蒂图·安德雷斯库系列丛书(第一辑)

数学反思

(2010—2011)

Mathematical Reflections Two More Years (2010-2011)

[美]蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu) 著

余应龙 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

蒂图·安德雷斯库系列丛书(第一辑)

数学反思

(2010—2011)

Mathematical Reflections Two More Years (2010-2011)

[美]蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu) 著

余应龙 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2017－067 号

图书在版编目(CIP)数据

数学反思:2010－2011/(美)蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)著;余应龙译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.9

书名原文:Mathematical Reflections Two More Years(2010－2011)

ISBN 978－7－5603－7296－9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①蒂…②余… Ⅲ.①数学－竞赛题－题解 Ⅳ.①O1－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 057427 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 21　字数 472 千字
版　　次　2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－7296－9
定　　价　58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

原来真理往往比思想简单

Richard Feynman

◎序言

得到了忠实读者的赏识和他们具有建设性反馈意见的鼓舞，在此我们呈现《数学反思》一书：本书编撰了同名网上杂志2010和2011卷的修订本.该杂志每年出版六期，从2006年1月开始，它吸引了世界各国的读者和投稿人.为了实现使数学变得更优雅，更激动人心这一个共同的目标，该杂志成功地鼓舞了具有不同文化背景的人们对数学的热情.

本书的读者对象是高中学生、数学竞赛的参与者、大学生，以及任何对数学拥有热情的人.许多问题的提出和解答，以及文章都来自于热情洋溢的读者，他们渴望创造性、经验，以及提高对数学思想的领悟.在出版本书时，我们特别注意对许多问题的解答和文章的校正与改进，以使读者能够享受到更多的学习乐趣.

这里的文章主要集中于主流课堂以外的令人感兴趣的问题.学生们通过学习正规的数学课堂教育范围之外的材料才能开阔视野.对于指导老师来讲，这些文章为其提供了一个超越传统课程内容范畴的机会，激起其对问题讨论的动力，通过极为珍贵的发现时刻指导学生.所有这些富有特色的问题都是原创的.为了让读者更容易接受这些材料，本书由具有解题能力的专家精心编撰.初级部分呈现的是入门问题(尽管未必容易).高级部分和奥林匹克部分是为国内和国际数学竞赛准备的，例如美国数学竞赛(USAMO)或者国际数学奥林匹克(IMO)竞赛.大学部分为高等学校学生提供了解线性代数、微积分或图论等范围内非传统问题的独有的方法.

没有忠实的读者和网上杂志的合作，本书的出版是看不到希望的．我们衷心感谢所有的读者，并对他们继续给予有力的支持表示感激之情．我们真诚希望各位能沿着他们的足迹，接过他们的接力棒，使该杂志给热忱的数学爱好者提供更多的机会，以及在未来出版既有创新精神，又有趣的作品的这一使命得到实现．

我们也要对 Maxim Ignatiuc 先生为收集稿件提供的帮助表示感谢．对 Gabriel Dospinescu，Cosmin Pohoata 和 Iven Borsenco 先生审阅本书表示十分感谢．特别要感谢的是 Richard Stong 先生对手稿多处做了改进．如果你有兴趣阅读该杂志，请登录：http://awesomemath. org/mathematical－reflections/．读者也可以将撰写的文章、提出的问题或给出的解答发送到邮箱：reflections@ awesomemath. org.

出售本书的收入，我们将用于维持未来几年杂志的运营．让我们共同分享本书中的问题和文章吧！

Titu Andreescu 博士

◎目录

1 问 题

1.1 初级问题

J145 求一切形如 $aaaabbbbb$,且能写成两个正整数的五次幂的和的九位数的个数.

J146 已知 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 是凸五边形,$X \in A_1A_2$,$Y \in A_2A_3$,$Z \in A_3A_4$,$U \in A_4A_5$,$V \in A_5A_1$,A_1Z,A_2U,A_3V,A_4X,A_5Y 相交于 P.

