中華大典

代數總部

主編　趙栓林

三

代數總部

冪級數總部

圓錐曲綫總部

微積分總部

引用書目

代數總部

主編 趙栓林

方程部

題解

清・《數理精蘊》下編卷三一　借根方比例

借根方者，假借根數方數以求實數之法也。凡法必借根借方，加減乘除，令與未知之數比例齊等，而本數以出，大意與借衰疊借略同。然借衰疊借之法止可以御本部，而此法則線面體諸部皆可御之。其中有借根借方之不同，蓋因根者方之邊數，即所謂線。以根自乘得平方，以根自乘再乘得立方，以根累次乘即得累次多乘方。故以線類爲問者，則借根數以比之。以面類爲問者，則借平方長方以比之。以體類爲問者，則借立方或累次多乘方以比之。至於借數，又有一定之位與降位之法。定位降位法俱詳後。要之此法設立虚數，依所問之比例乘除加減，務令根方之數與真數相當適等，而所求之數以出，此亦借數之巧也。

定位法

衆數之經緯，盡歸乘除。而乘除之條理，又取準於定位。況借數一法，又用根方諸名。一經乘除，俱變爲幾根幾方之號。而本數之比例，由此而生。其定位與常法稍異，故變從簡易設表如左。

定位表

前	真數	根	平方	立方	三乘方	四乘方	五乘方	六乘方	七乘方	八乘方	九乘方
後	○	一	二	三	四	五	六	七	八	九	一○

右表前行所列者借數之名，後行所列者定數之位，其借數者即比例也。根與方數俱爲相連比例率。如根爲二，則平方爲四，立方爲八。以立方與平方之比同於平方與根數之比，即爲八與四之比同於四與二之比也。然必借方借根者，何也？蓋以已知未知之數，權約爲幾根幾方以統御之，加減後餘幾根幾方，即知真數若干矣。如根爲二數，其平方即爲四。若餘二平方，即知其真數有八或餘二根，即知其真數有四也。其定位者即視根方所對之位也。乘法定位，以兩數所對之位數相加，其加數所對之方，即乘出之方也。除法定位，以兩數所對之位數相減，其減餘數所對之方，即餘出之方也。乘法以真數乘根仍得根。蓋根對一而真數對○，無可加也。如以根乘根即得平方，蓋根對一。一與一相加得二，二所對之表爲平方，故定乘得之數爲平方也。如以根乘平方即得立方，蓋根對一，平方對二，一二相加得三，而三所對之表爲立方，故定乘得之數爲立方也。又如以平方乘平方，則二與二相加爲四，察所對之表得三乘方。以平方乘立方，則二與三相加爲五，察所對之表得四乘方。以立方乘立方，則三與三相加爲六，察所對之表得五乘方。餘皆倣此。除法以真數除根仍得根，蓋根對一而真數對○，無可減也。如以根除根即得真數，蓋根對一，一與一相減得○，而○所對之表爲真數，故定除得之數爲真數也。如以根除平方即得根，蓋根對一，平方對二。一二相減餘一。而一所對之表爲根故定除得之數爲根數也。又如以平方除平方，則二與二減盡爲○，察所對之表得真數。以平方除立方，則二與三相減餘一，察所對之表得根數。以立方除立方，則三與三相減得○，察所對之表亦得真數也。餘皆倣此。

定多少與相同號式

一平方丄二根　凡數有多者用此號丄，如一平方多二根，則如此列之。

一立方丅二平方　凡數有少者用此號丅，如一立方少二平方，則如此列之。

二立方＝[一]六　凡數有相等者用此號＝，如二立方與十六相等，則如此列之。

至於數之多少不齊，用號各異。加減乘除之後，有不變者，有以多變少以少變多者，俱詳於本法。

清・羅士琳《比例匯通》卷三　借根方發凡

借根方者，蓋假借根數方數以求實數之法，即元學士李冶所立天元一是也，原名東來法，西人謂之爲阿爾熱八達。今名乃譯書者就其法而質言之耳。根者，綫也，面之界也。借根而並言方者，根爲方之邊。若根乘根則成平方，根乘平方則成立方。以至屢乘及多乘方，俱所必用，故名之曰借根方。凡布算者，先借一根爲所求之物，因之以加減乘除，務令與未知之數比例齊等，而所求之數乃出，大致與設色比例相似。然設色比例止可以御本類，此則一切算法無不可以御之，是誠比例之大全數學之極玅者矣。兹僅就諸比例之所設各法，用借根方法一一推演之，以明九章即比例之故，其全法容俟。另撰借根方解，庶幾由淺及深引人入勝爾。

凡法中用號有三種，如丄爲多號，丅爲少號，＝爲相等號。辨明用號，則多少之數不淆矣。

凡法中多與多加，得數仍爲多，少與少加，得數仍爲少。多與少加，少與多

加，則相減，多數大爲多，少數大爲少。

凡法中多與多減，原數大於減數，則減餘仍爲多。少與少減，原數大於減數，則減餘仍爲少。若多與多減，原數小於減數，則反減之，而減餘即爲少。少與少減，原數小於減數，則反減之，而減餘即爲多。至於多與少減，少與多減，則相加，原數爲多亦爲多，原數爲少亦爲少。

凡法中多與多乘，少與少乘，得數皆爲多。若少與多乘，多與少乘，得數皆爲少。

凡法中除兼乘減，其得數之多與少，皆視每次實之首位多少爲定。

凡法中乘法定位，如真數乘真數則仍爲真數，真數乘根則仍爲根，真數乘平方則仍爲平方，故真數皆在本位。如根乘根則爲平方，根乘平方則爲立方，根乘立方則爲三乘方，故根皆進一位。平方乘平方則爲三乘方，平方乘立方則爲四乘方，平方乘三乘方則爲五乘方，故平方皆進二位。立方乘立方則爲五乘方，立方乘三乘方則爲六乘方，立方乘四乘方則爲七乘方，故立方皆進三位。等而上之，三乘方皆進四位，四乘方皆進五位，餘類推之。

