



普通高等教育“十三五”规划教材

国家特色专业建设点建设项目

数学分析立体化教材 / 刘名生 冯伟贞 主编

数学分析 (一)

(第二版)



刘名生 冯伟贞 韩彦昌 编



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
国家特色专业建设点建设项目
数学分析立体化教材/刘名生 冯伟贞 主编

数学分析(一)

(第二版)

刘名生 冯伟贞 韩彦昌 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了数学分析的基本概念、基本理论和方法,包括一元函数极限理论、一元函数微积分学、级数理论和多元函数微积分学等。全书共分三册。本册内容包括实数与数列极限、函数与函数极限、函数的连续性、微分与导数、导数的应用、实数集的稠密性与完备性。书中列举了大量例题来说明相关定义、定理及方法,并提供了丰富的思考题和习题,便于教师教学与学生自学。每章末都有小结,并配有复习题,对该章的主要内容进行归纳和总结,方便学生系统复习。通过二维码技术书中配有一些概念定理和方法的视频讲解,内容呈现方式更加生动直观。

本书可作为高等师范院校数学各专业学生的教学用书,也可供相关专业的教师和科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(一)/刘名生,冯伟贞,韩彦昌编。—2版。—北京:科学出版社,2018.6

普通高等教育“十三五”规划教材·数学分析立体化教材/刘名生,冯伟贞主编

ISBN 978-7-03-057796-2

I. 数… II. ①刘… ②冯… ③韩… III. 数学分析-高等学校-教材
IV. O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第124275号

责任编辑:王胡权/责任校对:张凤琴

责任印制:师艳茹/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

石家庄继文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年6月第一版 开本:720×1000 1/16

2018年6月第二版 印张:15

2018年6月第九次印刷 字数:302 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《数学分析立体化教材》序言

《数学分析立体化教材》通过提供多种教学资源给出数学分析课程的整体教学解决方案. 本立体化教材包括二维码新形态主教材三册:《数学分析(一)》(第二版)、《数学分析(二)》(第二版)、《数学分析(三)》(第二版), 学习辅导书三册:《数学分析学习辅导 I——收敛与发散》《数学分析学习辅导 II——微分与积分》《数学分析学习辅导 III——习题选解》; 另外, 本立体化教材还配有数学分析精品资源共享课一门.

三册主教材的编写考虑不同教学基础的学校和不同层次的学生在教学方面的不同需求, 在较充分顾及系统的完整性的基础上, 特别标记了选学内容. 教师对教材中的选学内容可以作灵活取舍, 以及适当调整相关内容的讲授或阅读次序. 我们希望这种编排能更好地帮助教师落实分类、分层教学, 同时使学生获得合理的阅读指引. 主教材的编写力求在可读性、系统性和逻辑性上能各具特色, 并将分层教学的理念贯穿全书. 主教材的建设, 在数字化资源配套方面做了一定的工作, 内容的呈现更加丰富、饱满, 呈现方式更加生动、直观. 我们对书中的许多概念、定理和方法配有小视频, 使在书中无法写出来的一些内容通过二维码提供给读者, 从而使得教材能更好地支持学生的自主学习.

在数学分析学习过程中, 学生往往因为欠缺学习自主意识或基础能力薄弱, 难以驾驭一个较大数学知识体系的学习, 造成自我知识体系零碎、割裂, 这是数学分析教学中存在的主要问题及教学难点.《数学分析学习辅导 I——收敛与发散》《数学分析学习辅导 II——微分与积分》两册辅导书的编写均立足类比, 希望教学双方在求同存异思想的指引下, 打通知识点的关联, 在反复对比中深化对基本数学思想方法的理解及强化对问题解决技巧的掌握, 从而突破教学障碍. 我们力求在可读性和系统性上能够编出特色.《数学分析学习辅导 I——收敛与发散》主要解决数学分析中的收敛与发散及相关的一些问题, 包括点列的收敛与发散、函数极限的存在性、 \mathbb{R}^n 的完备性、反常积分的收敛与发散、数项级数的收敛与发散、函数项级数的收敛与一致收敛以及函数的展开与级数的求和.《数学分析学习辅导 II——微分与积分》主要研究数学分析中的微分与积分及相关的一些问题, 包括一元函数微分学、一元函数微分法的应用、一元函数积分学、多元函数及其微分学、多元函数微

