熊　建◎著

带多形状参数的样条曲线曲面及其应用研究

DAIDUOXINGZHUANG CANSHU DE YANGTIAO QUXIAN QUMIAN JIQI YINGYONG YANJIU

合肥工業大學出版社
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

带多形状参数的样条曲线曲面及其应用研究

熊 建 著

合肥工業大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

带多形状参数的样条曲线曲面及其应用研究/熊建著．—合肥：合肥工业大学出版社，2017.10

ISBN 978-7-5650-3680-4

Ⅰ.①带… Ⅱ.①熊… Ⅲ.①计算机辅助设计—几何—造型—研究 Ⅳ.①TP391.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 280134 号

带多形状参数的样条曲线曲面及其应用研究

熊 建 著　　　　责任编辑 王钱超

出 版	合肥工业大学出版社	版 次	2017 年 10 月第 1 版
地 址	合肥市屯溪路 193 号	印 次	2018 年 5 月第 1 次印刷
邮 编	230009	开 本	710 毫米×1010 毫米 1/16
电 话	人文编辑部：0551-62903205	印 张	8.5
	市场营销部：0551-62903198	字 数	128 千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	印 刷	安徽昶颉包装印务有限责任公司
E-mail	hfutpress@163.com	发 行	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-3680-4　　　　定价：30.00 元

如果有影响阅读的印装质量问题，请与出版社市场营销部联系调换。

前　言

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design,简写为CAGD)主要研究曲面造型的数学基础理论与方法。1974年在美国犹他(Utah)大学举行了名为CAGD的学术会议,这次会议标志着CAGD开始以一门独立学科的形式出现。CAGD主要研究自由曲线曲面造型技术,主要有Bézier、B样条、NURBS等曲线曲面造型方法。其中NURBS方法因其丰富与强大的统一表达形状的能力,极大地满足了工业界对产品形状数学描述的要求,被STEP国际标准确定为工业产品几何定义的唯一数学方法。

在曲线曲面造型中,曲线曲面的形状调整是一个重要的研究方向。NURBS曲线曲面可以通过修改权因子调整曲线曲面形状,其他曲线曲面形状调整都需要通过改变控制顶点来实现,调控实现非常困难。为此,学者们提出了带形状参数的曲线曲面,只需改变形状参数的取值就可实现改变曲线曲面形状的目的。

由于带形状参数的曲线曲面造型方法在曲线曲面形状调整中有明显优势,2005—2008年,作者在跟随合肥工业大学朱功勤教授和郭清伟副教授攻读硕士学位期间,对带形状参数的曲线曲面造型方法进行了一系列研究工作。毕业后,作者一直从事此方面的研究工作。为了让更多的人了解带形状参数的曲线曲面造型方法,作者在硕士论文基础上完成此书。

作者在攻读硕士学位及从事课题研究期间,得到了导师朱功勤教授和郭清伟副教授的亲切指导和激励。在此,我向他们表示衷心感谢,并致以崇高敬意!多年来,在学习和研究工作中,太多的人给予了我热诚的帮助和鼓

励，在此也对他们表示衷心的感谢！

本研究得到安徽省优秀青年人才基金(2013SQRL113ZD)的大力支持。

由于作者水平有限，书中错误及不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正。

作　者

2017年9月

目　录

第一章 绪 论

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design，简称CAGD)是随着航空、汽车等现代工业的发展与计算机的出现而产生并发展起来的一门新兴学科。它研究的核心内容是:对几何外形信息(点、线、面和体)的计算机表示、设计、绘制、显示、分析和处理。因此,自由曲线曲面的研究成为 CAGD 的基础内容[1]。

1.1 CAGD 中参数样条曲线曲面的发展历史

长期以来,自由曲线曲面是 CAGD 中描述形状信息的主要工具,20 世纪 60 年代由 Coons、Bézier 等大师奠定了其理论基础。

样条函数最早是由美国学者 I. J. Schoenberg 于 1946 年提出的[2]。如果直接用样条函数来表达几何图形,由于缺乏几何不变性,给我们的研究带来了诸多不便。为此,人们将样条函数“几何化”得到参数样条曲线曲面。