凡法中除法定位，亦同於乘法定位。惟乘用進位，除用降位之別耳。

定位表

真數	根	平方	立方	三乘方	四乘方	五乘方	六乘方	七乘方	八乘方
○	一	二	三	四	五	六	七	八	九

右表前行所列者借數之名，後行所列者定數之位。其借數者，即比例也，根與方數俱爲相連比例率。

清・劉衡《借根方法淺説》

用號説

凡用號有三，如⊥爲多號，一爲少號，＝爲相等號。辨明用號，則多少之數不淆矣。

加法説

凡法中多與多加，得數仍爲多。少與少加，得數仍爲少。若多與少加，少與多加，則相減，多數大爲多，少數大爲少。

減法説

凡法中多與多減，原數大于減數，則減餘仍爲多。少與少減，原數大于減數，則減餘仍爲少。若多與多減，原數小于減數，則以減數反減原數，而減餘即爲少。又若少與少減，原數小于減數，則以減數反減原數，而減餘即爲多。至于多與少減，少與多減，則相加爲減餘數。原數爲多則減餘數亦爲多，原數爲少則減餘數亦爲少。

乘法説

凡法中多與多乘，少與少乘，得數皆爲多。若少與多乘，多與少乘，得數皆爲少。

除法説

凡法中除兼乘減，其得數之多與少，皆視每次實之首位多少爲定。

乘法定位説

乘法定位，如真數乘真數則仍爲真數；乘根則仍爲根，乘平方則仍爲平方，此真數乘各數也，故真數皆在本位。如根乘根則爲平方，乘平方則爲立方，乘立方則爲三乘方，此根乘各數也，故根皆進一位。如平方乘平方則爲三乘方，乘立方則爲四乘方，乘三乘方則爲五乘方，此平方乘各數也，故平方皆進二位。如立方乘立方則爲五乘方，乘三乘方則爲六乘方，乘四乘方則爲七乘方，此立方乘各數也，故立方皆進三位。等而上之，三乘方皆進四位，四乘方皆進五位，餘悉例推。

除法定位説

凡除法定位與乘法定位相反，乘法用進位，除法用降位。

定位表

右	真數	根	平方	立方	三乘	四乘	五乘	六乘	七乘
左	○	一	二	三	四	五	六	七	八

表中右行所列者借數之名，左行所列者定位之數。定位者，視根方所對之位也，乘以所進之位，與所對之位之數相加，其加數所對之位即乘出之數也。除以所降之位，與所對之位之數相減，其減餘數所對之位，即除得之數也。

筭位説

凡筭位皆自左而右，如筭盤式，蓋本泰西原法也。

西法之代數，猶中法之天元、四元也。惟天元、四元之所重者在行列位次，而代數則不論行列位次，一切皆以記號明之。凡學代數者，必先熟記其各種記號及名目。

天元、四元，其未知之數以一代之，已知之數即用其本數入算。代數之法，恒以天、地、人、物等字代未知之數，甲、乙、丙、丁等字代已知之數，又可用周字代周率，訥字代訥氏對數之底，所以無論何數皆可以其本字代之。其所代之字亦謂之某元。

丄者，正也，加也。如　甲丄乙　言以乙與甲相加也。其甲字之左不作丄號亦與有丄號者無異。

丅者，負也，減也。如　甲丅乙　言于甲數内減去乙數也。

ϒ者，相減也。凡言相減者必以小數減其大數。如　三ϒ二　則當以二減三得一。如　二ϒ三　亦當以二減三得一。

×者，左右兩數相乘也。如　二×三　則爲六。若以兩元相乘者，可將兩元並書之而中間不必作×。如甲乙相乘則作　甲乙　其意與　甲×乙　無異。

÷者，以右約左也。如　乙÷甲　言以甲爲法而約其乙也。

一者，以上約下也，猶言分之也。如甲一乙，言甲爲分母乙爲分子也，即甲分之乙也。

()者，括弧也，所以包括其内之各數，使之自成一數而與其外之他數相加減乘除也。如　(甲丅乙)丄丙　言以甲乙之較與丙相加也。如　(甲丄乙)丅丙　言其甲乙之和以丙減之也。如　(甲丅乙)丙　言以甲乙之較與丙相乘也。如　(甲丄乙)(甲丅乙)　言以甲乙之和與甲乙之較相乘也。如

$$\frac{(甲丄乙)丙}{(甲丅乙)(丄)丙}$$

言以甲乙之和與丙相乘爲法，甲乙之較與丙相加爲實。實如法而一也。

又有重重包括者，則異其括弧之式以别之，如作[ ]或作{ }其意並同。如

[甲丅(乙丄丙)丄丁]天　言于甲内減去乙丙之和，而以丁加之，乃與天相乘也。

元之左邊有數目之字者，謂之倍數，亦謂之係數，所以省同元相加之繁也。如　甲丄甲　可作　二甲　甲丄甲丄甲　可作　三甲

元之右角上有小字者，謂之方指數，所以省並書多字之繁也。如　甲甲　可作　甲^{二}　即甲之平方也。如　甲甲甲　可作　甲^{三}　即甲之立方也。如　甲^{乙}　爲甲之乙方也。如　(甲丄乙)^{二}　言以甲乙之和自乘也。

√￣者，開方也，言其内之數當開方也，亦謂之根號。于根號之左角作小字謂之根指數。如　$\sqrt[三]{甲}$　爲甲之立方根，如　$\sqrt[二]{甲}$　爲甲之平方根。每有不作　$\sqrt[二]{\ }$　而但作　√￣　者，其意與　$\sqrt[二]{\ }$　無異。方指數及根指數亦有爲分數者，如　甲$^{\frac{乙}{丙}}$　爲甲之乙分之丙方也，如　$\sqrt[\frac{丙}{乙}]{甲}$　爲甲之丙分之乙根也，如　甲$^{\frac{三}{二}}$　爲甲之二分之三方，即以甲之立方開其平方也。