证明:$\frac{A_1X}{A_2X} \cdot \frac{A_2Y}{A_3Y} \cdot \frac{A_3Z}{A_4Z} \cdot \frac{A_4U}{A_5U} \cdot \frac{A_5V}{A_1V} = 1$.

J147 对于 $n \geqslant 1$,有 $a_0 = a_1 = 1$,$a_{n+1} = 1 + \frac{a_1^2}{a_0} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}$. 求 a_n 的一个通项.

J148 对于 $n \geqslant 2$,对每一个 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in (0,\pi)$,有 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \pi$,$\alpha_k \neq \frac{\pi}{2}$,以下等式成立:

$$\sum_{i=1}^{n} \tan \alpha_i = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \cot \alpha_i}{\prod\limits_{i=1}^{n} \cot \alpha_i}$$

求一切这样的 n.

J149 在四边形 $ABCD$ 中,$\angle A > 60°$. 证明:

$$AC^2 < 2(BC^2 + CD^2).$$

J150 设 n 是大于 2 的整数. 求一切实数 x,使$\{x\} \leqslant \{nx\}$,这里$\{a\}$ 是 a 的小数部分.

J151 设 $a \geqslant b \geqslant c > 0$. 证明:

$$(a-b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 1.$$

J152 设 $a,b,c > 0$. 证明以下不等式成立:

$$\frac{a+b}{a+b+2c} + \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{c+a}{c+a+2b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{13}{6}.$$

J153 求一切使 $n^2 + 2\ 010n$ 是完全平方数的整数 n.

J154 设 $MNPQ$ 是 $\triangle ABC$ 的内接矩形,$M,N \in BC$,$P \in AC$,$Q \in AB$. 证明:

$S_{MNPQ} \leqslant \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

J155 求 n 个连续整数的平方和是质数的一切 n.

J156 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个这样的函数:对一切实数 x 和一切 $y > 0$,$f(x) + f(x + y)$ 是有理数.证明:对一切实数 x,$f(x)$ 是有理数.

J157 求值:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 - 4^2 - 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 - 9^2 - 10^2 + \cdots - 2\ 010^2$$

这里是连续三个"+",接着是两个"-".

J158 设 n 是与 10 互质的正整数.证明:n^{20} 的百位数字是偶数.

J159 求使 $9n + 16$ 和 $16n + 9$ 是完全平方数的一切整数 n.

J160 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A = 90°$,设 d 是经过该三角形的内心 I 的直线,分别交 AB,AC 于 P,Q.求 $AP \cdot AQ$ 的最小值.

J161 设 a,b,c 是正实数,$a + b + c + 2 = abc$.求

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

的最小值.

J162 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数.证明:

$$\frac{a_1}{(1 + a_1)^2} + \frac{a_2}{(1 + a_1 + a_2)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(1 + a_1 + \cdots + a_n)^2} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{1 + a_1 + \cdots + a_n}.$$

J163 设 a,b,c 是非零实数,$ab + bc + ca \geqslant 0$.证明:

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

J164 如果 x 和 y 是正实数,并且 $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2\ 011$,求 $x + y$ 的最小值.

J165 求满足方程组

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) + \dfrac{z^2}{10} = 2\ 010 \\ (x + y)(xy - 1) + 14z = 1\ 985 \end{cases}$$

的整数三元组 (x,y,z).

J166 点 P 在 $\triangle ABC$ 内,设 d_a, d_b, d_c 是 P 到三边的距离.证明:

$$\frac{K}{d_a d_b d_c} \geqslant \frac{s}{2Rr}$$

其中 K 为点 P 的垂足三角形的面积,s,R,r 分别是 $\triangle ABC$ 的半周长、外接圆的半径和内切圆的半径.

