



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



新世纪高等学校规划教材·数学系列

空间解析几何

(第4版)

北京师范大学数学科学学院◎组编

高红铸 王敬庚 傅若男◎编著

KONGJIAN JIEXI JIHE



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

十五 普通高等教育“十一五”国家级规划教材


新世纪高等学校规划教材·数学系列

空间解析几何



北京师范大学数学科学学院◎组编
高红铸 王敬虞 傅若男◎编著

KONGJIAN JIEXI JIHE

 北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/高红铸,王敬康,傅若男编著. 4版. —北京:北京师范大学出版社, 2018. 8

(新世纪高等学校规划教材·数学系列)

ISBN 978-7-303-24003-6

I. ①空… II. ①高…②王…③傅… III. ①立体几何—解析几何—高等学校—教材 IV. ①O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 182711 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 www.jswsbook.com
电子信箱 jswsbook@163.com

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码:100875

印 刷:保定市中国画美凯印刷有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:787 mm×1092 mm 1/16
印 张:12.25
字 数:250 千字
版 次:2018 年 8 月第 4 版
印 次:2018 年 8 月第 1 次印刷
定 价:30.00 元

策划编辑:刘风娟 岳昌庆 责任编辑:刘风娟 岳昌庆
美术编辑:刘 超 装帧设计:刘 超
责任校对:赵非非 黄 华 责任印制:赵非非

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话:010-62978190

北京读者服务部电话:010-62979006-8021

外埠邮购电话:010-62978190

本书如有印装质量问题,请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话:010-62979006-8006

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立数学与数学教育研究所，2004年成立数学科学学院。学院现有教师78人，其中教授36人，副教授31人；有博士学位的教师占96%。特别地，有中国科学院院士2人，第三世界科学院院士1人，国家千人计划2人，青年千人计划1人，全国高校教学名师奖1人，教育部长江学者奖励计划特聘教授3人(青年学者1人)和讲座教授1人，国家杰出(优秀)青年基金获得者3人(2人)，入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人。现有全日制在校生1225人，其中本科生913人，硕士研究生221人，博士研究生91人。

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权。1988年，基础数学、概率论与数理统计被评为国家重点学科。1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站。1996年，数学学科成为国家211工程重点建设的学科。1997年成为国家基础科学人才培养基金基地。1998年获数学一级学科博士学位授予权。2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体。2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台。2007年数学被评为一级学科国家重点学科。2008年数学与应用数学专业师范教育方向获第一批高等学校特色专业建设点。2009年教育部数学与复杂系统重点实验室挂牌，分析类课程教学团队被评为国家级优秀教学团队，调和分析与流形的几何方向被评为教育部创新团队。2012年在高校第3轮数学一级学科评估中排第5名。2017年9月，数学学科进入世界一流建设学科名单。2017年10月，数学学科在美国新闻与世界报道(US News)联合汤森路透公司发布的2018世界最佳大学学科前100排名榜中列45位(2017年、2016年、2015年分列30, 29, 40位)，在内地高校中排名第3位。学院还有6个硕士点，8个教研室和《数学通报》杂志编辑部。

103年来，数学科学学院已毕业全日制本科生8466人(不含辅仁大学数学系毕业生)。30多年来，已授予博士学位447人，硕士学位1852人，研究生班毕业209人。据不完全统计，在博士毕业生中：有2人当选为中国科学院院士和1人当选为第三世界科学院院士，2人获全国高校教学名师奖，1人入选万人计划教学名师，3人任教育部长江学者特聘教授，1人获中国科学院百人计划，6人获国家杰出青年基金，4人获国家自然科学奖，3人获国家科技进步奖，2人获国家级有突出贡献的中青年专家称号，2人入选新世纪百千万人才工程国家级人选，2篇博士学位论文入选全国百篇优秀博士学位论文，5篇博士学位论文获全国百篇优秀博士学位论文提名奖。

李仲来执笔

第4版前言

1915年北京高等师范学校成立数理部，1922年成立数学系。2004年成立北京师范大学数学科学学院。经过近百年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验。将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的。