＝者，等于也，謂其左右兩數相等也。如　甲＝乙　言甲等于乙也。如　甲丄乙＝丙丄丁　言甲乙之和等于丙丁之和也。

<者，小于也，謂左數小于右數也。如　甲丅乙<丙丄丁　言甲乙之較小于丙丁之和也。

>者，大于也，謂左數大于右數也。如　甲丄乙>丙丄丁　言甲乙之和大于丙丁之和也。

∽者，變于也，言左數因右數而變也。如　甲∽乙　言甲變于乙也。如　乙∽丙，言乙變于丙也。

·者，乘也，與用×號同意。如　一×二×三　可作　一·二·三　是也。

∶者，與也，言其左數(之)與右數[之比]也。

∷者，若也，如也，所以明比例之理也。如　甲∶乙∷丙∶丁　言甲與乙之比若丙與丁之比也。

∵者，因也，承上文而言之也。

∴者，故也，發明其所以然也。如　∵甲＝二、乙＝一　∴甲丄乙＝三　言惟因甲等于二乙等于一，所以甲乙之和等于三也。

…者，不盡也，等等也，于直行中則作…如　一丄二丄三丄…　言自一以至無窮也。如　一丄二丄三丄…丄九　言自一至九各數相加也。

○者，無也，零也，空位也，適盡也。如　甲丅乙丄丙＝○　言甲丙之和以

乙減之，則等于無也。

∞者，其大無窮也。如 $\frac{一}{〇}=\infty$ 言以〇除一，則其所得之數等于無窮也。

亅者，至此而止也，所以省連書各數之繁也。如 一·二·三·四 可作 四亅。

項者，式中之自成一數者也。如 甲、$甲^{三}$、$(甲⊥乙)^{三}$、(甲丅乙) 皆爲獨項之式。如 甲⊥乙、甲丅乙、$甲^{二}⊥乙^{二}$、$甲^{二}丅(甲⊥乙)$、$甲^{三}⊥(甲丅乙)$ 皆爲兩項之式。如 甲⊥乙⊥丙⊥丁 則甲爲第一項，乙爲第二項，丙爲第三項，丁爲第四項。

函數者，式中之各項均函此元者也。如式之各項以天之各方明之，則謂之(天)函。

某次式者，猶言某乘方也，惟次數與方數卻有不同。如一次式即法實之式也，二次式即平方之式也，三次式即立方之式也，四次式即三乘方式也，五次式即四乘方式也，其餘依此類推。

解者，開也。凡言解其某次之式者，猶言開某乘方也。

以上各種記號及名目，爲代數式中所常有者，學者既熟記之，則可習代數之各種算法。

清·董毓琦《天代蒙泉》 代數釋例

⊥者，加也。丅者，減也。$甲^{二}$、$乙^{二}$ 諸數角上加二者，自乘也。加三者，再乘也。＝者，同也，左比右同數也。$\sqrt[二]{}$ 者，開平方也。$\sqrt[三]{}$ 者，開立方也。×者，左右相乘也。( )者，括諸數爲一數也。＜右大於左，＞左大於右。∷者四率比例也。

天元之例左右相消後，得式二層爲除式，得式三層爲開方式，四層爲立方、五層爲三乘方、六層爲四乘方。

清·鄧建章《中西算學入門匯通》卷上 釋名

加　累也，數相叠也。

減　消也，數相分也。

乘　猶加也，兩數相因而生也，一作因。一位爲因，多位爲乘，總而言之曰乘也。

除　猶減也，兩數相較而分也，一作約。一位爲歸，多位爲除，總而言之曰除也。

點　數度始於一點，雖不入於數，而爲衆數之本。

線　點引長之也，邊也，數之根也。

面　兩數自乘相乘所得之數也。譬如圍棋盤，每邊一十九路，自乘得三百六十一着，一作積，或作冪，省作幂。

體　一數再乘也，三數連乘也，餘皆爲體。

法實　乘法，此數爲法彼數爲實，或彼數爲法此數爲實，皆可除，則不可倒置，設如有數三十二，欲二分之，必以三十二爲實，以二爲法，否則誤。

和　數與數相加，得數爲和。

較　數與數相減，餘數爲較。

開方　猶除也，但除則有法在先，此則以意商之。如圖，每邊六積三十六，此三十六欲求其何數所生？以意商之，是六所生，商六，一作商除。

平方　面也。一數自乘爲正平方，如前圖。兩數相乘爲長方，一作帶縱平方。

立方　體也。有帶一縱，帶兩縱相同，帶兩縱不同立方。

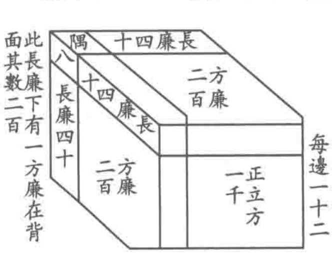
方　大方也。一乘爲平方，再乘爲立方，三乘爲三乘方，以下類推。

廉　倍也。

隅　小方也，與大方同狀。平方隅，一曰廉。

如圖，一十二自乘，大方一百爲十自乘之數。兩廉各二十，爲兩次二與十相乘之數，隅四爲二自乘之數，併之爲一百四十四，所謂平方是也。

如圖，一十二再乘，大立方一千爲十再乘之數。三方廉六百爲三次十自乘相加，又以二乘之之數。三長廉一百二十爲三次十與二相乘相加，又以二乘之之數。隅八爲二再乘之數。併之爲一千七百二十八，所謂立方是也。



率　法也，數以此爲準也。

三率比例　有兩數二與八，求第三數。以中率八自乘，以首率二除之，得三十二。此二與八與三十二爲三率比例，一名連比例。

四率比例　有三數二與四與八，求第四數。以二率四與三率八相乘，以一率二除之，得一十六，此二與四與八與十六爲四率比例。

自之　以本數乘本數也。

等數　一名總等，一名最大公度數，一名公約數。如有兩數三百六十與一百一十二，輾轉相減，餘八，此八即爲等數。

公乘數　一名最小公倍數，即求一術之衍母。設有兩數一十四與二十一，先求公度數爲七，以約一十四得二，以二乘二十一得四十二，即爲最小公倍數。設有三數，五與一十六與二十四，五與一十六公乘數爲八十八，十與二十四公度數爲八，以八約八十得一十，以一十乘二十四得二百四十，爲三數之最小公倍數。