J167 设 a,b,c 是大于 1 的实数,且

$$\frac{b+c}{a^2-1}+\frac{c+a}{b^2-1}+\frac{a+b}{c^2-1}\geqslant 1.$$

证明：

$$\left(\frac{bc+1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{ca+1}{b^2-1}\right)^2+\left(\frac{ab+1}{c^2-1}\right)^2\geqslant\frac{10}{3}.$$

J168　设 n 是正整数.求使方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=a\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a\end{cases}$$

没有整数解的最小正整数 a.

J169　如果 $x,y,z>0,x+y+z=1$.求

$$E(x,y,z)=\frac{xy}{x+y}+\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}$$

的最大值.

J170　在正五边形 $ABCDE$ 的内部考虑一点 M，使 $\triangle MDE$ 是等边三角形.求 $\triangle AMB$ 的各个内角.

J171　如果不同的字母表示不同的数，以下的加法是否可能正确？

$$\begin{array}{r} A\ X\ X\ X\ U\\ B\ X\ X\ V\\ C\ X\ X\ Y\\ +\quad D\ E\ X\ X\ Z\\ \hline X\ X\ X\ X\ X\end{array}$$

J172　设 P 是等边 $\triangle ABC$ 的内部一点，A',B',C' 分别是 AP,BP,CP 与边 BC,CA,AB 的交点.求使

$$A'B^2+B'C^2+C'A^2=AB'^2+BC'^2+CA'^2$$

的一切点 P.

J173　a 和 b 是有理数，且

$$|a|\leqslant\frac{47}{|a^2-3b^2|},|b|\leqslant\frac{52}{|b^2-3a^2|}.$$

证明：$a^2+b^2\leqslant 17$.

J174　$\triangle ABC$ 的内切圆分别与边 BC,CA,AB 切于 D,E,F.设 K 是边 BC 上的一点，M 是线段 AK 上的点，且 $AM=AE=AF$.设 L,N 分别表示 $\triangle ABK$ 和 $\triangle ACK$ 的内心.证明：当且仅当 $DLMN$ 是正方形时，K 是从 A 出发的高的垂足.

J175　设 $a,b\in(0,\frac{\pi}{2})$，且

$$\sin^2 a+\cos 2b\geqslant\frac{1}{2}\sec a,\sin^2 b+\cos 2a\geqslant\frac{1}{2}\sec b.$$

证明：$\cos^6 a+\cos^6 b\geqslant\frac{1}{2}$.

J176 求方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=1\\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{x_1x_2\cdots x_n}=n^3+1\end{cases}$$

的正实数解.

J177 设 x,y,z 是非负实数,且对某些正实数 a,b,c,有 $ax+by+cz\leqslant 3abc$. 证明:

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}+\sqrt{\frac{z+x}{2}}+\sqrt[4]{xyz}\leqslant\frac{1}{4}(abc+5a+5b+5c).$$

J178 求整数数列 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $(b_n)_{n\geqslant 0}$,对每一个 $n\geqslant 0$,有

$$(2+\sqrt{5})^n=a_n+b_n\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

J179 求方程组

$$\begin{cases}(x+y)(y^3-z^3)=3(z-x)(z^3+x^3)\\ (y+z)(z^3-x^3)=3(x-y)(x^3+y^3)\\ (z+x)(x^3-y^3)=3(y-z)(y^3+z^3)\end{cases}$$

的实数解.

J180 设 a,b,c,d 是不同的实数,且

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a-b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b-c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c-d}}+\frac{1}{\sqrt[3]{d-a}}\neq 0.$$

证明:$\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-d}+\sqrt[3]{d-a}\neq 0$.

J181 设 a,b,c,d 是正实数. 证明:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+\left(\frac{c+d}{2}\right)^3\leqslant\left(\frac{a^2+d^2}{a+d}\right)^3+\left(\frac{b^2+c^2}{b+c}\right)^3.$$

J182 圆 $C_1(O_1,r)$ 和 $C_2(O_2,R)$ 外切. 过 O_1 的切线切 C_2 于 A 和 B,过 O_2 的切线切 C_1 于 C 和 D. 设 $O_1A\cap O_2C=E$,$O_1B\cap O_2D=F$. 证明:$EF\cap O_1O_2=AD\cap BC$.