培养人才和编写教材是北京师范大学数学科学学院两项非常重要的工作。教材的编写是学院的基本建设之一。学院要抓好教材建设；教师要研究教学方法。在教材方面，学院推出一批自己的高水平教材，做到各科都有，约60部。

写教材要慢一点，质量要好一点，教材修订连续化，教材出版系列化，是编写教材要注意的几项基本原则。学院希望教材要不断地继续修改和完善，对已经出版两版的教材，我们准备继续再版。在2005年5月，经由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社科技与经管分社进行协商，由北京师范大学数学科学学院主编（李仲来教授负责），准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用数学教材进行修订。

教材的建设是长期的、艰苦的任务，每一位教师在教学中要自主地开发教学资源，创造性地编写和使用教材。学院建议：在安排教学时，应考虑同一教师在3~5年里能够稳定地上同一门课，并参与到教材的编写或修订工作中去。在学院从事教学的大多数教师，应该在一生的教学生涯中至少以自己为主，编写或修订一种教材作为己任，并注意适时地修订或更新教材。我们还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善。

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授（数学专业）和在职中学教师等使用和参考。（李仲来执笔）

北京师范大学数学科学学院

第4版作者的话

本书是在高红铸、王敬赓、傅若男编著的《空间解析几何》第3版的基础上修订而成的。与前一个版本比较，最大的改动在于把原来第15节的手工画图改成了用数学软件 Maple 作图。另外第9节，第19节和第24节也进行了一定程度修改。

空间解析几何是数学系一年级学生的一门基础课，它为学生学习后继的数学和物理课程提供必要的基础知识。同时，它本身的内容对解决某些实际问题也很有用。

本书包括解析几何产生的一个简单历史概述以及解析几何五章内容，书末附有部分习题的答案。

让学生知道一点有关一门课程的创立历史，有助于学生掌握该课程的基本思想和它在整个数学中所处的地位。为此本书将解析几何创立的历史概述及这门课程的重要性放在最前面供学生阅读。

第1章向量代数。在本章中暂不引进坐标系，目的是为了让学生更好地掌握向量本身的运算。强调向量的各种运算的几何意义和在几何中的应用。这种着重对“形”的思考的安排，有利于培养学生的几何直观能力。

第2章平面与直线。首先建立空间坐标系，用坐标进行向量运算，然后运用向量和坐标两种方法，研究有关平面和空间直线的问题。

第3章特殊曲面和二次曲面。介绍球面、直圆柱面、直圆锥面等常见的特殊曲面。应用曲线族产生曲面的理论，讲解建立一般柱面、锥面和旋转曲面的方法。对椭球面等5种常见二次曲面的标准方程，分析讨论它们表示的空间图形的几何形状。为了提高学生对空间图形的直观理解以及增强学生对数学软件的使用能力，本章第15节还特别介绍了用数学软件 Maple 作图的一些基本方法，由于本节内容对全书的逻辑体系无影响，我们把它标上“*”表示选讲内容，教师可以根据课时及个人偏好加以取舍。

第4章坐标变换与一般二次曲线(面)的讨论。采用了代数中的矩阵、特征值和特征向量的语言来描述坐标变换和二次曲线(面)方程的

化简. 这种处理方式比回避特征值和特征向量的方式增加了些许难度, 但方法上更具有一般性. 更重要的是, 我们认为这部分内容最能体现几何与代数的完美结合, 同时也希望借此向学生传递这样一个观念: 即几何与代数在很多情况下描述的是事物的同一个性质, 只不过所使用的语言不同而已.

第5章平面的仿射变换与等距变换. 由于这些概念是不依赖于坐标系的几何概念, 我们在本版本中采用了由几何方式引入仿射变换的定义, 进而推导出在坐标系中的代数表示. 这部分内容的编写参考了尤承业编著的《解析几何》一书. 本版本修订了上一版本中仿射坐标系及图形仿射性质的应用一节, 并将其改名为仿射坐标系及仿射变换的应用, 这部分内容对扩展和指导中学几何学的理解很有意义.