1963 年,美国波音飞机公司的 Ferguson 首先提出将曲线曲面表示为参数的矢函数方法,并引入参数三次曲线,构造了组合曲线和由四角点的位置矢量及两个方向的切矢定义的 Ferguson 双三次曲面片[3-4]。从此,Ferguson 所采用的曲线曲面的参数形式成为形状数学描述的标准形式。

1964 年,美国麻省理工学院的 Coons 发表了一个具有一般性的曲面描述方法,给定围成封闭曲线的四条边界就可定义一块曲面片[5]。1967 年,他进一步推广其思想[6]。在 CAGD 实践中应用广泛的只是它的特殊形式——Coons 双三次曲面片。

1971 年,法国雷诺汽车公司的 Bézier 发现了一种由控制多边形定义曲

线的方法。后来,英国的 Forrest 发现处理作为贝齐尔多边形的相对矢量不如处理作为顶点的绝对矢量方便,并发现上述 Bézier 基表示形式能被改写成现代广泛使用的用控制顶点 P_i 定义的 Bernstein 基表示式[7]。20 世纪 70 年代中期开始,国内对 Bézier 方法做了大量研究工作[8-18],在 CAGD 中占有重要地位。

1972 年,de Boor 给出了关于 B 样条的一套标准算法[19]。美国通用汽车公司的 Gordon 和 Riesenfeld 于 1974 年将 B 样条理论应用于形状描述,提出了 B 样条曲线曲面[20]。

1975 年,美国 Syracuse 大学的 Versprille 在他的博士论文中首次提出有理 B 样条方法[21]。后来,Piegl 和 Tiller 等人对 NURBS 方法进行了深入研究[22-28],终于使非均匀有理 B 样条(NURBS) 方法成为现代曲线曲面造型中最为广泛流行的技术。

1.2 CAGD 中带形状参数的样条曲线曲面

综观样条曲线曲面的发展史,曲线曲面的形状调整一直是重要的研究方向之一。前面提到的样条曲线,只有有理 B 样条可以通过修改权因子调整曲线形状[29]。其他曲线曲面形状调整都需通过改变控制顶点来实现,这为我们的应用带来了不便。为此,人们提出了带形状参数的样条曲线,只要改变形状参数的取值就可达到改变曲线形状的目的。这方面的成果主要有:Beta 样条曲线[30]、NURBS 方法、C 曲线[31-32]、CB 样条曲线[33-35],另外还有韩旭里、汪国昭、邬弘毅等一批学者构造的各种带形状参数的样条曲线等[36-50]。

以下着重介绍几种带形状参数的样条曲线曲面。

1.2.1 C - Bézier 曲线与 CB 样条曲线[31-35]

1) C - Bézier 样条

定义:称 $r(t)=\sum_{i=0}^{n}U_{i,n}(t)\cdot P_i$ 为由控制顶点 $\{P_i \mid P_i \in \mathbf{R}^2 \text{ 或 } \mathbf{R}^3\}(i=0,$

$1,\cdots,n)$ 生成的 C - Bézier 曲线，其中 $U_{i,n}(t)$ 是 C - Bézier 基。

利用张量积可以定义一张 C - Bézier 曲面，方程如下：

$$r(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}U_{i,m}(u)U_{j,n}(v),0\leqslant u,v\leqslant 1.$$

其中 $U_{i,m}(u),U_{j,n}(v)$ 是 C - Bézier 基，定义如下：

初始函数：$U_{0,1}(t)=\sin(\alpha-t)/\sin t,U_{1,1}(t)=\sin t/\sin\alpha,t\in[0,\alpha],\alpha\in[0,\pi]$.