J183 设 x,y,z 是实数. 证明:

$$(x^2+y^2+z^2)^2+xyz(x+y+z)\geqslant\frac{2}{3}(xy+yz+zx)^2+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)^2.$$

J184 求满足方程组

$$x+y+z+w=xy+yz+zx+w^2-w=xyz-w^3=-1$$

的所有整数四元组 (w,x,y,z).

J185 设 $H(x,y)=\dfrac{2xy}{x+y}$ 是正实数 x,y 的调和平均. 对于 $n\geqslant 2$,求最大常数 C,对任何正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$,以下不等式成立:

$$\frac{C}{H(a_1+\cdots+a_n,b_1+\cdots+b_n)}\leqslant\frac{1}{H(a_1,b_1)}+\cdots+\frac{1}{H(a_n,b_n)}.$$

J186　设$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle C$是直角，$AC=3$，$BC=4$，中线AA_1交角平分线BB_1于O. 过点O的直线l交斜边AB于M，交AC于N. 证明：

$$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{NC}{NA}\leqslant\frac{4}{9}.$$

J187　设$m\geqslant 1$，$f:[m,\infty)\to[1,\infty)$，$f(x)=x^2-2mx^2+m^2+1$.

(1) 证明：f是双射.

(2) 解方程$f(x)=f^{-1}(x)$.

(3) 解方程$x^2-2mx^2+m^2+1=m+\sqrt{x-1}$.

J188　设a,b,c是正实数. 证明：

$$\frac{1}{10a+11b+11c}+\frac{1}{11a+10b+11c}+\frac{1}{11a+11b+10c}\leqslant\frac{1}{32a}+\frac{1}{32b}+\frac{1}{32c}.$$

J189　求所有质数q_1,q_2,q_3,q_4,q_5，使${q_1}^4+{q_2}^4+{q_3}^4+{q_4}^4+{q_5}^4$是两个连续偶数的积.

J190　点A',B',C'分别在$\triangle ABC$的边BC,CA,AB上，AA',BB',CC'共点于M，且

$$\frac{AM}{MA'}\cdot\frac{BM}{MB'}\cdot\frac{CM}{MC'}=2\ 011.$$

求$\frac{AM}{MA'}+\frac{BM}{MB'}+\frac{CM}{MC'}$的值.

J191　求一切正整数$n\geqslant 2$，使$(n-2)!+(n+2)!$是完全平方数.

J192　考虑锐角$\triangle ABC$. 设$X\in AB$，$Y\in AC$，使四边形$BXYC$是圆外接四边形，R_1,R_2,R_3分别是$\triangle AXY,\triangle BXY,\triangle ABC$的外接圆的半径. 证明：如果${R_1}^2+{R_2}^2={R_3}^2$，则$BC$是圆$(BXYC)$的直径.

J193　设正方形$ABCD$的中心为O. 过O平行于AD的直线交AB,CD于M,N，平行于AB的直线交AC于P. 证明：

$$OP^4+\left(\frac{MN}{2}\right)^4=MP^2\cdot NP^2.$$

J194　设a,b,c是$\triangle ABC$的边长，c是最大边. 证明：

$$\frac{ab(2c+a+b)}{(a+c)(b+c)}\leqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

J195　求一切质数p和q，使$pq-555p$和$pq+555q$都是完全平方数.

J196　设I是$\triangle ABC$的内心，A',B',C'是从顶点A,B,C出发的高的垂足. 证明：如果$IA'=IB'=IC'$，那么$\triangle ABC$是等边三角形.

J197　设x,y,z是正实数. 证明：

$$\sqrt{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)}$$

$$\geqslant x\sqrt{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+y\sqrt{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}+z\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

J198 求一切正整数组(x,y),使$x!+y!+3$是完全立方数.

