

PHYSICS

国际物理奥赛的 培训与选拔

(第二版)

郑永令 主编



复旦大学出版社



国际物理奥赛的 培训与选拔

(第二版)

主 编	郑永令		
编 著	郑永令	陆申龙	方小敏
	李洪芳	钟万蘅	王炎森

图书在版编目(CIP)数据

国际物理奥赛的培训与选拔/郑永令主编. —2版. —上海:复旦大学出版社,2016.1
ISBN 978-7-309-11966-4

I. 国… II. 郑… III. 中学物理课-竞赛题 IV. G634.75

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第275929号

国际物理奥赛的培训与选拔(第二版)

郑永令 主编

责任编辑/梁 玲

复旦大学出版社有限公司出版发行

上海市国权路579号 邮编:200433

网址:fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853

外埠邮购:86-21-65109143

大丰市科星印刷有限责任公司

开本 787×1092 1/16 印张 28.75 字数 789千

2016年1月第2版第1次印刷

ISBN 978-7-309-11966-4/G·1554

定价:59.00元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社有限公司发行部调换。

版权所有 侵权必究

再版前言

本书自出版以来,受到广大读者、特别是有志于参加全国或国际物理竞赛的众多学生和有关老师的欢迎。值此再版之际,我谨代表本书作者及出版社向他们表示衷心的感谢!

广大读者在对本书表示欢迎的同时,也对本书提出了许多宝贵的意见。这也正是本书进行再版的缘由。在本书再版时,在考虑了这些意见的基础上,我们主要在以下两方面作了一些修改:

(1) 为适应国内竞赛的需要,在内容上作了充实与改进,增选了一些符合国内竞赛大纲内容的题目。尽管这些题目所涉内容的级别低于国际竞赛大纲,但求解它们所需思维的深度与广度并不亚于国际竞赛试题的求解。所增选部分的内容,仍由相关部分的原作者完成。

(2) 对编排格式作了调整。将原来按题目、提示、解答与点评的次序来编排的方式改为按内容(力、热、电、光、原)的次序编排,将每题的题目、提示、解答与点评集中在一起,使读者阅读起来更为方便。实验部分的编排方式不变。

对于复旦大学出版社对本书再版工作所给予的大力支持深表谢意。再版后本书存在的错误与不足,敬请读者批评与指正。

郑永令

2015 年 12 月

前 言

受中国科协和中国物理学会的委托,自 2000 年至 2003 年四年间,复旦大学承担国际物理奥林匹克竞赛中国参赛队的组建和参赛任务.本书就是根据具体担任此项工作的老师们在此期间所积累的资料基础上整理、修订而成的.

由于国际物理奥赛的大纲(见本书附录 A)比我国现行高中物理教学大纲和全国中学生物理竞赛大纲高出许多,故在组队参赛前需对队员进行短时间的培训.培训对象是前一年全国中学生物理竞赛决赛的优胜者,培训内容大体上相当于大学普通物理(包括理论和实验两部分).在短期培训基础上,经若干次选拔考试,从中筛选出优胜者五人组成当年参加国际奥赛的国家队,另选出八人(可与上述五人重复)组成当年参加亚洲奥赛的国家队.自 1986 年以来,我国已参加了近二十届国际物理奥赛(及六届亚洲奥赛),均取得优异成绩,在众多参赛队中一直名列前茅.

本书是我们在培训和选拔过程中给学生做的练习题和选拔考试题.在这次整理过程中,又根据当前情况进行了适当的增删.全书分为理论和实验两篇,各篇又按内容依次编排.理论篇采用将题目、提示、题解分开形式,以利读者自学.在某些题目的题解的最后,还对该题作出点评,内容包括对该题所涉及的物理内容、解题方法及所得结果所具有的意义、题目的物理背景等,对读者颇有启发作用.由于本书题目主要用作培训,题目的难度有多种层次,因而本书不仅可供有志于参加国际物理奥赛的中学生阅读,也可供广大参加全国物理竞赛的中学生阅读.而且,对正在学习普通物理及准备报考研究生的大学生也很有参考价值.

本书力学部分(含相对论)由方小敏编写,热学与分子物理学部分由李洪芳编写,电磁学部分和光学部分由郑永令编写,原子物理学部分由钟万衡、王炎森编写,实验部分由陆申龙编写.全书由郑永令协调、统稿.

本书对数学的要求遵循国际物理奥赛大纲,除初等数学外,只涉及微积分和简单微分方程、矢量代数和矢量微分(不包括矢量分析).