递归定义各阶 C - Bézier 基函数如下：

$$U_{0,n}(t)=1-\int_{0}^{t}\delta_{0,n-1}U_{0,n-1}(x)\mathrm{d}x,$$

$$U_{i,n}(t)=\int_{0}^{t}[\delta_{i-1,n-1}U_{i-1,n-1}(x)-\delta_{i,n-1}U_{i,n-1}(x)]\mathrm{d}x,$$

$$U_{n,n}(t)=\int_{0}^{t}\delta_{n-1,n-1}U_{n-1,n-1}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\delta_{i,n}(t)=(\int_{0}^{\alpha}U_{i,n}(t)\mathrm{d}t)^{-1},i=0,1,\cdots,n.$$

2）均匀 CB 样条

定义：给定控制点 $\{P_i\mid P_i\in\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3\}(i=0,1,\cdots,n)$ 及形状参数 $\alpha(i=1,2,\cdots,n)$，称 $r(t)=\sum_{i=1}^{n}P_iN_{i,k}(t),(0\leqslant t\leqslant n+1-k)$ 为由控制顶点 $\{P_i\mid P_i\in\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3\}(i=0,1,\cdots,n)$ 生成的均匀 C - B 样条曲线，其中 $N_{i,k}(t)$ 是均匀 CB 样条基函数。

利用张量积可以定义一张参数曲面，方程如下：

$$r(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}N_{i,k}(u)N_{j,h}(v)P_{i,j},$$
$$k-1\leqslant u\leqslant m+1,h-1\leqslant v\leqslant n+1\cdots.$$

其中 $N_{i,k}(u),N_{j,h}(v)$ 分别是均匀 CB 样条基函数，定义如下：

初始函数：

$$N_{i,2}(t)=\begin{cases}\alpha\sin(t-t_i)/(2-2\cos\alpha),t\in(t_i,t_{i+1}];\\ \alpha\sin(t_{i+2}-t)/(2-2\cos\alpha),t\in(t_{i+1},t_{i+2}];\\ 0,\text{others}.\end{cases}$$

其中$\{t_i\}$为节点向量，$t_i=i\alpha,\alpha\in[0,\pi],i=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

递归定义各阶 CB 样条如下：

$$N_{i,n}(t)=\frac{1}{\alpha}\int_{t-\alpha}^{t}N_{i,n-1}(x)\mathrm{d}x,n\geqslant3,i=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

1.2.2 王文涛、汪国昭构造的带形状参数的样条曲线[38-40]

定义：给定控制点$\{P_i\mid P_i\in\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3\}(i=0,1,\cdots,n)(n\geqslant k)$及形状参数$\lambda(i=1,2,\cdots,n)$，称$r(t)=\sum_{i=1}^{n}P_iS_{i,k}(t),(0\leqslant t\leqslant n+1-k)$为由控制顶点$\{P_i\}(i=0,1,\cdots,n)$生成的带形状参数的均匀 B 样条曲线，其中$S_{i,k}(t)$是带形状参数的均匀 B 样条基函数。

利用张量积可以定义一张参数曲面，方程如下：

$$r(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}S_{i,k}(u)S_{j,h}(v)P_{i,j},$$
$$k-1\leqslant u\leqslant m+1,h-1\leqslant v\leqslant n+1\cdots.$$

其中$S_{i,k}(u),S_{j,h}(v)$分别是带形状参数的均匀 B 样条基函数，定义如下：

设$S_{0,2}(t)$为初始基函数，当$k\geqslant3$时，定义基函数如下：

$$S_{0,k}(t)=\int_{t-1}^{t}S_{0,k-1}(x)\mathrm{d}x,S_{i,k}(t)=S_{0,k}(t-i),(i=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(1) 若令$S_{0,2}(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\lambda t^2+(1-\lambda)t,(0\leqslant t<1);\\ \dfrac{3}{2}\lambda(^2-t)2+(1-\lambda)(2-t),(1\leqslant t<2);\\ 0,\text{others}.\end{cases}$

其中形状参数$-2\leqslant\lambda<1$，可以得到带形状参数的各阶均匀 B 样条。当$\lambda=0$时，即为经典的均匀 B 样条。当$k=4$时，即为韩旭里文献中的基函数[37]。