书末附有部分习题的答案, 方便学生及时发现和纠正自己的错误.

我们在编写本书时, 努力遵循以下几点: 内容力求简明, 突出解析几何的基本思想和基本方法; 注意强调各种代数表达式的几何意义, 着重从几何直观上进行分析; 强调几何与代数的联系; 每节后的习题与本节内容紧密联系, 习题的选配既注意基本题, 又有综合和提高题.

本书曾在北京师范大学数学科学学院近年来的教学中多次使用过. 每周四学时讲授, 一学期可以完成.

在编写过程中, 我们参考了朱鼎勋、陈绍菱编著的《空间解析几何学》, 苏步青等的《空间解析几何》, 波格列洛夫的《解析几何》, 邱维声的《解析几何》, 尤承业的《解析几何》等书, 谨向各书的著译者表示感谢.

我们还要感谢北京师范大学出版社和北京师范大学数学科学学院对本教材出版的资助. 出版社刘凤娟编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动, 我们表示由衷的谢意.

由于编者的水平所限, 书中的缺点错误在所难免, 欢迎大家批评指正.

编者

2018年4月于北京师范大学

目 录

绪论 解析几何创立的历史概述及这门课程的重要性 /1

- § 1 费马和笛卡儿在创立解析几何中的贡献 … 1
- § 2 解析几何的重要性 …………… 6
- § 3 一点启示 …………… 7

第 1 章 向量代数 /8

- § 1 向量及其线性运算 …………… 8
 - 1. 向量及其表示 …………… 8
 - 2. 向量的加法和减法 …………… 9
 - 3. 向量的数乘 …………… 11
 - 4. 共线及共面向量的判定 …………… 12
 - 5. 线段的定比分点 …………… 13
- 习 题 1 …………… 14
- § 2 向量的内积 …………… 16
 - 1. 向量的夹角 …………… 16
 - 2. 向量的射影 …………… 16
 - 3. 向量的内积 …………… 17
- 习 题 2 …………… 20
- § 3 向量的外积 …………… 21
 - 1. 外积的定义 …………… 21
 - 2. 外积的性质 …………… 22
 - 3. 外积的应用举例 …………… 24
- 习 题 3 …………… 26
- § 4 混合积和双重外积 …………… 27
 - 1. 向量的混合积 …………… 27
 - 2. 向量的双重外积 …………… 28
- 习 题 4 …………… 30

第2章 平面与直线 /31

§ 5 直角坐标系、仿射坐标系以及直角坐标系中的向量计算 ...	31
1. 直角坐标系和仿射坐标系	31
2. 直角坐标系中的向量运算	32
3. 距离公式和定比分点公式	34
习 题 5	36
§ 6 平面方程	38
1. 平面方程	38
2. 两平面的位置关系	42
习 题 6	43
§ 7 空间直线方程	45
习 题 7	48
§ 8 平面与直线的有关问题	50
1. 直线与平面的位置关系	50
2. 两直线共面的条件	52
3. 平面束	54
习 题 8	56
§ 9 距离	58
1. 点到平面的距离	58
2. 点到直线的距离	59
3. 两条异面直线间的距离及公垂线方程	59
习 题 9	62

第3章 特殊曲面和二次曲面 /64

§ 10 曲面与方程 球面、直圆柱面和直圆锥面的方程	64
1. 曲面与方程	64
2. 球面方程	65
3. 直圆柱面方程	66
4. 直圆锥面方程	67
习 题 10	68
§ 11 曲线族产生曲面的理论 柱面、锥面及旋转曲面的方程 ...	70
1. 曲线族产生曲面的理论	70
2. 柱面	71
3. 锥面	74
4. 旋转曲面	76
习 题 11	81
§ 12 空间曲线和曲面的参数方程	83