J199 证明:存在无穷多对质数对(p,q),使p^6+q^4有差为$4pq$的两个正因子.

J200 设x,y,z是正实数,且$x\leqslant 2,y\leqslant 3,x+y+z=11$.证明:$xyz\leqslant 36$.

J201 已知$\triangle ABC$是等腰三角形,$AB=AC$.点D在AC上,$\angle CBD=3\angle ABD$.如果

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{BD}=\frac{1}{BC}.$$

求$\angle A$.

J202 设I是$\triangle ABC$的内心,A_1,B_1,C_1是I关于边BC,CA,AB的中点的对称点.如果I_a,I_b,I_c分别表示与边BC,CA,AB相切的旁切圆的圆心,证明:直线I_aA_1,I_bB_1,I_cC_1共点.

J203 在梯形$ABCD$中,$AB\parallel CD$,顶点A,B处的角是锐角,设E是A关于B的对称点.直线BC和过A,E的与以D为圆心,与AB相切的圆的两条切线共点于F.证明:当且仅当$AF+EF=4AB$时,BC平分线段EF.

J204 已知$\triangle ABC$的内心I,从A出发的高的垂足和BC边的中点,用直尺和圆规作$\triangle ABC$.

J205 求具有以下性质的最大的n位数$a_1a_2\cdots a_n$:

(1) 各位数字都不是零,且各不相同;

(2) 对于每一个$k=2,\cdots,n-1$,$\frac{1}{a_{k-1}},\frac{1}{a_k},\frac{1}{a_{k+1}}$是等差数列或等比数列.

J206 平面内有点A,B,C,X,Y,Z.证明:当且仅当$\triangle XBC,\triangle YCA,\triangle ZAB$的外心共线时,$\triangle AYZ,\triangle BZX,\triangle CXY$的外心共线.

J207 已知a,b是非负整数,求形如2^a5^b+1,且能被一个各位数字都不相同的数整除的最大的数.

J208 设K是$\triangle ABC$的对称中线的交点.R是外接圆的半径.证明:

$$AK+BK+CK\leqslant 3R.$$

译者注:对称中线指的是中线关于角平分线对称的西瓦线.可以证明三角形的三条对称中线共点.

J209 设a,b,c是正实数,$a+b+c=1$.证明:

$$\frac{(b+c)^5}{a}+\frac{(c+a)^5}{b}+\frac{(a+b)^5}{c}\geqslant\frac{32}{9}(bc+ca+ab).$$

J210 设P,Q是$\triangle ABC$所在平面内的点,且

$$\{AP,BP,CP\}=\{AQ,BQ,CQ\}.$$

证明:$PG = QG$,其中 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

J211　设 a,b,c 是正实数,$a^3+b^3+c^3=1$. 证明:

$$\frac{1}{a^5(b^2+c^2)^2}+\frac{1}{b^5(c^2+a^2)^2}+\frac{1}{c^5(a^2+b^2)^2}\geqslant\frac{81}{4}.$$

J212　求方程组

$$\begin{cases}(x-2y)(x-4z)=6\\(y-2z)(y-4x)=10\\(z-2x)(z-4y)=-16\end{cases}$$

的实数解.

J213　对于任何正整数 n,设 $S(n)$ 表示其十进制表示的各位数字的和. 证明:对于不能被 1 整除的一切正整数 n,使 $S(n)>S(n^2+2\ 012)$ 的 n 的集合是无穷集合.

J214　设 $a,b,c,d,e\in[1,2]$. 证明:

$$ab+bc+cd+de+ea\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2-e^2.$$

并求等号成立时,a,b,c,d,e 的值.

J215　证明:对于任何质数 $p>3$,$\frac{p^6-7}{3}+2p^2$ 都能写成两个完全立方数的和.