(2) 若令$S_{0,2}(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}[(1+\lambda)\sin\dfrac{\pi}{2}t-\lambda\sin\pi t],(0\leqslant t<1);\\ \dfrac{\pi}{4}[(1+\lambda)\sin\dfrac{\pi}{2}t+\lambda\sin\pi t],(1\leqslant t<2);\\ 0,\text{others}.\end{cases}$

其中形状参数 $-1\leqslant\lambda\leqslant 1$,可以得到带形状参数的各阶均匀三角多项式样条。

(3) 若令

$$S_{0,2}(t)=\begin{cases}\dfrac{e}{(e-1)^2}\left[(1+\lambda)\operatorname{sh}t-\dfrac{2e}{(e+1)^2}\lambda\operatorname{sh}2t\right],(0\leqslant t<1);\\ \dfrac{e}{(e-1)^2}\left[(1+\lambda)\operatorname{sh}(2-t)-\dfrac{2e}{(e+1)^2}\lambda\operatorname{sh}2(2-t)\right],(1\leqslant t<2);\\ 0,\text{others}.\end{cases}$$

其中形状参数 $-\operatorname{cth}^2\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant\operatorname{cth}^2\dfrac{1}{2}$,可以得到带形状参数的各阶均匀双曲多项式样条。

1.2.3 邬弘毅等构造的多形状参数的均匀 B 样条[49]

定义:给定控制点 $\{P_i\mid P_i\in\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3\}(i=0,1,\cdots,n)(n\geqslant k)$ 及形状参数 $\lambda_{i+1}(i=0,1,\cdots,n)(n\geqslant k)$,构造曲线段:

$$r_i(t;\lambda_{i+1},\lambda_{i+2},\cdots,\lambda_{i+k})=P_ib_{0,k}(t;\lambda_{i+1})+\sum_{j=1}^{k-1}P_{i+j}b_{j,k}(t;\lambda_{i+j},\lambda_{i+j+1})+$$
$$P_{i+k}b_{k,k}(t;\lambda_{i+k})(t\in[0,1],i=0,1,\cdots,n-k).$$

称其为由控制点 $P_i,P_{i+1},\cdots,P_{i+k}$ 及形状参数 $\{\lambda_{i+1},\lambda_{i+2},\cdots,\lambda_{i+k}\}$ 构成的多形状参数 k 次均匀 B 样条曲线段,其中调配函数 $\{b_{j,k}(t;\lambda_{i+j},\lambda_{i+j+1})\}(j=0,1,\cdots,k)$ 由下面定义,称它们平移后复合所得曲线 $r(t)=\bigcup\limits_{i=0}^{n-k}r_i(t-i;\lambda_{i+1},\lambda_{i+2},\cdots,\lambda_{i+k})(0\leqslant t\leqslant n+1-k)$ 为由控制点 $P_i(i=0,1,\cdots,n)$ 及形状参数 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 构成的多形状参数 k 次均匀 B 样条曲线。

利用张量积可以定义一张多形状参数曲面,方程如下:

$$r(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}b_{i,k}(u)b_{j,h}(v)P_{i,j},0\leqslant u,v\leqslant 1.$$

其中 $b_{i,k}(u),b_{j,h}(v)$ 分别是带多形状参数的均匀 B 样条基函数,定义如下:

初始调配函数:

$$b_{0,1}(x;\lambda)=\frac{3}{2}\lambda(1-x)^2+(1-\lambda)(1-x),$$

$$b_{1,1}(x;\lambda)=\frac{3}{2}\lambda x^2+(1-\lambda)x,$$

其中形状参数 $-2\leqslant\lambda<1, x\in[0,1]$,

称

$$b_{0,2}(x;\lambda_1)=\int_x^1 b_{0,1}(t;\lambda_1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1-\lambda_1 x)(1-x)^2,$$

$$b_{1,2}(x;\lambda_1)=\int_0^x b_{0,1}(t;\lambda_1)\mathrm{d}t+\int_x^1 b_{1,1}(t;\lambda_2)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2}[(1+2x-2x^2)+\lambda_1 x(1-x)^2+\lambda_2 x^2(1-x)],$$

$$b_{2,2}(x;\lambda_2)=\int_0^x b_{1,1}(t;\lambda_2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2[1-\lambda_2(1-x)].$$