1. 空间曲线的参数方程	83
2. 曲面的参数方程	84
3. 球面坐标和柱面坐标	87
习 题 12	89
§ 13 二次曲面	91
1. 椭球面(或椭圆面)	91
2. 虚椭球面	93
3. 单叶双曲面	93
4. 双叶双曲面	94
5. 双曲面的渐近锥面	94
6. 椭圆抛物面	96
7. 双曲抛物面	96
8. 二次曲面标准方程小结	97
习 题 13	101
§ 14 单叶双曲面和双曲抛物面的直纹性	104
1. 单叶双曲面的直纹性	104
2. 双曲抛物面的直纹性	107
习 题 14	108
* § 15 用 Maple 作图	109
1. 关于 Maple 的一般性说明	109
2. plot 命令	109
3. plot3d 命令	113
4. 特殊作图	115
习 题 15	119
第 4 章 坐标变换与一般二次曲线(面)的讨论 /120	
§ 16 正交矩阵 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵	120
1. 正交矩阵	120
2. 方阵的特征值与特征向量	121
3. 相似矩阵	122
习 题 16	124
§ 17 坐标变换	125
1. 平面坐标变换	125
2. 空间坐标变换	128
习 题 17	130
§ 18 一般二次曲线与二次曲面方程的化简	132
1. 一般二次曲线方程的化简	132
2. 一般二次曲面方程的化简	134

习 题 18	137
§ 19 二次曲线与二次曲面的不变量及类型判别	138
1. 二次曲线的不变量和半不变量	138
2. 利用不变量确定二次曲线的类型	140
3. 二次曲面的不变量和半不变量	143
习 题 19	144
§ 20 二次曲线的切线、法线 and 对称性	146
1. 二次曲线和直线的相关位置, 切线、法线和渐近方向	146
2. 二次曲线的对称中心	148
3. 二次曲线的对称轴	149
习 题 20	152

第5章 平面的仿射变换与等距变换 /154

§ 21 仿射变换与等距变换	154
1. 变换与变换群	154
2. 平面的仿射变换	155
3. 平面的等距变换	157
习 题 21	158
§ 22 仿射变换的决定定理	159
1. 仿射变换诱导的向量变换	159
2. 平面仿射变换的决定定理	160
习 题 22	161
§ 23 仿射变换与等距变换在坐标系中的表示	162
1. 仿射变换在坐标系中的表示	162
2. 等距变换在坐标系中的表示	163
习 题 23	164
§ 24 仿射变换的其他性质	166
1. 仿射变换的面积系数	166
2. 仿射变换的不动点和不变直线	167
3. 二次曲线的仿射等价	168
习 题 24	168
§ 25 仿射坐标系及仿射变换的应用	170
1. 仿射坐标系的应用举例	170
2. 仿射变换在初等几何中的应用	173
习 题 25	174

部分习题答案 /176

绪论 解析几何创立的历史概述及这门课程的重要性^①

§ 1 费马和笛卡儿在创立解析几何中的贡献

费马(Fermat, 1601—1665, 法国人)和笛卡儿(Descartes, 1596—1650, 法国人)是 17 世纪伟大的数学家. 由于他们既关心曲线研究中的一般方法, 又直接从事科学研究工作, 敏锐地看到数量方法的必要性, 而且注意到代数具有提供这种方法的力量, 因此他们就用代数来研究几何. 他们所创立的学科叫作坐标几何或解析几何, 其中心思想是把代数方程和曲线、曲面联系起来, 这个创造是数学中最丰富、最有效的设想之一.

一句话, 科学的需要和对方法论的兴趣, 推动了费马和笛卡儿对坐标几何的研究.

费马, 出身于商人家庭, 学法律并以律师为职业, 数学只是他的业余爱好. 虽然, 他只能利用闲暇时间研究数学, 但他对数论和微积分学作出了第一流的贡献, 并同帕斯卡(Pascal, 1623—1662, 法国人)一起开创了概率论的研究工作. 他与笛卡儿都是坐标几何的发明者.

费马关于曲线的工作, 是从研究古希腊几何学家特别是阿波罗尼奥斯(Apollonius, 公元前 266—前 190, 古希腊数学家)开始的. 阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》一书久已失传, 而费马是把它重新写出来的人之一. 他用代数来研究曲线, 他说, 他打算发起一个关于轨迹的一般研究, 这种研究是古希腊人没有做到的. 1629 年他写了一本《平面和立体的轨迹引论》(1679 年发表), 书中说, 他找到了一个研究有关曲线问题的普遍方法.

