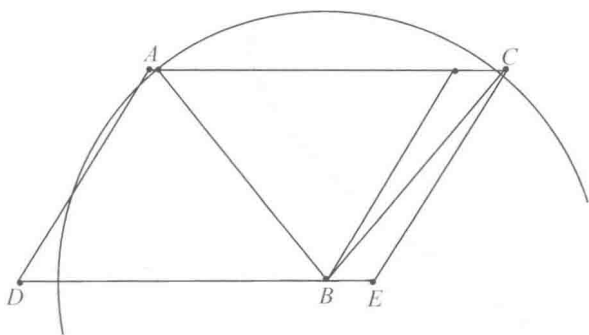


图 1-2 结果 C 在圆外

英国著名的生物学家、进化论的奠基人达尔文有一句幽默的名言:“大自然是一有机会就要说谎的。”所以我们要正确地认识世界, 不能只凭直观的感觉, 有时还需要设计实验. 用尺测量线段的长就是在进行实验, 以 B 为圆心过 A 作个圆也是实验, 用实验可以纠正直观可能产生的错觉.

你可能感到纳闷, 怎么上面的图一眼看去会觉得 AB 比 BC 长呢? 其实这里是“障眼”法, 是图中那个平行四边形干扰了我们对两条线段的观察. 把它隐藏掉就能看出庐山真面目了.

打开课件“01 跟你的眼睛开个小玩笑”, 看第 1 页“1-1 AB 长还是 BC 长?”. 用鼠标单击上面的按钮“1”, 平行四边形消失了, 就能看出 AB 比 BC 短(图 1-3). 再单击同一个按钮, 平行四边形出现了, 就觉得 AB 比 BC 长! 两次观察都是自己的眼睛看出来的, 凭什么说平行四边形消失了看到的是真相? 用鼠标单击按钮“2”, 圆出现了(图 1-2), 这说明确实是 AB 比 BC 短.

1-1 AB 长还是 BC 长?

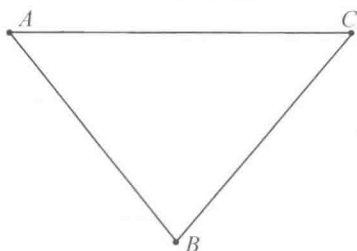


图 1-3 这样看出 AB 比 BC 短

用这个题目,你可以设计小魔术,考考你的同伴了.

更有意义的是,我们可以进一步探索,做点科学研究.

在图 1-1 中,实际上 AB 比 BC 短,但感觉 AB 比 BC 长,这叫错觉.但我们的眼睛毕竟是有用的,设计实验来纠正错觉还是靠眼睛来看,错觉也是有限度的,如果 AB 比 BC 短得多,你可能就不会感觉 AB 比 BC 长.

我们可以在课件上做更多的操作.

【操作说明 1-1】 如何“选择”对象以及为何选择对象.作图区上方画有箭头的图标按钮叫做“选择”按钮,如果按钮上出现了一个外框,表明选择功能已被激活.若没有激活,单击“选择”按钮即可激活它,超级画板就进入“选择”状态.在选择状态,鼠标光标是一个箭头.

这时把光标指向线段、点或作图区的其他对象,它们都会变色.光标离开它,它的颜色又会复原.

光标指向点或线段单击,这个对象就被选择了.被选择的对象的编号(就是它在左边对象区列表中的编号)会出现在作图区的下方.这时把鼠标的光标移开被选择的对象,其颜色不会恢复.

选择了它,就可以对它进行种种操作.例如:

1. 删除它:按一下 Delete 键,或单击“删除”按钮(叉子图案)它就不见了;

2. 改变线的粗细或点的大小:单击按钮变粗,变细;如果选择的对象是点,则单击按钮点变大,变小;