有等之數　即三百六十與一百一十二等類是也。

無等之數　即五與一十六等類是也。以相乘之，積爲最小公倍數。

又　卷下　代數各種記號

加式　甲⊥乙　左右相加。⊥者正也，即借根方之多也。如　二⊥六　謂六與二相加，其總數八也。

減式　甲丅乙　右減左。丅者負也，減也，即借根方之少也。如　八丅四　，即指八內減去四，則其數爲四也。

正式　⊥甲　甲左無⊥號者，亦爲正數。

負式　丅甲

乘式　甲×乙　×或作·或作　甲乙　俱同。　甲(丙⊥丁)(戊丅己)　甲爲一數，　丙⊥丁　爲一數，　戊丅己　爲一數，以此三數連乘也。

約式　$\frac{甲}{乙}$　上法下實，如乙作一十二，甲作三，即一十二以三約之，謂其約得之四也，亦名分數式。

÷以右約左也。如　乙÷甲　言以甲爲法而約其乙也。

四率式　丁∶丙∷乙∶甲　或右行亦同。
四率三率二率一率

相等式　甲＝乙　左右相等。如　四⊥一＝八丅三　謂四與一相併，等於八減去三也。

方程式　甲＝乙　同上，二數爲等號所連，爲方程式。

括弧式　(甲乙)　括諸數爲一數。

整指數式　$\sqrt[二]{甲}$　$\sqrt[二]{\ }$　亦作$\sqrt{\ }$，謂之根號。左角上作小字，謂之根指數。

$\sqrt[二]{甲}$平方，$\sqrt[三]{甲}$立方，$\sqrt[四]{甲}$三乘方，餘類推。

$(甲⊥乙)^{二}$　言以甲乙之和自乘也。右角上作小字謂之方指數。　$甲^{\frac{三}{二}}$　與　$\sqrt[三]{甲^{二}}$　同。餘類推。

分指數式　$甲^{\frac{二}{一}}$甲平方根，$甲^{\frac{三}{一}}$甲立方根，$甲^{\frac{四}{一}}$甲三乘方根，餘類推。

負整指數式　$甲^{丅一}$　甲約一，　$甲^{丅二}$　甲自乘方約一，　$甲^{丅三}$　甲再乘方約一。餘類推。

負分指數式　$甲^{丅\frac{二}{一}}$　甲平方根約一，$甲^{丅\frac{三}{一}}$　甲立方根約一，$甲^{丅\frac{四}{一}}$　甲三乘方約一。餘類推。

係數式　如　甲⊥甲　可作　二甲　，　甲⊥甲⊥甲　可作　三甲　。

某次式　如一次式即法實之式也，二次式即天元平方也，三次式即天元立方也，四次式即天元三乘方也。餘類推。

< 右大於左式。

> 左大於右式。

○ 無數。

∞ 無盡數，亦作∶橫，直⋮。

∽ 相減也。

∝ 變于也，言左數因右數而變也。

∵ 因也，承上文而言之也。

∴ 故也，發明其所以然也。如　甲＝二、乙＝一　∴甲⊥乙＝三　言惟因甲等於二乙等於一，所以甲乙之和等於三也。

⌉ 至此而止也，所以省連書之繁也。如　一·二·三·四　可作四⌉。

元字　所代之字俱謂之元。

天地人彡　代未知之數及微分、積分之變數，同類之元及圖中同類之點，皆同用一字，而以 ′、″、‴ 別之。

干支五行　代已知之數及微分、積分之常數。

某切　某角正切。

某刀　某角餘切。

某弦　某角正弦。

某弓　某角餘弦。

凵　函數式中之各項均函此元者也。如式之各項以天之各方明之，則謂之(天)函

用　周率。

寸　對數。

艮　對數根。

广　對數底。

彳　微分，彳天謂天之微分。

禾　積分，禾彳天謂彳天微分之積分。

項　式中之自成一數者也。如　五甲　爲一項，　四甲丄五甲乙　爲二項。

解　開也。凡言解其某次之式者，猶言開某乘方也。

章按：中國譯西國算書，計有明迄今共有三次：一爲崇禎時，西士利瑪竇、湯若望入中國，與徐、李諸公譯新法算書。一爲咸豐間，西士偉烈亞力在上海墨海書館與李壬叔譯《幾何》後九卷，及《代微積拾級》、《談天》等書。一爲同光間，西士傅蘭雅等在江南製造局與華若汀若溪譯《代數術》、《微積溯源》等書，各以天地人物及干支列宿之名等字代字母，其算式中之記號亦略爲改更。此書中所代之字及各種記號仍仿照原譯之式。

清・周毓英《代數引蒙》　釋例

一　西國之算學，各數均以〇、一、二、三、四等十箇數目字爲本，無論何數均可以此記之。用此十箇數目字，雖無論何數皆可算。惟于數理之深者，則演算甚繁，用代數乃其簡法也。

一　代數之法，無論何數，皆可任以何記號代之。今西國所常用者，每以二十六箇字母代各種幾何。因題中之幾何，有已知之數亦有未知之數。其代之例，恒以起首之字母代已知之數，以最後之字母代未知之數。今譯之中國，則甲、乙、子、丑等元代已知數，以天、地、人等元代未知數。

一　凡丄號在某元之左，則指其數與某數相加。如　甲丄乙　謂乙與甲相加也。如　二丄四　，謂四與二相加，其總數六也。

一　凡丅號在某元之左，則指其數與某數相減。如　子丅丑　謂子內減去丑也。如　七丅二　即指七內減去二，則其數爲五也。

一　凡數之左邊有丄號者，謂之正數。有丅號者，謂之負數。

一　凡數有不與元相連而其左亦有丄與丅之記號者，即算者心中以爲可加減若干也。因小於〇之數，人心中每計想不到，故單用一負數，人每不易明，故以下説解之。

譬如，人之産業，可算其是一箇正數，則其本人所虧欠之錢，可算一箇負數。又如，自左向右引長作一線，則心中可算此線爲正數。再自右向左退作一線，則心中可算此線當爲負數。

一　凡數之左邊無正負之記號者，亦爲正數。

一　凡幾箇代數式俱有丄號或俱有丅號者，謂之同號數，亦謂之同名數。

一　凡幾箇代數式或有丄號或有丅號者，謂之不同號之數，亦謂之異名數。

一　凡代數之式有只一項者，謂之獨項式。其有數項而每項或有丄號或有丅號者，謂之多項式。

如　丄子　或　丅丑　俱爲獨項式。如　甲丄丙　或　甲丄丙丅乙　俱爲多項式。

一　凡將數元相乘，記其乘得之式，其法或並書其元或其間作(乂)[㐅]號俱可。

如　甲乙　謂甲與乙相乘之數也，　甲×乙　亦然。

如　壬癸甲　謂壬與癸與甲三者連乘也，若作　壬×癸×甲　亦同。

一　若以真數一、十、百、千、萬等數也。相乘者，則記其相乘之式兩數之間必作×以間之。

如三與六相乘，必作　三×六　若不用×號，而並書之爲　三六　則與三十六無別矣。是不可不知。

一　若所乘之式有多項者，則其多項之上必作一横線以牽連之。

如甲以　丙丄丁　乘之，再以　戊丅己　乘之，則其　丙丄丁　及　戊丅己　之上必各作一線，則其式爲　甲×$\overline{丙丄丁}$×$\overline{戊丅己}$　其意謂甲自爲一數，丙丄丁　自爲一數，　戊丅己　亦自爲一數，而以此三數連乘也。近來算學家每不用一號而用括弧，如(　)以包括之。則上式應作　甲×(丙丄丁)×(戊丅己)　或不用×號而作　甲(丙丄丁)(戊丅己)　亦同。

