线性代数

LINEAR ALGEBRA

主　编　杨晓叶

副主编　郑庆云　宋一杰　孙国卿　丁　纺

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等院校本科数学教材

线性代数

杨晓叶　主编

郑庆云　宋一杰　孙国卿　丁　纺　副主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书为高等院校公共基础课教材，共6章，主要介绍了线性代数理论的经典内容，包括行列式、矩阵、n维向量及向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量及二次型，并在各章末给出了本章内容的相关简史和应用实例，有利于读者掌握线性代数各章的知识. 各章均有习题，书末附习题参考答案.

本书参考学时48学时.

本书可作为高等院校本科生教材和教学参考书，也可供相关人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨晓叶主编. —天津：天津大学出版社，2018. 1

ISBN 978-7-5618-6069-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第020617号

出版发行 天津大学出版社
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 publish. tju. edu. cn
印　　刷 天津泰宇印务有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm × 260mm
印　　张 15
字　　数 372千
版　　次 2018年1月第1版
印　　次 2018年1月第1次
定　　价 38.00元

前　言

线性代数是普通高等院校理工类和经管类专业的一门重要的基础数学课程，具有较强的逻辑性、抽象性，在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域中有着广泛的应用.

本书依据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新修订的《大学数学课程教学基本要求》(2014 年版)编写而成，以有利于满足高校应用型人才培养为目标，以深化教学改革、提高教学质量为前提，同时结合了编者多年教学工作中积累的体会和经验. 本书可作为普通高等学校非数学专业、高等职业教育、成人高等教育线性代数课程教材使用，也可供专业科技人员阅读和参考.

针对本书面向的应用型本科学生，考虑到各专业教学的特点和基本要求，我们在编写过程中力图使本教材体现以下主要特点.

1. 在保证科学性的前提下，充分考虑到高等教育大众化的新形势，按照由浅入深、循序渐进的原则，以矩阵为主线展开全部内容，在熟练掌握矩阵的各种运算和性质后，利用矩阵这一有利工具对后面各章中的问题进行讨论.

2. 突出线性代数的基本理论、基本概念和基本方法，在重要概念引入时尽可能做到简明、自然和浅显. 对线性代数课程中比较抽象的内容，不作过高的要求，并省略了部分较难的定理证明过程. 书中标“ * ”号的内容可供学有余力者作为课外阅读和复习提高之用. 这部分内容可以不讲.

3. 注重培养学生的实际应用能力. 每一章均设数学简史和应用实例，让读者充分了解线性代数的发展史，并通过应用实例让读者了解线性代数作为一门基础学科在各个领域中的广泛应用.

4. 考虑到硕士研究生入学考试对线性代数的要求，本书每一章的习题均分为两部分，A 组题为基本要求题型，B 组题为近 10 年考研试题. 书后附有习题参考答案.

本书由杨晓叶主编并负责统筹定稿，其中第 1 章由孙国卿执笔，第 2 章和第 6 章由杨晓叶执笔，第 3 章由郑庆云执笔，第 4 章由丁纺执笔，第 5 章由宋一杰执笔.

在本书的编写过程中，得到天津大学仁爱学院数学部领导的大力支持，同时也得到数学部同人的热情帮助，各位同人对本书的编写提出了宝贵的意见和建议，在此，谨向他们表示诚挚的感谢．同时也对辛勤编辑此书的天津大学出版社的编辑及关心支持本书出版的有关同志致以深深的谢意．

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者和各位同行批评指正．

编者

2017年8月

目　　录

第1章　行列式

行列式概念的建立源于求解线性方程组，它作为一个重要的数学基本工具，在数学学科及其他众多科学领域，如经济、管理、信息系统等都有着广泛的应用. 本章主要介绍行列式的定义、性质、计算方法以及用行列式解线性方程组的克拉默法则.

1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

在中学数学中，利用消元法可以求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘方程组(1)中两个方程式的两端，然后两个方程式相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

设 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则求得方程组(1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

这个形式的解不好记忆，应用时也不方便. 因此，引入新的符号来表示这个结果，这就是行列式的起源.