复旦大学出版社对本书的出版给予了大力支持,在此表示衷心感谢.

限于作者水平,错误和不妥之处在所难免,敬请广大读者和同仁指正.

郑永令

2005 年 10 月

目 录

前言	1
----------	---

理 论 篇

第 1 章 力学(含相对论)	2
第 2 章 热学	119
第 3 章 电磁学	164
第 4 章 光学	232
第 5 章 原子物理学	257

实 验 篇

第 6 章 力学实验和热学实验	278
第 7 章 电磁学实验	314
第 8 章 光学实验	346

附 录

附录 A	372
国际物理奥林匹克竞赛大纲	372
第 31 届国际物理奥林匹克竞赛试题与解答	376
第 32 届国际物理奥林匹克竞赛试题与解答	389
第 33 届国际物理奥林匹克竞赛试题与解答	402
第 34 届国际物理奥林匹克竞赛试题与解答	420
附录 B	445
基本物理常量	445
太阳系天文数据	446
物理常用数据	446
三角公式	447
微积分公式	448
近似公式	450

理论篇

LI LUN PIAN



第1章 力 学

例题 1.01 在与高度为 h 的高墙相距 d 处,从地面将一小球抛过墙,试求所需的最小初速度 $v_{0\min}$ 及相应的抛射角 θ .

【提示】 先求得小球能到达墙顶的初速度 v_0 与抛射角 θ 的函数关系,然后再求 v_0 的极小值.

【题解】 解法 1 取抛出点为坐标系原点,取水平方向和竖直方向分别为 x 轴和 y 轴的方向. 与小球以最小初速度抛过墙所对应的轨迹必是与墙顶端相切的抛物线. 当小球到达墙顶端时,有

$$\begin{cases} d = v_0 \cos \theta t \\ h = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (1)$$

由(1),(2)式消去 t 可得

$$h = d \tan \theta - \frac{g d^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (2)$$

(3)式可表示为

$$v_0^2 = \frac{g d^2}{2 \cos \theta (d \sin \theta - h \cos \theta)} \quad (3)$$

由(4)式可知,要求 v_0 的最小值,只需求上式分母的最大值. 上式分母可化为

$$2 \cos \theta (d \sin \theta - h \cos \theta) = 2 \cos \theta \sqrt{d^2 + h^2} \sin(\theta - \alpha) = \sqrt{d^2 + h^2} [\sin(2\theta - \alpha) - \sin \alpha]$$

上式中 α 为抛出点和墙顶点的连线与水平线的夹角,如图所示. 由上式可知,当 θ 满足 $2\theta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ 时, (4) 式分母值最大, 即 v_0^2 的值最小, v_0^2 的最小值为

$$v_{0\min}^2 = \frac{g d^2}{\sqrt{d^2 + h^2} (1 - \sin \alpha)} = \frac{g d^2}{\sqrt{d^2 + h^2} - h} = g(\sqrt{d^2 + h^2} + h)$$

即当抛射角 $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \frac{h}{d}$ 时, 小球抛过墙的初速度为最小, 最小值

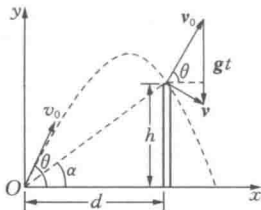
为 $v_{0\min} = \sqrt{g(\sqrt{d^2 + h^2} + h)}$.

解法 2 当小球抛到墙顶端时, 小球速度 v 与初速度 v_0 之间的关系为 $v = v_0 + gt$, 可画出满足此方程的矢量三角形, 如图所示. 此三角形的面积

$$S = \frac{1}{2} g t v_0 \cos \theta = \frac{1}{2} g d \quad (4)$$

(5) 式表明: 无论以多大初速度 v_0 、多大抛射角 θ 抛出小球, 只要小球从墙顶切过, 在相切点小球速度矢量三角形的面积是恒定的. 由于 $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$, 可见最小的 v_0 对应于最小的 v . 由几何知识可知: 只有在 v 与 v_0 的方向相互垂直时, 所需的 v_0 与 v 为最小, 此时有

$$S = \frac{1}{2} v_0 v = \frac{1}{2} v_0 \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad (5)$$



题解 1.01 图

由(5),(6)式可得 $v_0\sqrt{v_0^2 - 2gh} = gd$, 即 $(v_0^2)^2 - 2gh(v_0^2) - g^2d^2 = 0$, 可解得 $v_{0\min}^2 = g(\sqrt{d^2 + h^2} + h)$.