我们不知道费马的坐标几何究竟怎样产生的, 但很可能是他把阿波罗尼奥斯的结果, 直接翻译成代数的形式. 他考虑任意曲线和它上面的一般点 J (如图 0-1), J 的位置用 A, E 两个字母定出: A 是从点 O 沿底线到点 Z 的距离, E 是从 Z 到 J 的距离. 他所用的坐标, 就是我们现在的斜角坐标, 但是 y 轴没有明确出现, 而且不用负数, 他的 A, E 就是我们现在的 x, y .

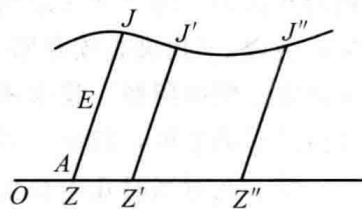


图 0-1

费马把他的一般原理叙述为: “只要在最后的方程里出现两个未知量, 我们就得到一个轨迹, 这两个量之一, 其末端就描绘出一条直线或曲线.” 图 0-1 中对不同位置的

^① 取材于[美]克莱因著《古今数学思想》中译本第 2 册第 15 章, 上海科学技术出版社, 2002: 1-27.

E , 其末端 J, J', J'', \dots 就把“线”描出, 他的未知量 A 和 E , 实际是变数, 或者说, 联系 A 和 E 的方程是不定的. 他写出联系 A, E 的各种方程, 并指明它们所描绘的曲线. 例如: 他给出方程(用我们现在的写法就是) $dx=by$, 并指出这代表一条直线; 他又给出 $d(a-x)=by$, 并指出它也表示一条直线; 方程 $p^2-x^2=y^2$ 代表一个圆; $a^2-x^2=ky^2$ 代表一个椭圆; $a^2+x^2=ky^2$ 和 $xy=a$ 各代表一条双曲线; $x^2=ay$ 代表一条抛物线. 而且费马确实领悟到坐标轴可以平移和旋转, 因为他给出了一些较复杂的二次方程, 并给出了他们可以简化到的简单形式. 他肯定地得到如下结论: 一个联系着 A, E 的方程, 如果是一次的就代表直线, 如果是二次的就代表圆锥曲线.

笛卡儿, 首先是一位杰出的近代哲学家, 另外他还是近代生物学的奠基人, 第一流的物理学家, 同时也是一位数学家. 他的父亲是一位相当富有的律师. 笛卡儿大学毕业后去巴黎当律师, 在那里他花了一年的时间, 跟两位神甫一起研究数学. 其后的 9 年中, 他曾在几个军队中服役, 但他一直继续研究数学. 在荷兰布莱达地方的招贴牌上有一个挑战性的数学问题, 被他解决了, 这使他自信有数学才能, 从而开始认真用心于数学. 回到巴黎后, 他为望远镜的威力所激动, 又一心钻研光学仪器的理论和构造. 1628 年, 他 32 岁时移居荷兰, 得到较为安静自由的学术环境, 在那里他住了 20 年, 写出了著名的作品. 1649 年他被邀请去做瑞典女皇的教师, 第 2 年在那里患肺炎逝世, 享年 54 岁.

1637 年笛卡儿写的《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》一书出版, 这是一本文学和哲学的经典著作, 包括 3 个著名的附录:《几何》《折光》和《陨星》.《几何》是他所写的唯一的一本数学书, 他关于坐标几何的思想, 就包括在他的这本《几何》中. 笛卡儿的其他著作有《思想的指导法则》《世界体系》《哲学原理》《音乐概要》.