定义 1.1　由 4 个数排成两行两列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{2}$$

称表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为由数表(2)所确定的二阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中数 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式的元素，i 称为行标，j 称为列标，表示 a_{ij} 位于第 i 行第 j 列. 从行列式的左上角到右下角的连线称为行列式的主对角线；从右上角到左下角的连线称为行列式的副对角线.

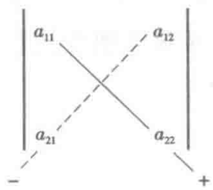

图 1-1

从上述定义可知，二阶行列式是这样两项的代数和：一项是主对角线上两个元素的乘积，取正号；另一项是副对角线上两个元素的乘积，取负号. 二阶行列式的上述计算方法称为对角线法则（如图 1-1 所示）.

根据定义，容易得知方程组(1)的解中的两个分子可分别写成

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时，方程组(1)的解可用下述公式表示

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

分析线性方程组所引出的二阶行列式可以发现，行列式 D 是由方程组(1)未知量的系数所构成的，故此行列式又称为方程组(1)的系数行列式. 而 D_1, D_2 是由常数项 b_1, b_2 排成的列分别替换系数行列式 D 的第 1 列和第 2 列所得的行列式.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 3x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times 3 = -4 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times (-1) - 1 \times 3 = -8,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 5 \times 3 = -12,$$

因此，方程组的解是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-8}{-4} = 2,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-12}{-4} = 3.$$

1.1.2 三阶行列式

与二元线性方程组类似,考虑三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{3}$$

的解,给出三阶行列式的定义.

定义 1.2 设由 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{4}$$

称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

为数表(4)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号,图 1-2 给出计算三阶行列式的对角线法则. 图中有三条实线和三条虚线,每条实线所连的三个元素的乘积取正号,每条虚线所连的三个元素的乘积取负号.

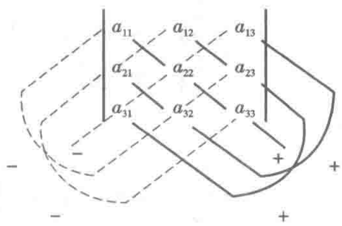

图 1-2

注 行列式的对角线法则只适用于二、三阶行列式.

类似于解二元线性方程组(1),若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

当 $D \neq 0$ 时,方程组(3)的解可简单地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 2 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\times1\times2+1\times4\times(-1)+1\times0\times0-$$

$$2\times4\times0-1\times0\times2-1\times1\times(-1)=1.$$

例 3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ x_3=1, \\ 3x_1+\qquad\ \ 4x_3=1, \\ 2x_1+\ \ x_2+3x_3=4. \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3\neq0,\quad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=23,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}=-4,\qquad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-18.$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{23}{3},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{4}{3},\ x_3=\frac{D_3}{D}=6.$$

例 4 求解方程

$$f(x)=\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0.$$

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=3x^2-x^2-4x=2x^2-4x=2x(x-2)=0,$$

所以方程的解为 $x_1=0, x_2=2$.

1.2 n 阶行列式

为了引入 n 阶行列式的概念,先介绍排列和逆序数的有关知识.

1.2.1 排列及逆序数

定义 1.3 由 n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组,称为一个 n 级排列,记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如,4312 是一个 4 级排列,54321 是一个 5 级排列.

所有 3 级排列为 123,132,213,231,312,321,共 $3!=6$ 个,不难看出 n 级排列共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$个.

排列 $12\cdots n$ 是按数字由小到大的自然顺序组成的一个排列,称其为自然排列或标准排列.

定义 1.4 在一个 n 级排列中,如果一个较大的数排在一个较小的数前面,则称这两个数构成一个逆序,即在排列 $i_1i_2\cdots i_j\cdots i_k\cdots i_n$ 中,若 $j<k$,而 $i_j>i_k$,则称 i_j与 i_k构成一个逆序. 一个排列逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例 1 确定下列排列的逆序数:

(1)34251; (2)$n(n-1)\cdots21$.

解 (1)$\tau(34251)=4+0+2+0=6$;

(2)$\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

容易看出,自然排列的逆序数为 0,为偶排列. 而在所有的 n 级排列中,奇偶排列各占一半.