由速度矢量三角形可得

$$v_0 \cos \theta = v \sin \theta = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \sin \theta$$

将 $v_0^2 = g(\sqrt{d^2 + h^2} + h)$ 代入上式, 可得

$$\tan \theta = \frac{h + \sqrt{d^2 + h^2}}{d}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \frac{h}{d}$$

【点评】 与以最小初速度抛过墙相对应的抛物线是什么形状的? 是最高点在墙的顶端, 还是在墙的前方或后方? 由本题的第2种解法可知: 在墙顶端处小球的 $\mathbf{v}$ 应与 $\mathbf{v}_0$ 垂直, 因此必定是最高点在墙的前方, 而不是其余两种.

第2种解法是把物理问题与几何问题结合起来, 从另一个视角来分析问题, 从而使问题的求解较为简洁.

例 1.02 将小球从地面抛过两堵高均为 h 、间距为 d 的平行墙, 试求所需的最小初速度、相应的抛射角及抛出点与邻近墙之间的距离.

【提示】 把小球在墙顶上方的运动作为一独立的斜抛运动, 然后再把墙顶上方的运动与墙顶下方的运动联系起来.

【题解】 与以最小初速度抛过 A, B 两堵墙相对应的抛物线, 必是与 A 墙顶相切的, 如图所示. 设当小球到达 A 墙顶时的速度为 v , 与水平线的夹角为 α , 相当于小球从 A 墙顶端以速度 v 、抛射角 α 被抛出. 只要能抛到 B 墙顶端, 即从 B 墙顶端切过, 就可抛过此两堵墙. 由抛物运动射程公式, 有

$$\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = d \quad (1)$$

从此式可知, 当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 所需的 v 最小,

$$v_{\min} = \sqrt{gd} \quad (2)$$

由(2)式及机械能守恒, 即可求得抛过两堵墙所需的最小初速度 $v_{0\min}$ 为

$$v_{0\min} = \sqrt{v_{\min}^2 + 2gh} = \sqrt{g(d + 2h)} \quad (3)$$

设小球抛出点与 A 墙的距离为 l , 抛射角为 θ , 则有 $v_0 \cos \theta = v \cos \alpha$, 即

$$\cos \theta = \frac{v}{v_0} \cos \alpha \quad (4)$$

将 $v_0 = v_{0\min} = \sqrt{g(d + 2h)}$, $v = v_{\min} = \sqrt{gd}$ 及 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 代入(4)式, 可得

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{d}{2(d + 2h)}}$$

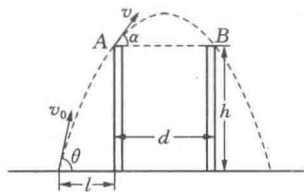
另有

$$\begin{cases} v_0 \cos \theta t = l \\ v_0 \sin \theta - gt = v \sin \alpha \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

由(5)和(6)式消去 t , 并将(2),(3),(4)式及 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 代入, 可得

$$l = \frac{1}{2}(\sqrt{d(d + 4h)} - d)$$



题解 1.02 图

【点评】 本题与例题 1.01 看上去很相似,但由于抛出点不受限制,故求解方法应完全不同.本题的解题关键,是把小球在两墙顶间的运动与墙两侧的运动分开讨论,再从它们之间的联系来求解.

例题 1.03 炮从掩蔽所下向外发射炮弹,掩蔽所的顶是与水平面成 α 角的斜面,炮位 O 与掩蔽所顶点 P 相距 l ,如图所示,炮弹发射的初速度为 v_0 ,试求炮弹的最远射程.

【提示】 讨论炮弹飞行轨道与掩蔽所相切的条件.

【题解】 以 O 点为坐标系原点,取平行于掩蔽所顶的方向为 x 轴方向、垂直于掩蔽所顶的方向为 y 轴方向,如图所示.在此坐标系中,炮弹运动在 y 方向的初速度和加速度分别为

$$v_{0y} = v_0 \sin(\theta - \alpha), \quad a_y = -g \cos \alpha$$

若炮弹运动轨道与掩蔽所相切,则相切点 A 的 y 坐标值为

$$y_A = h = l \sin \alpha = \frac{v_{0y}^2}{-2a_y} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta - \alpha)}{2g \cos \alpha}$$

则有

$$v_0^2 \sin^2(\theta - \alpha) = gl \sin 2\alpha \quad (1)$$

由(1)式可作以下讨论:

(1) 若 $v_0 < \sqrt{gl \sin 2\alpha}$, 则炮弹的轨道不可能与掩蔽所顶相切,

故只要取 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 炮弹就可获最大射程 $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