一　凡元之左邊有係之以真數者，此數名曰倍數，謂其所代之數爲元之若干倍也。

如　四乙　謂四倍其(巳)[乙]也。

一　凡元之左邊不係之以真數者，其元之倍數。

如甲即　一甲　如　甲乙　即　一甲乙

一　凡幾何以他幾何分之記其約得之數，其法作一線以界其法實。線之上爲法，線之下爲實。

如　$\frac{四}{一六}$　謂十六以四約之也，即謂其約得之四也。

如　$\frac{丑}{子}$　謂置子以丑約之，得丑分之子也。此種之式，名之曰分數式。

一　凡兩式之間有=者，意謂兩邊之數相等也。

如　子⊥丑=壬丅甲　謂子與丑相并等於壬內減去甲也。

一　凡幾箇獨項式或幾箇多項式，其各元之字有無多少相同者謂之同類之式，不相同者謂之不同類之式。

如　⊥子丑　與　丅子丑　爲同類之式。如　⊥子丑　與　⊥子丑丑　爲不同類之式。

一　代數中尚有別種記號，於以下各式中臨用之處再解之，兹不具論。

清·劉其偉《絜矩齋代數勾股草》　代數釋例

一款　論元字

代幾何之字，無論已知未知者，皆名爲元字。天干地支等字爲已知，天地人物及五行等字爲未知。

二款　論同數

元字所代之數，爲此元字之同數。

三款　論諸號

此書所用之乘×、除÷、等=、開方√諸號皆與代數所用者同，惟加+、減一二號不同。因本書俱用中國數目字，恐此二號與十字、一字相混，故改加爲⊥，改減爲丅。

四款　論括弓號

括弓即( )，寫於幾何之前後，以明所函之數幾何作一幾何用之。如　(甲⊥乙)　即明甲與乙相合而用也。故於括號以前，無論有加號減號，必關括號內所有之幾何。如括弓前有負號，欲去其括弓，則必改弓內諸項之號。如括弓前有正號，欲去其括弓，則弓內諸項之號俱不改。

五款　論係數

元字前寫數目字，以明元字之倍數，名曰係數。如　三甲　其三即爲係數。倘元字前未有係數即一爲其係數。

六款　推廣加減之理

代數之加減較數目之加減，其用尤廣。蓋數目者，加之其數即大，減之其數即小，而代數則不然。如　⊥甲　減　丅乙　得　甲⊥乙　是餘數反大於原數。按代數之例，(如)[加]法依其號而加之，減法改其號而加之，故得以下三條。

一，加一正幾何與減一負幾何同，如　⊥甲　加　⊥甲　得正　二甲　⊥甲　減　丅甲　亦得正　二甲　且加一負幾何與減一正幾何亦同，如　⊥二甲　加　丅甲　得正甲，　⊥二甲　減　⊥甲　亦得正甲。

二，若於某幾何加一正幾何，所得者必大於原幾何，如　⊥二甲　加　⊥甲　得正　三甲　即大於正　二甲　若加一負幾何，所得者反小於原幾何，如　⊥二甲　加　丅甲　得正甲，即小於正　二甲

三，若自某幾何減一正幾何，所得者必小於原幾何，如　⊥二甲　減　⊥甲　等正甲，即小於正　二甲　若減一負幾何，所得者反大於原幾何，如　⊥二甲　減　丅甲　等正　三甲　即大於正　二甲

七款　棄公生

諸項中有公用之生數者，可棄則棄之，如　四天⊥八地=二〇　棄去公生四，得　天⊥二地=一五　不可棄則約爲命分存之，如　四天⊥六地=一八　以四約之，得　天⊥$\frac{三}{二}$地=$\frac{九}{二}$　爲棄公生。

八款　論用元字之法

若問中能用一元算出者，即不要用二元。一元寔不能求出，即用二元或三四元皆可，總算出所求之數爲要。用二元或三四元，必須化爲一元方得數。用一元求之，即免其煩。

九款　論借根方

式中有不成方者，若借根方，則用和縱較縱、開方諸法算之。初學者尚苦不

便。代數則以天之平係數方加於兩端，開之即得所求之數。代數之勝借根方者在此。

十款　論遷項

代數有上下端之分，等號左者爲上端，右者爲下端。上者遷下，其號正負相反。下者遷上亦然。如　天⊥三＝八　將三遷下爲　天＝八⊤三　將八遷上爲　天⊤八＝⊤三　此爲遷項。

十一款　論兩端相等

代數之求等，猶天元之如積相消。

十二款　論乘

式中凡言自乘者，皆是下端乘方。

十三款　論直角三角形

凡直角三角形，其弦上之方等於餘兩邊方之和，或言句股形之弦方，等於句股兩方之和。

清·徐虎臣《溥通新代數》卷一　第一篇　定義

第一款　開端

代數學者，論諸數關係之學科也。在數學用數目字以顯數，於代數學用數目字顯數外，又有用文字以代數目字者。但代字之例，凡已知之數皆以天干地支諸字代之，凡未知之數皆以天地人物諸字代之。因任何算題必有已知數而求未知數也。夫代數學用各字以代任意之數者雖爲通例，然於演算之後亦必依原代之數而求其總值。所以用字代者，欲廣其算術而簡其式焉。

第二款　釋號

凡數學所用之號代數學亦用之，然其中有種種特別之號爲數學所未用者，可逐次詳之於左。

第三款　加號

夫加號亦如數學所用之⊥與＋，然用於漢文當從⊥。而＋雖不便於用，習者亦不可不知，以爲汎覽諸書之地步。如　三⊥五　與　三＋五　皆爲三加五之意，又如　甲⊥乙　與　甲＋乙　皆甲加乙之意也。故凡任何數之左與任何字之左有⊥或＋者，皆示與左數或左式相加之意也。