1.2.2 排列的性质

定义 1.5 将一个排列中某两个数的位置互换,而其余数不动,就得到另一个排列,这样的变换称为一次对换.

例如,排列 15432 经过 1,2 两个数对换变成排列 25431,而 $\tau(15432)=6$,$\tau(25431)=7$,这表明偶排列 15432 经过一次对换后得到奇排列 25431. 此结果具有一般性.

定理 1.1 排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证 (1)先证明相邻对换的情形.

设排列

$$i_1\cdots i_ki_{k+1}\cdots i_n,$$

经过 i_k,i_{k+1}对换后变成排列

$$i_1\cdots i_{k+1}i_k\cdots i_n.$$

显然在对换前后的两个排列中,i_k,i_{k+1}与其他数以及其他数之间构成的逆序数不变,当 $i_k<i_{k+1}$时,对换后逆序数增加 1,而当 $i_k>i_{k+1}$时,对换后逆序数减少 1. 所以对换排列中两个相邻的数,排列的奇偶性改变.

(2) 再证明一般情形. 对换的两个数 i_k 和 i_j 之间有 s 个数, 即设排列为

$$i_1 i_2 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_{k+s} i_j \cdots i_n, \tag{1}$$

经过 i_k 与 i_j 对换, 变为排列

$$i_1 i_2 \cdots i_j i_{k+1} \cdots i_{k+s} i_k \cdots i_n. \tag{2}$$

从排列(1)变成排列(2)可通过一系列相邻对换实现, 先将排列(1)中的 i_j 与左边 $s+1$ 个数 $i_{k+s}, i_{k+s-1}, \cdots, i_{k+1}, i_k$ 进行对换. 排列(1)变成排列

$$i_1 i_2 \cdots i_j i_k i_{k+1} \cdots i_{k+s} \cdots i_n. \tag{3}$$

再将排列(3)中的 i_k 依次与右边的 s 个数 $i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_{k+s}$ 进行对换, 排列(3)变成排列(2), 于是 i_k 与 i_j 的对换可通过 $2s+1$ 次相邻对换来实现, 而每经过一次相邻对换都改变排列的奇偶性, 奇数次相邻对换必改变排列的奇偶性.

定理 1.2 任一 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 均可通过有限次对换变为自然排列, 且所作对换次数与排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

***证** 用数学归纳法证明.

定理结论对 1 级排列显然成立.

假设定理结论对 $n-1$ 级排列成立, 现在证明结论对 n 级排列也成立.

若 $i_n = n$, 则根据假设 $n-1$ 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1}$ 可通过一系列对换变成自然排列 $12\cdots(n-1)$, 这等同于将 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 变成 $12\cdots n$.

若 $i_n \neq n$, 则先将 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中的 i_n 与 n 进行对换, 于是将问题归结为上面讨论的情形, 在此情形下命题亦成立.

同样 $12\cdots n$ 也可以通过一系列对换变成 $i_1 i_2 \cdots i_n$. 因为 $12\cdots n$ 是偶排列, 根据定理 1.2, 所作对换的次数与 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

1.2.3 n 阶行列式

明确了排列和逆序数的概念, 下面来总结三阶行列式的特征, 进而给出 n 阶行列式的定义.

三阶行列式定义式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以从中发现以下规律: ①三阶行列式是 3! 项的代数和; 每一项都是取自行列式不同行不同列的三个元素的乘积; ②当代数和中每一项的行标所组成的排列是自然排列时, 每一项的正负号由列标所组成排列的奇偶性决定, 偶排列取正号, 奇排列取负号.

因此三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三级排列求和.

将上述定义推广到 n 阶行列式的情形,就得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.6 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示 $n!$ 项的代数和,其中每一项都是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$($j_1j_2\cdots j_n$ 为任意 n 级排列). 各项的符号是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

n 阶行列式简记为 $\det(a_{ij})$ 或 D,于是得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

当 $n=1$ 时,规定 $|a|=a$;当 $n=2,3$ 时,就是前述二、三阶行列式的定义.

例 2 在五阶行列式中,$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55}$ 这一项应取什么符号?

解 这一项各元素的行标是按自然顺序排列的,而列标的排列为 23415. 因为 $\tau(23415)=3$,故这一项应取负号.