J216　设 ω 是一个圆,M 是圆外一点. 过 M 作直线 l_1,l_2,l_3 与 ω 相交,并考虑交点 $l_1\cap\omega=\{A_1,A_2\}$,$l_2\cap\omega=\{B_1,B_2\}$,$l_3\cap\omega=\{C_1,C_2\}$. 记 $P=A_1B_2\cap A_2B_1$,$Q=B_1C_2\cap B_2C_1$,R 是 PQ 与 ω 的交点之一. 证明:MR 与 ω 相切.

1.2　高级问题

S145　设 k 是正实数. 求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使对于一切 $x,y,z\in\mathbf{R}$,有

$$f(xy)+f(yz)+f(zx)-k(f(x)f(yz)+f(y)f(zx)+f(z)f(xy))\geqslant\frac{3}{4k}.$$

S146　在 $\triangle ABC$ 中,设 m_a,m_b,m_c 是 $\triangle ABC$ 的中线,k_a,k_b,k_c 是对称中线,r 是内切圆的半径,R 是外接圆的半径. 证明:

$$\frac{3R}{2r}\geqslant\frac{m_a}{k_a}+\frac{m_b}{k_b}+\frac{m_c}{k_c}\geqslant 3.$$

S147　设 $x_1,\cdots,x_n,a,b>0$. 证明以下不等式成立:

$$\frac{x_1^3}{(ax_1+bx_2)(ax_2+bx_1)}+\cdots+\frac{x_n^3}{(ax_n+bx_1)(ax_1+bx_n)}\geqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{(a+b)^2}.$$

S148　设 n 是正整数,a,b,c 是实数,且 $a^2b\geqslant c^2$. 求一切实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$,使

$$x_1y_1+\cdots+x_ny_n=\frac{a}{2},x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2+b(y_1{}^2+\cdots+y_n{}^2)=c.$$

S149 证明:在任意锐角 $\triangle ABC$ 中,

$$\frac{1}{2}(1+\frac{r}{R})^2-1\leqslant\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{r}{2R}(1-\frac{r}{R}).$$

S150 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是内接于圆 $C(O,R)$,外切于 $\omega(I,r)$ 的四边形. R_i 表示与 A_iA_{i+1} 相切,且与边 $A_{i-1}A_i$ 和 $A_{i+1}A_{i+2}$ 的延长线相切的圆的半径. 证明:和式 $R_1+R_2+R_3+R_4$ 与点 A_1,A_2,A_3,A_4 的位置无关.

S151 求实数三元组 (x,y,z),使

$$x^2+y^2+z^2+1=xy+yz+zx+|x-2y+z|.$$

S152 设 $k\geqslant 2$ 是整数,$m,n\geqslant 2$,m,n 互质. 证明:方程

$$x_1^m+x_2^m+\cdots+x_k^m=x_{k+1}^n$$

有无穷多组不同的正整数解.

S153 设 X 是凸四边形 $ABCD$ 的内点. P,Q,R,S 分别是 X 在边 AB,BC,CD,DA 上的正射影. 证明:当且仅当

$$QB\cdot BC+SD\cdot DA=\frac{1}{2}(AB^2+CD^2)$$

时,

$$PA\cdot AB+RC\cdot CD=\frac{1}{2}(AD^2+BC^2)$$

S154 设 $k\geqslant 2$ 是整数,$n_1,\cdots,n_k$ 是正整数. 证明:不存在有理数 $x_1,x_2,\cdots,x_k,y_1,y_2,\cdots,y_k$,使

$$(x_1+y_1\sqrt{2})^{2n_1}+\cdots+(x_k+y_k\sqrt{2})^{2n_k}=5+4\sqrt{2}$$

S155 设 a,b,c,d 是复数,对应于凸四边形 $ABCD$ 的顶点. 已知 $a\bar{c}=\bar{a}c$,$b\bar{d}=\bar{b}d$,$a+b+c+d=0$. 证明:$ABCD$ 是平行四边形.

S156 设 $f:\mathbf{N}\to[0,\infty)$ 是满足以下条件的函数:

(1) $f(100)=10$;

(2) 对一切非负整数 n,有

$$\frac{1}{f(0)+f(1)}+\frac{1}{f(1)+f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(n)+f(n+1)}=f(n+1).$$

求 $f(n)$ 的通项.