第四款　減號

夫減號仍如數學所用之⊤與一，故　甲⊤乙　與　甲一乙　皆爲甲減乙之意。但一用於兩數之間如　五一四　雖與　五⊤四　同意，而　五一四　卻與五百十四相混，故本書悉從⊤。然則任何數之左或任何字之左有⊤者，皆示於左數或左式相減之意也。

第五款　乘號

夫乘號亦如數學所用之×與·，故　五×四　與　五·四　皆爲四乘五之意，又如　甲×乙　與　甲·乙　皆爲乙乘甲之意。故凡任何數之左或任何字之左作×或·者，皆示與左數或左式相乘之意。然諸字相乘時有不作號而連書者，如　甲乙　與　甲×乙　相等，又如有　甲乙丙　即與　甲×乙×丙　或　甲·乙·丙　相同。但[有]兩數目字相乘則不能不作號而連書之，如有　三×五　原爲十五，若作　三五　當與三十五等也。

第六款　除號

凡除號亦如數學所用之÷與一，如有　五÷三　與　$\frac{三}{五}$　皆爲三除五之意，又如　甲÷乙　與　$\frac{乙}{甲}$　皆乙除甲之意也。故凡兩數或兩字之閒作÷，皆右除左之意。又凡兩數或兩字上下之閒作一者，皆云上除下之意也。

第七款　因數

凡二數相乘或多數連乘，其乘得之數爲積，而所乘之各數爲因數。或云生數。如　三·四·五　得　六〇　而三與四與五皆爲　六〇　之因數，又如　二·甲·乙　則二與甲與乙皆爲　二甲乙　之因數也。

第八款　係數或云倍數。

將積之因數分開看時，則左數爲右數之係數。如　三甲乙　若分作三與甲乙，則三爲　甲乙　之係數。若分作　三甲　與乙，則　三甲　爲乙之係數。

第九款　乘冪亦曰乘方，古書云$甲^{四}$爲甲之三乘方，$甲^{五}$爲四乘方，$甲^{卯}$爲卯減一乘方。

凡積爲相同之諸因數而成者，不拘其因數有幾，將積爲因數之乘冪，或略而謂之冪。例如　甲甲　爲甲之二乘冪，　甲甲甲　爲甲之三乘冪，　甲甲甲甲　爲甲之四乘冪。然有時將甲亦可云甲之一乘冪者，但又　甲甲　與　甲甲甲　或有特別之名，云　甲甲　爲甲之二方或平方，　甲甲甲　爲甲之三方或立方。又可將　甲甲　書$甲^{二}$而　甲甲甲　書$甲^{三}$及　甲甲甲甲　書$甲^{四}$。於是甲之因數任乘至卯次者故可作$甲^{卯}$，此甲之右肩所書之數字乃爲甲之指數。因指定爲幾箇甲連乘之意也。甲其右肩之卯爲不定數，若任指爲何數當無不可。設卯爲八即

得甲^{八}，若令卯爲一即得甲^{一}。但甲^{一}仍爲甲也。又如有 甲^{三}乙^{二} 即甲三方與乙二方連乘之式，而 三甲^{五} 即三倍甲之五方。

第一〇款　方根

或數之平方數爲甲時，而或數即甲之平方根，因自乘爲甲，故開平方得其根。若以號誌之爲 $\sqrt[二]{甲}$，或不作二於左爲 $\sqrt{甲}$ 亦可。例如甲爲四者，則 $\sqrt{甲}$ 即爲二也。準此理，則甲之三方根作 $\sqrt[三]{甲}$，四方根作 $\sqrt[四]{甲}$。若設卯任爲何數，則 $\sqrt[卯]{甲}$ 爲甲之卯方根也。然有時方根不能求得精密之數，但作根號以誌之，即爲無理之根。例如 $\sqrt{八}$ 與 $\sqrt[三]{一二}$ 等皆不能求得密數，皆云無理之根也。

第一一款　等號與不等號之分

凡兩數或兩式之間作＝，皆云左右相等。例如 三⊥五＝八 及 甲丅乙＝丙 第一式爲 三⊥五 等於八，第二式爲 甲丅乙 等於丙也。若於兩數或兩式之間作∧或∨，皆左右不相等之意。如 一二＞八 與 丙＜甲⊥乙 第一式爲一二大於八，第二式爲 甲⊥乙 大於丙。故凡對於∧尖之數必小於彼邊之數也。

第一二款　獨項式與多項式之別

凡代數式中有⊥號或丅號書於式之左者，謂之項。故全式中有幾箇⊥丅號，即爲幾項。然有時第一項爲⊥號每不書⊥，例如 甲⊥二乙丅丙 此爲三項。但項有同類項異類項之別，如 三甲^{二}乙^{三}丙 與 八甲^{二}乙^{三}丙 爲同類項，又如 三甲^{二}乙丙 與 三甲乙^{二}丙^{二} 爲不同類項，因上兩式字同而指數亦同，故云同類。下兩式字雖同而指數不同，故云異類。故凡只一項者爲獨項式，如 ⊥甲^{二}乙^{二} 與 丅三甲^{二}乙^{五} 皆爲獨項式。又如 甲⊥乙 與 甲丅乙 爲二項式，又如 三甲⊥乙丅丙 與 五乙⊥丙丅甲 爲三項式。但二項以上皆可云多項式。所謂式者，乃一項獨立，或多項相合而成一式，故式有獨項多項之別云。