分法的应用、重积分、曲线积分和曲面积分以及各种积分之间的关系。

《数学分析学习辅导III——习题选解》对三册主教材中的大约一半的习题和复习题提供详细解答,并在书末附录中提供了2013~2017年华南师范大学的数学分析考研真题,希望对使用本教材的教师和学生有所帮助。

数学分析精品资源共享课由课程简介、课程学习、图形与课件、测试题库、方法论、拓展阅读及学习论坛和教学录像等模块构成,在课程简介中提供了数学分析课程的教学日历、教学大纲和学习方法指引等课程资料,在课程学习中提供了数学分析(一)、数学分析(二)和数学分析(三)等课程的完整课件,在测试题库中提供了华南师范大学数学科学学院2004~2014级本科生的数学分析期末考试题,在教学录像中提供了5位教师多次数学分析课的教学录像,为教学双方提供了丰富的教学资源。我们希望这门精品资源共享课能成为实施数学分析混合学习的理想平台。

本立体化教材的编写得到“数学与应用数学国家特色专业”建设项目、“数学与应用数学广东省高等学校重点专业”建设项目及“数学与应用数学国家专业综合改革建设项目”的资助,第一版在华南师范大学数学科学学院的2008~2016级及本科生综合班中使用,也被多所兄弟院校作为数学系学生的数学分析课程的教材。

借此机会衷心感谢华南师范大学数学科学学院领导和科学出版社领导对本立体化教材编写的大力支持。对编辑们付出的辛勤劳动,在此表示诚挚的谢意。希望广大读者批评指正,以使本立体化教材得到进一步完善,为数学分析课程建设和一流人才培养作出更大的贡献。

刘名生 冯伟贞

2018年1月

华南师范大学

第二版说明

承蒙兄弟院校的厚爱, 数学分析立体化教材中的《数学分析(一)》自 2009 年出版以来, 已经被全国近十所高等院校选为教材使用, 并被全国两百余所高等院校的图书馆作为教学参考资料使用, 这是对本教材的肯定, 让我们倍感鼓舞. 为了帮助教师们在教学过程中提高效率和增强大学生的学习兴趣, 根据 9 年来我们在华南师范大学的教学体会与学生反馈, 这次再版我们对本教材在信息技术与教学融合方面做了大胆的尝试, 通过二维码技术及移动互联网技术, 将纸质教材与包括重难点讲解、相关知识点讲解等数字化资源进行深度融合, 极大地丰富了教材的内容, 方便了师生们的教学. 关于具体内容, 这次再版主要作了如下修改:

1. 配置了 23 个二维码小视频, 这些小视频包含了一些书中无法写出的信息, 读者可以通过扫描教材中相应位置的二维码, 便可直接看到教材编者对书中一些主要概念和重要定理的讲解.

2. 在第 1.1 节, 将 Bernoulli 不等式修改为

(1) 一阶 Bernoulli 不等式;

(2) 二阶 Bernoulli 不等式.

这可以用数学归纳法和二项式公式给出简单证明; 而将 Bernoulli 不等式等号成立的条件放到习题中. 因为在后面论证极限式时, 主要用到二阶和高阶的 Bernoulli 不等式, 不需要用到 Bernoulli 不等式等号成立的条件.

3. 在第 2.1 节, 补充了一些反三角函数的内容; 在第 2.2 节, 给出了定义 2.2.3 的否命题; 在第 6.1 节, 补充了性质 6.1.1~6.1.3 的证明, 方便学生自习和教师教学.

4. 在第 4.2 节, 更换了求分段函数导函数的例题 14, 使函数在分段点两边的表达式不同. 这样求函数在分段点的导数时, 要用到左、右导数的定义及其与导数的关系, 使学生对分段函数的求导有更深刻的理解.