为带 2 个形状参数的三次均匀 B 样条。递归定义带 k 个形状参数的 $k+1$ 次均匀 B 样条如下:

$$\begin{cases}
b_{0,k}(x;\lambda_1)=\int_x^1 b_{0,k-1}(t;\lambda_1)\mathrm{d}t,\\
b_{1,k}(x;\lambda_1,\lambda_2)=\int_0^x b_{0,k-1}(t;\lambda_2)\mathrm{d}t+\int_x^1 b_{1,k-1}(t;\lambda_1,\lambda_2)\mathrm{d}t,\\
\vdots\\
b_{j,k}(x;\lambda_j,\lambda_{j+1})=\int_0^x b_{j-1,k-1}(t;\lambda_j,\lambda_{j+1})\mathrm{d}t+\int_x^1 b_{j,k-1}(t;\lambda_j,\lambda_{j+1})\mathrm{d}t,(x\in[0,1]),\\
\vdots\\
b_{k-1,k}(x;\lambda_{k-1},\lambda_k)=\int_0^x b_{k-2,k-1}(t;\lambda_{k-1},\lambda_k)\mathrm{d}t+\int_x^1 b_{k-1,k-1}(t;\lambda_{k-1})\mathrm{d}t,\\
b_{k,k}(x;\lambda_k)=\int_0^x b_{k-1,k-1}(t;\lambda_k)\mathrm{d}t.
\end{cases}$$

1.2.4 带形状参数的二次、三次均匀三角多项式样条[44-45]

带形状参数的二次、三次均匀三角多项式样条曲线曲面定义与前面相同,其中基函数定义如下:

1）带形状参数的二次均匀三角多项式样条基函数

$$N_0(\lambda;t)=\frac{1}{4+2\lambda}(1-\lambda\sin t)(1-\sin t),$$

$$N_1(\lambda;t)=\frac{1}{4+2\lambda}(1+\lambda\cos t)(1+\cos t),$$

$$N_2(\lambda;t)=\frac{1}{4+2\lambda}(1+\lambda\sin t)(1+\sin t),$$

$$N_3(\lambda;t)=\frac{1}{4+2\lambda}(1-\lambda\cos t)(1-\cos t),$$

其中形状参数 $-1\leqslant\lambda\leqslant 1, t\in[0,\frac{\pi}{2}]$。

2）带形状参数的三次均匀三角多项式样条基函数

$$N_0(\lambda;t)=\frac{1}{4}(1-\lambda\sin t)(2-\sin t-\sin^2 t),$$

$$N_2(\lambda;t)=\frac{1}{4}(1-\lambda\cos t)(2-\cos t-\cos^2 t),$$

$$N_1(\lambda;t)=1-N_0(\lambda;t)-N_2(\lambda;t),$$

其中形状参数 $0\leqslant\lambda\leqslant 1, t\in[0,\frac{\pi}{2}]$。

1.3　本书的工作

本书对带形状参数的均匀样条及其应用做了一些探讨，构造了几种不同的带形状参数的均匀样条，主要工作如下：

（1）构造了带多形状参数的均匀 B 样条。邬弘毅构造的带多形状参数的均匀 B 样条，升高了均匀 B 样条的次数。由 $k+1$ 个控制点生成的一段曲线为 $k+1$ 次的，而本文构造的带多形状参数的均匀B样条，由 $k+1$ 个控制点生成的一段曲线为 k 次的，与均匀 B 样条完全一致，而且均匀 B 样条是其特例，故我们称之为均匀 B 样条的扩展。

（2）分别对 C-Bézier 与 CB 样条曲线曲面进行扩展。C-Bézier 与 CB 样