笛卡儿是通过 3 个途径来研究数学的: 作为一位哲学家, 他把数学方法看作在一切领域建立真理的方法来研究; 作为自然科学的研究者, 他广泛地研究了力学、水静力学、光学和生物学等各个方面, 他的《几何》的一部分和《折光》都是讲光学的; 作为一位关心科学的用途的人, 他强调把科学成果付之应用, 这一点上, 他同希腊人明白地公开决裂. 由于他注意到数学的力量, 他就要去寻找数学的用途. 他不推崇纯粹数学, 他说:“我决心放弃那个仅仅是抽象的几何. 这就是说, 不再去考虑那些仅仅是用来训练思想的问题. 我这样做, 是为了研究另一种几何, 即目的在于解释自然现象的几何.”对他来说, 数学不是思维的训练, 而是一门建设性的有用科学.

笛卡儿对当时几何和代数的研究方法进行了分析和比较, 他认为, 没有任何东西比几何图形更容易印入人的脑际了, 因此, 用这种方式表达事物是非常有益的. 但他对欧几里得几何中的每一个证明都要求某种新的往往是奇巧的想法这一点深感不安, 他还批评希腊人的几何过多地依赖于图形. 他完全看到了代数的力量, 看到它在提供广泛的方法论方面, 高出希腊人的几何方法; 他同时强调代数的一般性, 以及它把推理程序机械化和把解题工作量减小的价值. 他看到代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力, 但他对当时通行的代数也加以批评, 说它完全受公式和法则的控制, 不像一门改进思想的科学, 因此他主张采取代数和几何中一切最好的东西, 互相以长补短. 他所做的工作, 就是把代数用到几何上去, 在这里, 他对方法的普遍兴趣和他对代数

的专门知识，就组成了联合力量，于是就产生了他的《几何》一书。

在《几何》中，他开始仿照韦达(Vieta, 1540—1603, 法国人)的方法，用代数解决几何作图题，后来才逐渐出现了用方程表示曲线的思想。

举两个例子。

假定某个几何问题，归结到寻求一个未知长度 x ，经过代数运算，知道 x 满足方程 $x^2 = ax + b^2$ ，其中 a, b 是已知长度。于是，由代数学得到

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} \quad (0.1)$$

(笛卡儿不考虑负根)。他画出 x 如下：

作 $\text{Rt}\triangle NLM$ (如图 0-2)，其中 $LM = b$ ， $NL = \frac{a}{2}$ 。延长 MN 到 O ，使 $NO = NL = \frac{a}{2}$ ，于是 OM 的长度就是 x 。

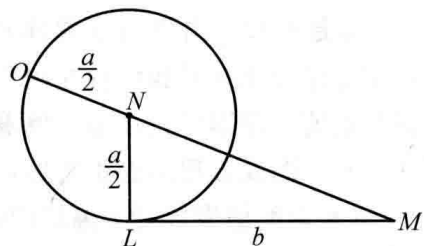


图 0-2

这就是说，由解一个代数方程而得到的式 (0.1) 指明了 x 的画法。

在《几何》第一卷的前一半中，笛卡儿用代数解决的只是古典的几何作图题，这只不过是代数在几何上的一个应用，并不是现代意义下的解析几何。

下一步，笛卡儿考虑了不确定的问题，其结果有很多长度可以作为答案，这些长度的端点充满一条曲线。他说“也要求发现并描出这条包括所有端点的曲线”。曲线的描出，是根据最后得到的不定方程，笛卡儿指出，对于每个 x ，长度 y 满足一个确定的方程，因而可以画出 y 。

笛卡儿以帕普斯(Pappus, 约 300—350 年前后，古希腊人)问题为例。

帕普斯问题 在平面上给定三条直线，求所有这样的点的位置(即轨迹)：从这点作三条直线各与一条已知线交成一个已知角(三个角不一定相同)，使在所得的三条线段中，某两条的乘积(指长度的乘积)与第三条的平方成正比。

如果给定四条直线，画法同上，但要求所得的四条线段中，某两条的乘积与其余两条的乘积成正比。

如果给定五条直线，画法仍同上，但要求在所得的五条线段中，某三条的乘积与其余两条的乘积成正比。

如果给定的直线多于五条，依此类推。

帕普斯曾经断言，当给定的直线是三条或四条时，所得的轨迹是一条圆锥曲线。

在《几何》第 2 卷中，笛卡儿处理了四条直线时的帕普斯问题。

设给定的直线是 AG, GH, EF 和 AD (如图 0-3)。考虑一点 C ，从 C 引四条直线各与一条已知直线交成已知角(四个角不一定相同)，把所得的四条线段记为 CP, CQ, CR, CS ，要求找出满足条件 $CP \cdot CR = CQ \cdot CS$ 的点 C 的轨迹。