S157 设 ABC 是三角形. 求在直线 BC 上的点 X 的轨迹,使

$$AB^2+AC^2=2(AX^2+BX^2).$$

S158 是否存在这样的整数 n,使 $n+8$,$8n-27$ 和 $27n-1$ 中恰好有两个是完全立方数.

S159 在 $\triangle ABC$ 中,直线 AA',BB',CC' 共点于 P,其中 A',B',C' 分别在边 BC,

CA，AB 上. 考虑分别在线段 $B'C'$，$C'A'$，$A'B'$ 上的点 A''，B''，C''. 证明：当且仅当 $A'A''$，$B'B''$，$C'C''$ 共点时，AA''，BB''，CC'' 共点.

S160 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B \geqslant 2\angle C$. 设 D 是从 A 出发的高的垂足，M 是 BC 的中点. 证明：

$$DM \geqslant \frac{AB}{2}.$$

S161 设锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆心为 O，半径为 R 的圆. 如果 d_a，d_b，d_c 是 O 到三角形的各边的距离. 证明：

$$R^3-(d_a^2+d_b^2+d_c^2)R-2d_ad_bd_c=0.$$

S162 Alice 有一架最小量程为克的天平. 第 n 步她从一块大的薄片中切出一块边长为 n 的正方形的薄片，然后放到天平的两个秤盘中的一个. 边长为 1 的正方形薄片的质量是 1 克.

(1) 证明：对于每一个整数 g，Alice 把正方形的薄片放在秤盘上，经过若干步以后，可以使两个秤盘上的薄片的总质量之差是 g 克.

(2) 求使得两个秤盘中的薄片的总质量之差是 2 010 克的最少的步数.

S163 (1) 证明：对于每一个正整数 n，存在唯一的正整数 a_n，使

$$(1+\sqrt{5})^n=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_n+4^n}.$$

(2) 当 n 是偶数时，证明：a_n 能被 $5\cdot 4^{n-1}$ 整除，并求出商.

S164 设 $ABCD$ 是对角线互相垂直的圆内接四边形. 对于外接圆上的点 P，设 l_P 是过点 P 的圆的切线. 设 $U=l_A\cap l_B$，$V=l_B\cap l_C$，$W=l_C\cap l_D$，$K=l_D\cap l_A$. 证明：四边形 $UVWK$ 是圆内接四边形.

S165 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心. 证明：

$$AI\cdot BI\cdot CI\geqslant 8r^3$$

其中 r 是 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径.

S166 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in(1,0)$，$k$，$n$ 是整数，$k>n\geqslant 1$，证明以下不等式成立：

$$\min\{a_1(1-a_2)^n,a_2(1-a_3)^n,\cdots,a_k(1-a_1)^n\}\leqslant\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

S167 设 I_a 是 $\triangle ABC$ 的与边 BC 相切的旁切圆的圆心. A'，B'，C' 分别是旁切圆与边 BC，CA，AB 的切点. 证明：$\triangle AI_aA'$，$\triangle BI_aB'$，$\triangle CI_aC'$ 的外接圆有一个不同于点 I_a 的公共点，且该公共点位于直线 G_aI_a 上，这里 G_a 是 $A'B'C'$ 的重心.

S168 设 $a_0\geqslant 2$，$a_{n+1}={a_n}^2-a_n+1$，$n\geqslant 0$. 证明：

$$\log_{a_0}(a_n-1)\log_{a_1}(a_n-1)\cdots\log_{a_{n-1}}(a_n-1)\geqslant n^n.$$

S169 设 $k>1$ 是奇数，且对某些正整数 a,b,c,d，$\{a,b\}\neq\{c,d\}$，有 $a^k+b^k=c^k+d^k$. 证明：$\dfrac{a^k+b^k}{a+b}$ 不是质数.