由于不同院校的教学计划课时数可能存在差异, 教师在使用本教材时, 可以根据具体情况对内容进行取舍或重组, 教学课时数可掌握在 72~90 学时范围内, 详细参见使用说明.

限于编者水平,书中不足与疏漏之处在所难免,敬请读者批评指正.

编 者

2018年1月

华南师范大学

第一版前言

数学分析是数学各专业的学科基础课,其重要性不言而喻.我们根据多年的教学经验,在吸取一些现有教材优点的基础上,编写了本教材.

现有的各种数学分析教材都有其优点和缺点.本教材力求在可读性、系统性和逻辑性上能具有特色,并将分层教学的理念贯穿全书.首先,在可读性方面,对于重要概念只给一种定义形式,其他的等价定义一般放在思考题或习题中.例如,对数列极限,本书只引入了 ε - N 定义,目的是希望学生能吃透这个概念;数列极限的另一个等价定义放在习题中,方便基础较好的学生学习.对定理的证明,尽量用朴素的方法证明.对书中的例题,表达尽量详细,让学生容易自学.对某些定理采取先用后证的方法讲述.例如,在第 7 章,先给出区间上的连续函数必定存在原函数这个结论,这样就可以介绍求不定积分的各种方法;在第 8 章,先给出闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必定在 $[a, b]$ 上可积这个结论,这样可以使定积分的计算提前,然后在第 8 章后面再证明这两个存在性定理.

其次,在系统性方面,将关系较密切的内容放在一起.例如,将发散数列和子列的概念放在同一节,将判别数列收敛的各种方法放在同一节,将定积分的应用与反常积分放在同一章,将各种情况下的 Fourier 级数和 Fourier 级数展开放在同一节,将第一型曲线积分、曲面积分和 second 型曲线积分、曲面积分放在同一章,将各种积分之间的关系放在同一章等.另外,有理函数分解为部分分式的理论,国内的数学分析教材几乎都将其证明归到高等代数课程中,而高等代数教材也不写这部分内容.为了弥补这一缺陷,在《数学分析(二)》的第 7 章中,将给出有理函数分解为部分分式理论的详细证明,方便教师教学与学生自学.

再次,在逻辑性方面,考虑到可读性的同时,尽量在给出定理的同时也完成对定理的证明.例如,将致密性定理放在第 1 章,这样数列的柯西收敛准则在第 1 章就可以证明,使得第 1 章对数列有较完整的处理;然后在第 3 章就可以完成闭区间上连续函数性质的证明;第 6 章就只需讲区间套定理、有限覆盖定理及其应用等,这样难点也分散了.在导数与微分部分,先讲微分,后讲导数,强调微分的作用,这样在后面讲定积分的微元法时,我们将给出微元法的理论依据.

考虑到不同教学基础的学校和不同层次的学生在教与学方面有不同的需求,我

们在较充分顾及系统的完整性的基础上,通过小 5 号字和“*”标记本书中的选学内容.对选学内容的处理可以很灵活,如第 1 章中致密性定理内容可以留到第 6 章处理或只作简要介绍.

本教材分三册出版.《数学分析(一)》讲述一元函数极限理论和一元函数微分学,它的内容包括:数列极限与确界原理、函数的概念及其性质、函数极限与连续性、函数的导数与微分、微分中值定理及其应用、函数的极值和凸性及作图、实数集的稠密性与完备性.《数学分析(二)》讲述一元函数积分学和级数理论,它的内容包括:不定积分和定积分、定积分的应用与反常积分、数项级数、函数项级数、幂级数和 Fourier 级数.《数学分析(三)》讲述多元函数极限论和多元函数微分学,它的内容包括:多元函数极限与连续性、多元函数微分学、隐函数理论、多元函数积分学.