笛卡儿记 AP 为 x ，记 PC 为 y ，经过简单的几何考虑，他从已知量得出 CR, CQ, CS 的值，把这三个值代入 $CP \cdot CR = CQ \cdot CS$ ，就得到一个 x 和 y 的二次方程

$$y^2 = ay + bxy + cx + dx^2, \quad (0.2)$$

其中 a, b, c, d 是由已知量组成的简单的代数式. 于是他指出, 如果任意给 x 一个值, 就能得到 y 的一个二次方程, 从这个方程可以解出 y , 于是就能用直尺和圆规把 y 画出来, 如同他在第一卷所做的. 由此可知, 如果我们取无穷多个 x 值, 就得到无穷多个 y 值, 从而得无穷多个 C 点. 所有这些 C 点组成的轨迹, 就是方程(0.2)所代表的曲线.

笛卡儿的做法是, 选定一条直线(如图 0-3 中的 AG)作为基线, 以点 A 为原点. x 值是基线上从 A 量起一个线段的长度, y 是由基线出发与基线作成固定角度的一个线段的长度. 这个坐标系我们现在叫作斜角坐标系. 笛卡儿的 x, y 只取正值, 即图形只在第一象限内.

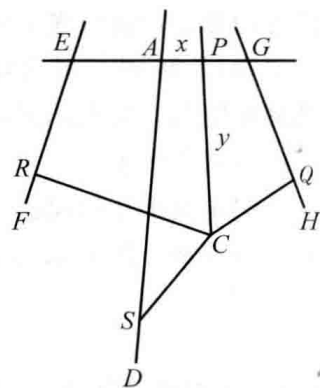


图 0-3

有了曲线方程的思想之后, 笛卡儿进一步发展了他的思想.

(1) 曲线的次数与坐标轴的选择无关.

(2) 同一坐标系中两个曲线的方程联立, 可解出交点.

(3) 曲线概念的推广. 古希腊人说平面曲线是可以由直尺和圆规画出的曲线, 而笛卡儿则排斥了这种认为只有能用直尺和圆规画出的曲线才是合法的思想. 他提出, 那些可用一个唯一的含 x 和 y 的有限次代数方程表示出的曲线, 都是几何曲线, 例如蔓叶线($x^3 + y^3 - 3axy = 0$)和蚌线都被承认是几何曲线; 其他如螺线等, 笛卡儿称之为机械曲线(莱布尼茨(Leibniz, 1646—1716, 德国人)后来把它们分别称之为代数曲线和超越曲线). 笛卡儿对曲线概念的这一推广, 取消了曲线是否存在要看它是否可以用圆规和直尺画出这个判别标准, 不但接纳了以前被排斥的曲线, 而且开辟了整个的曲线领域, 牛顿(Newton, 1642—1727, 英国人)1707年称这是“把所有可以用方程表示的线都接收到几何里”.

从上面的叙述中我们可以看出, 费马和笛卡儿两人各自都研究了坐标几何, 但他们研究的目的和方法却有明显的不同: 费马着眼于继承古希腊的思想, 认为自己的工作重新表述了阿波罗尼奥斯的工作; 而笛卡儿批评了希腊人的传统, 主张和这个传统决裂. 虽然用方程表示曲线, 在费马的工作中比在笛卡儿的工作中更为明显, 但应该说真正发现代数方法的威力的是笛卡儿.

由于种种原因, 使坐标几何的思想——用代数方程表示并研究曲线, 在当时没有很快地被数学家们热情地接受并利用.