第一三款　括弧

凡括弧之號爲（　）｛　｝［　］之三種。所以用括弧之號者，必先將括弧內之諸式依加減乘除［之法］化清，始能與括弧外之式相併。例如 丙(甲⊥乙) 此式是(甲⊥乙) 之和以丙乘之爲 丙甲⊥丙乙 若不加括弧爲 丙甲⊥乙 豈不大誤。又如 (甲⊥乙)^{三} 此非甲三方又非乙三方，乃 (甲⊥乙) 之和之三方。如以數目論之，三(二⊥五) 須將括弧內之 (二⊥五) 加爲七，再以三乘之得 三×七 其積爲二一方合。又如 (四丅一)^{三} 須將 (四丅一) 變爲三，再乘至三方而爲二七。但代數式有 $\overline{三甲丅乙}$ 者，其式上之——亦如括弧之意，而 甲丅(乙丅丙) 亦可作 甲丅$\overline{乙丅丙}$ 故凡根號作 $\sqrt[卯]{}$。如 $\sqrt{甲^{二}⊥乙^{三}}$ 其橫線即代括弧而用者，則與 $\sqrt{(甲^{二}⊥乙^{三})}$ 等。所以凡分數式 $\frac{八}{(甲⊥乙)}$ 與 $\frac{八}{甲⊥乙}$ 等也。例如 (甲⊥乙)^{三}(二乙丅三丙)^{二} 與 $\sqrt[三]{\{七甲^{三}⊥(乙⊥丙)^{三}⊥丁^{三}\}}$ 若令 甲＝四、乙＝三、丙＝一、丁＝〇 則第一式化爲 七^{三}×三^{二} 即 三四三×九 得 三〇八七 而第二式化爲 $\sqrt[三]{(七×四^{三}⊥四^{三}⊥〇^{三})}$ 但〇任乘至何方恒爲〇。故得 $\sqrt[三]{(八×六四)}$ 各開立方得 二×四＝八 因八開立方得二，六十四開立方得四，故以二乘四得八。或將 八×六四 乘之而得 五一二 開立方亦得八也。凡兩括弧併列者，即兩式相乘之意，故可不作×。

又　卷二　第九篇　一次方程式

第五二款　論方程式

凡二代數式相等，以代數之記號書者，云方程式，必將相等之二代數式書於左右兩邊，作＝於中，以示兩邊相等之意。例如 甲⊥甲＝二甲 及 甲丅甲＝〇 當讀作甲加甲等於二甲與甲減甲等於〇之類。又如有 甲×二甲＝二甲^{二} 與 二甲÷甲＝二 當讀作甲乘二甲等於二甲二方與甲除二甲等於二。凡此類之式皆云方程式。

綜論

清・梅瑴成《赤水遺珍》

天元一即借根方解

嘗讀授時曆草求弦矢之法，先立天元一爲矢，而元學士李冶所著《測圓海

鏡》亦用天元一立算，傳寫魯魚，算式訛舛，殊不易讀。前明唐荆川、顧箬溪兩公，互相推重，自謂得此中三昧。荆川之説曰：藝士著書，往往以秘其機爲奇。所謂立天元一云爾，如積求之云爾，漫不省其爲何語。而箬溪則言細考《測圓海鏡》如求城徑即以二百四十爲天元，半徑即以一百二十爲天元，既知其數，何用算爲，似不必立可也。二公之言如此，余於顧説頗不謂然，而無以解也。後供奉内廷，蒙聖祖仁皇帝授以借根方法，且諭曰：西洋人名此書爲阿爾熱八達，譯言東來法也。敬受而讀之，其法神妙，誠算法之指南。而竊疑天元一之術頗與相似。復取授時歷草觀之，乃涣如冰釋，殆名異而實同，非徒曰似之已也。夫元時學士著書，壹官治歷，莫非此物，不知何故遂失其傳。猶幸遠人慕化，復得故物。東來之名，彼尚不能忘所自，而明人獨視爲贅疣而欲棄之。噫！好學深思如唐顧二公，猶不能知其意。而淺見寡聞者，又何足道哉，何足道哉！

先解借根方法全書入《數理精蘊》中，兹略具數則，以見大意，不過大官一臠耳。

借根方法，原名東來法，今名乃譯書者就其法而質言之也。根者，綫也，面之界也，體之楞也。凡布算，先借一根爲所求之物，與借衰略相似。借根而并言方者，初入算雖只借根，但根乘根則成平方，根乘平方則成立方，以及屢乘至多乘方，俱所必用，故名之曰借根方法也。

設丁、乙二人出本經商，獲利均分。丁用過七百兩，乙用過一百兩，則乙之餘銀三倍於丁。問原分銀若干。

答曰：原各分銀一千兩。

法借一根爲原分銀之數，則丁之餘銀爲一根少七百兩，乙之餘銀爲一根少一百兩。乙之餘銀既三倍於丁，則將丁之餘銀一根少七百兩三倍之，爲三根少二千一百兩，則與乙之餘銀一根少一百兩相等矣。乃加減之使歸於簡約，兩邊各加二千一百兩，則三根與一根多二千兩爲相等。丁三根少二千一百兩，今加二千一百兩，則補足三根之數。乙一根少一百兩，今亦加二千(二)[一]百兩。以一百兩補足原少之數，仍多二千兩。兩邊各減去一根，則二根與二千兩相等，而一根必爲一千兩，爲原分銀數也。丁分銀一千兩，用去七百兩則仍餘三百兩。乙分銀一千兩，用去一百兩則仍餘九百兩，爲丁之三倍也。

原分銀一根
丁餘一根 — 七〇〇　乙餘一根 — 一〇〇
三根 — 二一〇〇 ＝ 一根 — 一〇〇
三根 ＝ 一根 ⊥ 二〇〇〇
二根 ＝ 二〇〇〇
一根 ＝ 一〇〇〇

圖中用號有三種，如⊥爲多號，—爲少號，＝爲相等號，後倣此。

設有一長方，其長闊和七尺。又有大小二正方，大方等長方之長，小方等長方之闊。三方面積共三十七尺。問長與闊各幾何。

答曰：長四尺，闊三尺。

法借一根爲長方之闊，則長方之長爲七尺少一根。以一根自乘得一平方，爲小方面積。以七尺少一根自乘得四十九尺少十四根多一平方，凡少與少乘、多與多乘，得數皆爲多。若少與多乘、多與少乘，得數皆爲少。後倣此。爲大方面積。以一根與七尺少一根相乘得七根少一平方，爲長方面積。三面積相加得一平方多四十九尺少七根，與三十七尺相等。兩邊各加七根得一平方多四十九尺，與七根多三十七尺相等。兩邊各減三十七尺得一平方多十二尺，與七根相等。乃以十二尺爲實，七根作七尺爲長闊和，用和縱平方開之得闊三尺，闊減和餘四尺爲長。合問。

闊一根　長七 — 一根
小方一平方　大方四九 — 一四根 ⊥ 一平方
長方七根 — 一平方
一平方 ⊥ 四九 — 七根 ＝ 三七
一平方 ⊥ 四九 ＝ 七根 ⊥ 三七
一平方 ⊥ 一二 ＝ 七根