《数学分析(一)》的初稿由刘名生教授、冯伟贞副教授和韩彦昌副教授编写,《数学分析(二)》的初稿由徐志庭教授、刘名生教授和冯伟贞副教授编写,《数学分析(三)》的初稿由耿堤教授、易法槐教授和丁时进教授编写.初稿完成后,编写组全体成员多次仔细讨论、评阅和修改.全书由刘名生教授和冯伟贞副教授负责编写组织工作.

林伟教授和朱玉灿教授审阅了本书并提出许多宝贵意见,陈奇斌老师绘制了本册书的所有插图,在此对他们表示衷心感谢.

本书在编写过程中得到华南师范大学数学科学学院许多同事的支持,并得到广东省名牌专业建设专项经费、国家特色专业建设点专项经费及 2008 年度华南师范大学校级教改项目的资助.我们在华南师范大学数学科学学院 08 级师范班的数学分析课程中试用了本教材,08 级师范班的学生为本书的完善提供了许多宝贵意见,在此一并致谢.

作为新教材,书中的疏漏和不足在所难免,敬请读者批评指正.

编者

2008 年 12 月

华南师范大学

使用说明

1. 本教材应用分层教学思想编写,对较难内容,使用小5号字或用“*”号标注,教师可根据不同层次的班级选讲部分小5号字或标“*”号的内容.

2. 讲授本书的建议最少教学学时是72学时;最多教学学时是90学时.具体地说,第1章:14~18学时;第2章:14~18学时;第3章:8~10学时;第4章:14~16学时;第5章:18~20学时;第6章:4~8学时.

3. 为了解决“数学分析”与“中学数学”之间的衔接问题,在部分章前编有预备知识,书后编有附录,这些内容教师可视情况讲一部分,其余供学生自己阅读.

4. 习题分三级配置:

第一级为思考题,每节都有,目的是为了让学生通过自己做思考题理解所学的概念和定理及方法;

第二级为作业题,即每节后面的习题,供老师布置作业用,要求学生全部完成;

第三级为扩展题,放在每章后面的复习题中,中间用一条横线分为两部分,横线上的题供学生复习使用,横线下的题较难,供学有余力的学生复习使用.

5. 每章末配有小结,总结该章所学的知识点、概念和方法等,方便学生复习.