一个原因是因为费马的书《轨迹引论》到 1679 年才出版, 而笛卡儿的《几何》中对几何作图题的强调, 遮蔽了方程和曲线的主要思想. 事实上, 许多和笛卡儿同时代的人, 都认为坐标几何主要是解决作图问题的工具, 甚至莱布尼茨也说笛卡儿的工作是退回到古代. 虽然笛卡儿本人确实知道, 他的贡献远远不限于提供一个解决作图问题的新方法, 他在《几何》的引言中说, “我在第二卷中所作的关于曲线性质的讨论, 以及考察这些性质的方法, 据我看远远超出了普通几何的论述”, 但他利用曲线方程之处, 确实被他的作图问题所遮盖.

坐标几何传播速度缓慢的另一个原因是笛卡儿的书《几何》写得使人难懂. 他说欧

洲几乎没有一个数学家能读懂他的著作，书中许多模糊不清之处，是他故意搞的，他只约略指出作图法和证法，而留给别人去填入细节。他在一封信中把他的工作比作建筑师的工作，只是定出计划，指明什么是应该做的，而把手工操作留给木工和瓦工。他还说：“我没有做过任何不经心的删节，但我预见到，对于那些自命为无所不知的人，我如果写得使他们能充分理解，他们将不失机会地说我所写的都是他们已经知道的东西。”还有另一方面的理由，在《几何》中他说，他不愿意夺去读者们自己进行加工的乐趣。的确，他的思想必须从他的书中许多解出的例题里去推测。他说，他之所以删去绝大多数定理的证明，是因为如果有人不嫌麻烦而去系统地考查这些例题，一般定理的证明就成为显然的了，而且照这样去学习是更为有益的。

影响坐标几何被迅速接受的原因，还有一个是许多数学家反对把代数和几何结合起来，认为数量运算和几何量的运算要加以区别而不能混淆。

再一个原因是当时代数被认为是缺乏严密性的。

上述种种原因，虽然阻碍了对笛卡儿和费马的贡献的了解，但也有很多人逐渐采用并扩展了坐标几何。

§ 2 解析几何的重要性

解析几何出现以前,代数已经有了相当大的进展,因此解析几何不是一个巨大的技术成就,但在方法论上却是一个了不起的创见.

(1)笛卡儿希望通过解析几何给几何引进一个新的方法,他的成就远远超过他的希望,在代数的帮助下,不但能迅速地证明关于曲线的某些事实,而且这个探索问题的方式,几乎成为自动的了.这套研究方法甚至是更为有力的,当用字母表示正数、负数,甚至以后代表复数时,就有了可能把综合几何中必须分别处理的情形,用代数统一处理了.例如,综合几何中证明三角形的高交于一点时,必须分别考虑交点在三角形内和三角形外,而用解析几何证明时,则不加区别.

(2)解析几何把代数和几何结合起来,把数学造成一个双面的工具.一方面,几何概念可以用代数表示,几何的目的通过代数来达到;另一方面,给代数概念以几何解释,可以直观地掌握这些概念的意义,又可以得到启发去提出新的结论(例如笛卡儿就提出了用抛物线和圆的交点来求三次和四次方程的实根的著名方法).拉格朗日(Lagrange, 1736—1813, 法国人)曾把这些优点写进他的《数学概要》中:“只要代数同几何分道扬镳,它们的进展就缓慢,它们的应用就狭窄,但是当这两门学科结成伴侣时,它们就互相吸取新鲜的活力,从那以后,就以快速的步伐走向完善.”的确,17世纪以来数学的巨大发展,在很大程度上应归功于解析几何,可以说微分学和积分学如果没有解析几何的预先发展是难以想象的.

(3)解析几何的显著优点在于它是数量的工具.这个数量的工具是科学的发展久已迫切需要的,17世纪一直公开要求着的.例如当开普勒发现行星沿椭圆轨道绕着太阳运动,伽利略发现抛出去的石子沿着抛物线轨道飞出去时,就必须计算这些椭圆、计算炮弹飞驶时所画的抛物线了,这些都要求提供数量的工具.研究物理世界,似乎首先需求几何,物体基本上是几何的形象,运动物体的路线是曲线,研究它们时都需要数量知识,而解析几何能使人们把形象和路线表示为代数形式,从而导出数量知识.