授時歷立天元一求矢術以借根方法解之。

設黄道出入赤道二十四度，求矢。

草曰：立天元一爲矢，即如借一根爲矢也。自之，二因爲二矢冪。即如根乘根爲平方。二因得二平方也。以圓徑一百二十一度七十五分除之爲弦背差，原注今不除。有圓徑母蓋矢冪不滿法故不除也。有圓徑母者用圓徑爲分母，即以二矢冪爲分子也。母減背，應作母乘背。四十八度爲弦。是爲五千八百四十四少二平方也。背弦差爲一百二十一度七十五分平方之二，以減弧背四十八度，則爲四十八度少一百二十一度七十五分平方之二爲弦。今皆以母乘之，以母乘背。得五千八百四十四，以母乘分子之二得二平方。即爲五千八百四十四少二平方爲弦。故不曰差減背而曰母乘背也。自之爲弦冪式。是爲三四一五二三三六少平方二三三七六少三乘方四也。有圓徑母自之在内，原本落在内二字。又爲徑冪乘弦冪寄左。背内減差自乘爲弦冪。今以徑乘背而自乘之，即如以弦自乘而復以徑冪乘之，故曰有圓徑母自之在内。又爲

徑冪乘弦冪也。又以矢減徑即爲一百二十一度七十五分少一根。以矢乘之，以一根乘 𝍠𝍬𝍮𝍠𝍫 𝍦𝍬

之也。四因爲弦冪式。

𝍬𝍧𝍯
𝍣

是爲四百八十七根少四平方也。以徑冪

乘之，得

𝍦𝍪𝍠𝍰𝍧𝍫𝍠𝍬𝍢𝍯𝍭
𝍭𝍱𝍡𝍱𝍡𝍪𝍤

是爲七百二十一萬八千八百三十一根四三七五少平方五萬九千二百九十二二五亦爲徑冪乘弦冪。與左相消，原本落相消二字。得

𝍢𝍬𝍠𝍭𝍡𝍫𝍢𝍥
𝍦𝍪𝍠𝍰𝍧𝍫𝍠𝍬𝍢𝍯𝍭
𝍢𝍭𝍱𝍠𝍮𝍡𝍭
𝍡 𝍡

是爲三千四百一十五萬二千三百三十六，與七百二十一萬八千八百三十一根四三七五少平方三萬五千九百一十六二五少三乘方四爲相等。三乘方開之，宜云帶縱三乘方開之。得四度八十四分八十二秒即一根之數。爲矢度。以上並依曆草原文而加注也。

附開帶縱三乘方簡法

以三四一五二三三六爲實，以根方數爲縱，約四度爲初商。與根數相乘，得二八八七五三二五七五爲根數。又以四自乘得十六，以平方數乘之，得五七四六六〇爲平方共積。又以四再自乘得二百五十六，以四因之得一〇二四爲三乘方共積。與平方共積相併得五七五六八四，與根積相減餘二八二一九九六四一七五爲初商應減數。以減原實，餘五八五二六九四二五爲次商實。

次商八十分，合初商爲四八，以乘根數得三四六五〇三九〇九。又以四八自乘以乘平方數，得八二七五一〇四〇爲平方共積。又以四八再自乘而四之，三乘方數。得二一二三三六六四爲三乘方共積。與平方共積相加得八二九六三三三七六六四。與根積相減，餘三三八二〇七五七二三三六爲初次兩商應減數。以減原實，餘三三一五七八八六六四爲三商實。三商以後，皆倣此開之。

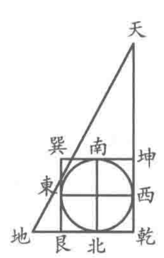
論曰：此以背乘徑又自乘之爲實，四因徑以乘徑冪爲縱，置四因徑冪，四因徑以減之。餘爲負廉，四爲負隅，用減積三乘方開之也。若以商數自乘以乘負廉，又以商數再自乘以乘負隅，併負廉負隅以益實，乃以商數乘縱而除實，所得亦同。

餘句餘股，求容圓徑用借根方解《測圓海鏡》立天元一之法。

或問出西門南行四百八十步有樹，出北門東行二百步見之，問城徑幾步。

答曰：城徑二百四十步。

法曰：以二行步相乘爲實，二行步相併爲從二步，常法得半徑。



草曰：立天元一爲半徑。置南行步天西。在地，內減天元半徑坤西。得遠 𝍣𝍰 爲股圓差。天坤即餘股也。又置東行步在地，北地。內減天元北艮。得下式遠 𝍠〇〇 爲句圓差。艮地即餘句也。以句圓差乘股圓差，得

𝍠
𝍥𝍰〇
𝍨𝍮〇〇〇

蓋乘得一天元冪少六百八十天元又九萬六千步。爲半段黃方冪，即城徑冪之半也。寄左。又置天元冪倍之得 𝍡 元 〇，亦爲半段黃方冪。與左相消，得

𝍠
𝍥𝍰〇
𝍨𝍥〇〇〇

蓋左右各消去一天元冪，則右餘一天元冪與左餘九萬六千少六百八十根相等也。如法開之，得城半徑。倍之得城徑。合問。

徑半一根　　餘股四八〇 — 一根
徑冪之半二平方　　餘句二〇〇 — [一]根
徑冪之半二平方 = 九六〇〇〇 — 六八〇根 ⊥ 平方
一平方 ⊥ 六八〇根 = 九六〇〇〇

右《測圓海鏡》中一則也。原書算式訛舛，今爲改正。略加註釋，稍覺明白。其所謂減天元半徑及天元相乘皆虛數，並非先知半徑實數用以乘減。如顧箬溪之所云者，試以借根方法求之，其理更明。

借一根爲半徑，於南行步內減去半徑得四百八十步少一根爲餘股，於東行步內減去半徑得二百步少一根爲餘句。兩數相乘，得九萬六千步少六百八十根多一平方爲城徑冪之半。存之。又置一根自乘，倍之得二平方，亦爲城徑冪之半。乃加減之，兩邊各減一平方各加六百八十根得一平方多六百八十根，與九萬六千步爲相等。乃以九萬六千爲實，六百八十爲縱，用帶縱平方開之，得一百三十步爲一根之數，即城之半徑也。