配套学习辅导推荐

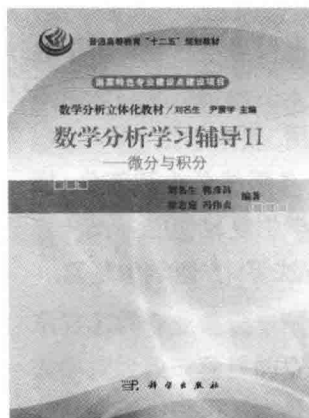


书名：数学分析学习辅导 I——收敛与发散

作者：刘名生，冯伟贞，罗世平

书号：978-7-03-036797-6

科学出版社电子商务平台购买链接：

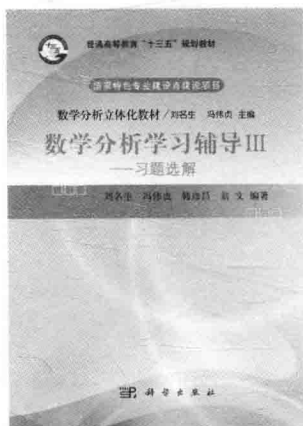


书名：数学分析学习辅导 II——微分与积分

作者：刘名生，韩彦昌，徐志庭，冯伟贞

书号：978-7-03-038230-6

科学出版社电子商务平台购买链接：



书名：数学分析学习辅导 III——习题选解

作者：刘名生，冯伟贞，韩彦昌，翁文

书号：978-7-03-057240-0

科学出版社电子商务平台购买链接：



目 录

《数学分析立体化教材》序言

第二版说明

第一版前言

使用说明

第 1 章 实数与数列极限	1
1.0 预备知识	1
1.0.1 一些常用的记号	1
1.0.2 逻辑命题的否命题	1
1.0.3 特殊的数集	2
1.1 实数的基本性质与常用不等式	3
1.1.1 实数的基本性质	3
1.1.2 一些常用的不等式	4
1.2 数列与数列极限的概念	6
1.2.1 数列的定义	6
1.2.2 数列极限的定义	7
1.3 收敛数列的性质	12
1.3.1 收敛数列的重要性质	12
1.3.2 无穷小与无穷大数列	17
1.4 发散数列与子列的概念	19
1.4.1 发散数列	19
1.4.2 数列的子列的概念	20
1.5 确界原理	22
1.5.1 有界集、上确界和下确界的概念	22
*1.5.2 确界的数列刻画	24
1.5.3 数集确界的存在性与唯一性	25
1.6 数列收敛的判别法	27
1.6.1 迫敛性定理	27

1.6.2	单调有界定理	27
1.6.3	致密性定理与 Cauchy 收敛准则	30
	小结	34
	复习题	35
第 2 章	函数与函数极限	38
2.0	预备知识	38
2.1	映射与函数的概念	39
2.1.1	映射的概念	39
2.1.2	函数的概念	39
2.1.3	函数的四种特性	41
2.1.4	函数的基本运算	43
2.1.5	反函数	44
2.1.6	初等函数	45
2.2	$x \rightarrow \infty$ 时函数极限的概念	49
2.2.1	引例	49
2.2.2	x 趋于 ∞ 时的函数极限的定义	49
2.2.3	三种函数极限的关系	51
2.2.4	典型例子	51
2.3	$x \rightarrow x_0$ 时函数极限的概念	53
2.3.1	引例	53
2.3.2	x 趋于 x_0 时函数极限的定义	53
2.3.3	三种函数极限的关系	55
2.3.4	典型例子	56
2.4	函数极限的性质	58
2.5	函数极限存在的判别法	63
2.5.1	迫敛性定理	63
2.5.2	归结原则——Heine 定理	66
2.5.3	函数的单调有界定理	69
2.5.4	Cauchy 准则	70
2.6	无穷小量和无穷大量	73
2.6.1	无穷大量与无穷小量的定义与性质	73
2.6.2	无穷小量的比较	75

小结	78
复习题	79
第 3 章 函数的连续性	82
3.1 连续函数的概念	82
3.1.1 函数在一点 x_0 连续的定义	82
3.1.2 函数的左连续与右连续及区间上的连续函数	83
3.1.3 典型例子	84
3.2 函数间断的概念	86
3.2.1 间断点的定义及其分类	86
3.2.2 典型例子	87
3.3 连续函数的局部性质与初等函数的连续性	89
3.3.1 局部性质	89
3.3.2 初等函数的连续性	90
3.3.3 应用函数的连续性求函数极限	92
3.4 连续函数的整体性质	94
3.4.1 有界性定理和最值定理	94
3.4.2 零点定理与介值定理	97
3.4.3 一致连续性定理	99
小结	103
复习题	104
第 4 章 微分与导数	106
4.1 微分与导数的概念	106
4.1.1 微分的概念	106
4.1.2 导数的概念	109
4.1.3 可微与可导的关系	111
4.1.4 可微函数与可导函数	112
4.2 求导方法与导数公式	113
4.2.1 用定义求函数的导数	113
4.2.2 导数的四则运算法则	115
4.2.3 反函数求导法则	117
4.2.4 复合函数求导法则	118
4.3 微分的计算与应用	123