例 3 写出四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中带负号且包含因子 $a_{21}a_{34}$ 的项.

解 包含因子 $a_{21}a_{34}$ 项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{21}a_{34}a_{4j_4},$$

按定义,j_1, j_4 可取 2,3 或 3,2,因此包含因子 $a_{21}a_{34}$ 的项只能是 $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ 或 $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$,但因 $\tau(2143)=2$ 为偶数,$\tau(3142)=3$ 为奇数,所以此项只能是 $-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$.

下面利用 n 阶行列式的定义计算一些特殊的行列式.

例 4 计算上三角形行列式(主对角线以下的元素都为 0 的行列式)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式的定义

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

n 阶行列式有 $n!$ 项,但由于 D 中有许多元素为 0,因此只需考虑不为零的项. 第 n 行元素除 a_{nn} 可能不为零外,其余元素均为 0,所以只需考虑 $j_n=n$ 的项;在第 $n-1$ 行中,除 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 可能不为零外,其余元素均为 0,又由于 $a_{n-1,n}$ 与 a_{nn} 位于同一列,所以只能取 $j_{n-1}=n-1$. 以此类推,不难发现,在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项可能不为零. 由于 $\tau(12\cdots n)=0$,故此项取正号. 于是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{12\cdots n}(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可求得下三角形行列式(主对角线以上元素都为 0 的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角形行列式与下三角形行列式统称为三角形行列式,其值均等于主对角线上各元素的乘积.

特别地,对角形行列式(除主对角线上的元素外,其余元素都为 0 的行列式)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

显然对角形行列式是特殊的三角形行列式,它可以简记为

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix},$$

这是一种简略写法,其中未写出的元素均为 0.

例 5 计算行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 6 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & x \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix},$$

求 x^4的系数.

解 由 n 阶行列式的定义知，$f(x)$是一个关于 x 的多项式函数，且最高次幂为 x^4，显然含 x^4的项只有$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$一项，即

$$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -2x\cdot x\cdot x\cdot 2x = -4x^4,$$

所以 x^4的系数为 -4.

例 7 确定四阶行列式中的项 $a_{21}a_{32}a_{43}a_{14}$所带的符号.

解 为了确定 $a_{21}a_{32}a_{43}a_{14}$的正负号，利用乘法的可交换性，把这 4 个元素的行标排成自然排列，有

$$a_{21}a_{32}a_{43}a_{14} = a_{14}a_{21}a_{32}a_{43},$$

列标构成排列的逆序数为 $\tau(4123)=3$，所以该项带负号.

利用乘法的可交换性，可以把 n 阶行列式定义中任一项的列标构成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$经过 m 次对换变成自然排列，同时相应的行标构成的自然排列也经过 m 次对换变成排列 $i_1i_2\cdots i_n$. 于是有

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

根据定理 1.2，$j_1j_2\cdots j_n$与 $i_1i_2\cdots i_n$具有相同的奇偶性. 于是

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

从而得到行列式的等价定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

这里$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$表示对所有 n 级排列求和.

1.3 行列式的性质

直接利用行列式的定义计算行列式只适用于某些特殊的行列式,当行列式的阶数较高时,计算量是相当大的. 为此,本节将介绍行列式的一些重要性质,利用这些性质不仅能把复杂的行列式转化为较简单的行列式(如三角形行列式等)来计算,而且在理论研究上也相当重要.

1.3.1 转置行列式

定义 1.7 将行列式 D 的行换成同序数的列得到的行列式称为原行列式 D 的转置行列式,记作 D^{T}或 D'. 即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然,行列式 D 与转置行列式 D^{T}有以下关系:

(1) D 与 D^{T}主对角线上的元素相同,都是 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$;

(2) D 中第 i 行第 j 列的元素 a_{ij}是 D^{T}中第 j 行第 i 列的元素;

(3) D 与 D^{T}互为转置行列式.

1.3.2 行列式的性质

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T}相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 将 D^{T}记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 将 D^{T}按行列式定义展开,有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \\ &= D. \end{aligned}$$

此性质表明,行列式中行与列的地位是平等的. 因此下面对行成立的性质,对列也同样