4.3.1	微分的运算法则	123
*4.3.2	微分在近似计算中的应用	123
4.4	高阶导数与高阶微分	126
4.4.1	高阶导数	126
*4.4.2	高阶微分	129
4.5	参数方程所表示的函数的导数	131
4.5.1	参数方程与函数	131
4.5.2	用参数方程表示的函数的导数	132
4.5.3	用极坐标方程表示的曲线的切线	133
4.5.4	参数方程所表示的函数的高阶导数	134
	小结	136
	复习题	136
第 5 章	导数的应用	138
5.1	Fermat 定理和 Darboux 定理	138
5.1.1	极值的定义与 Fermat 定理	138
*5.1.2	Darboux 定理	139
5.2	中值定理	140
5.2.1	Rolle 中值定理	140
5.2.2	Lagrange 中值定理	141
5.2.3	Cauchy 中值定理	144
5.3	不定式极限	146
5.3.1	L'Hospital 法则	147
5.3.2	其他类型的不定式极限	150
5.4	Taylor 公式	153
5.4.1	带 Peano 型余项的 Taylor 公式	154
5.4.2	带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式	156
5.4.3	若干初等函数的 Maclaurin 公式	157
5.4.4	Taylor 公式应用举例	160
5.5	函数的单调性与凸性	163
5.5.1	函数的单调性	163
5.5.2	函数的凸性	165
5.5.3	曲线的拐点	169

5.5.4 单调性与凸性的应用 —— 证明一些不等式	170
5.6 函数的极值与最值	173
5.6.1 函数的极值	173
5.6.2 函数的最值	176
*5.7 函数作图	178
5.7.1 渐近线	179
5.7.2 函数图形的描绘	180
小结	183
复习题	184
第 6 章 实数集的稠密性与完备性	187
*6.1 实数集的稠密性	187
6.1.1 两个实数的大小关系	187
6.1.2 实数集的稠密性	191
6.2 实数集的完备性	193
6.2.1 区间套定理	193
6.2.2 有限覆盖定理	195
6.2.3 聚点定理	197
6.2.4 实数集完备性基本定理的等价性	199
*6.3 上极限和下极限简介	201
小结	203
复习题	204
习题答案或提示	205
参考文献	215
附录	216
索引	221

第1章 实数与数列极限

1.0 预备知识

1.0.1 一些常用的记号

(1) \forall 表示“对任意给定的”;

(2) \exists 表示“存在”或“存在一个”;

(3) $\exists!$ 表示“存在唯一一个”;

(4) \Leftrightarrow 表示“等价于”;

(5) 符号 \leq 表示“小于或等于”, 即 $a \leq b$ 表示“ $a < b$ 或者 $a = b$ ”; 也就是, 只要 $a < b$ 与 $a = b$ 两个式子中有一个成立, 就有 $a \leq b$ 成立. 例如,

若 $x < 3$, 则 $x \leq 3$; 若 $x = 3$, 则也有 $x \leq 3$ 等.

但是, 其逆命题一般不成立, 即由 $x \leq 3$ 不能推出 $x < 3$, 必须确定 $x \neq 3$, 才能推出 $x < 3$; 当然 $3 \leq 3$ 可以写为 $3 = 3$, 因为这是确定的事实.

类似地, \geq 表示“大于或等于”.

1.0.2 逻辑命题的否命题

如果命题 A 可以表示为: 若 p 成立, 则 q 成立. 那么命题 A 的否命题就是: 若 p 不成立, 则 q 不成立.

例 1 已知 $y = f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ ($a > 0$) 内恒等于零的定义是: $\forall x \in (-a, a)$, 总有 $f(x) = 0$, 记作 $f(x) \equiv 0, x \in (-a, a)$. 试写出 $y = f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ 内不恒等于零 (记作 $f(x) \not\equiv 0, x \in (-a, a)$) 的定义.

解 由于 $y = f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ 内恒等于零 $f(x) \equiv 0$ 的定义是命题:

$$\forall x \in (-a, a), \text{ 总有 } f(x) = 0;$$

其否命题是: $\exists x_0 \in (-a, a)$, 使得 $f(x_0) \neq 0$. 所以 $y = f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ 内不恒等于零 $f(x) \not\equiv 0$ 的定义是: $\exists x_0 \in (-a, a)$, 使得 $f(x_0) \neq 0$. \square

例 2 已知 $y = f(x)$ 为区间 I 上增函数的定义是: $\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2$, 总有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 试写出 $y = f(x)$ 在区间 I 上不是增函数的定义.

解 由于 $y = f(x)$ 是区间 I 上的增函数的定义是命题:

$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2, \text{ 总有 } f(x_1) \leq f(x_2);$$