(2) 若 $v_0 \geq \sqrt{gl \sin 2\alpha}$, 由(1)式可知,炮弹发射角 θ 取以下值时,其轨道与掩蔽所顶相切:

$$\theta = \alpha + \arcsin \frac{\sqrt{gl \sin 2\alpha}}{v_0} \quad (2)$$

(i) 若(2)式表示的 $\theta \geq \frac{\pi}{4}$, 即 $v_0 \leq \sqrt{\frac{2gl \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}}$, 则只要取 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 炮弹就可获最大射程 $L_{\max} =$

$$\frac{v_0^2}{g}$$

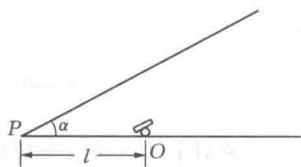
(ii) 若 $\theta < \frac{\pi}{4}$, 即 $v_0 > \sqrt{\frac{2gl \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}}$, 则炮弹的发射角取 $\theta = \alpha + \arcsin \frac{\sqrt{gl \sin 2\alpha}}{v_0}$, 炮弹可获最大射程

$$L_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\left(\alpha + \arcsin \frac{\sqrt{gl \sin 2\alpha}}{v_0}\right)}{g}$$

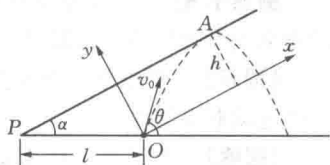
【点评】 本题是求以恒定初速度射出的炮弹所获最大的射程,如无任何限制,也不考虑空气阻力的影响,只需将炮弹以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 的仰角射出,即可获最大射程.由于本题有了掩蔽所的存在,讨论炮弹在飞行中是否会与掩蔽所的顶相碰及其相应的条件,是极其必要的.此外,在求得炮弹轨道与掩蔽所顶相切的条件时,选择与此斜坡平行和垂直的两方向分别为坐标系的 x , y 轴的方向,可使求解较为简便.

例题 1.04 一盏灯挂在天花板下 h_1 处,灯离地面的高度为 h_2 ,灯泡突然爆破成许多碎片,所有碎片以相同的初速度 v_0 向各方向飞散.若碎片与天花板的碰撞是弹性的,碎片落地后并不反弹,且碰不到墙.试求碎片落地区域的半径.

【提示】 分别讨论灯爆炸后,飞得最远的碎片会与顶相碰和不会与顶相碰两种情况.



题 1.03 图



题解 1.03 图

【题解】取灯泡处为坐标系原点,坐标轴的方向如图选取.如无天花板的限制,爆破的灯碎片以初速度 v_0 、仰角 θ 飞出,其落地点到灯正下方、地上 O_2 点的距离设为 R .由抛物运动公式可得

$$\begin{cases} v_0 \cos \theta t = R \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 = -h_2 \end{cases} \quad (2)$$

将(1),(2)两式分别两边平方,再把两式相加,可得

$$R^2 + h_2^2 = v_0^2 t^2 - g v_0 \sin \theta t^3 + \frac{1}{4} g^2 t^4 \quad (3)$$

将(2)式代入(3)式,得

$$R^2 = (v_0^2 + g h_2) t^2 - \frac{1}{4} g^2 t^4 - h_2^2 = \left(\frac{v_0^2}{g} + h_2 \right)^2 - h_2^2 - \left[\frac{1}{2} g t^2 - \left(\frac{v_0^2}{g} + h_2 \right) \right]^2 \quad (4)$$

由(4)式可知,当 $t = \frac{1}{g} \sqrt{2(v_0^2 + g h_2)}$ 时, R 最大,其值为

$$R_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2g h_2} \quad (5)$$

将(5)式及 $t = \frac{1}{g} \sqrt{2(v_0^2 + g h_2)}$ 代入(1)式,可得与 $R_{\max}$ 相应的抛射角 θ_0 满足

$$\cos \theta_0 = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2g h_2}{2(v_0^2 + g h_2)}} \quad (6)$$

由(6)式可求得飞得最远的碎片能上升的最大高度为

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{v_0^2 (1 - \cos^2 \theta_0)}{2g} = \frac{v_0^4}{4g(v_0^2 + g h_2)} \quad (7)$$

由(7)式可作以下讨论:

(1) 若 $h_1 \geq h$, 即飞得最远的碎片在飞行过程中不会与天花板相碰,故碎片落地范围的半径 r 就是 $R_{\max}$, 即 $r = R_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2g h_2}$. 此情况的条件也可表示为 $v_0^2 \leq 2g(h_1 + \sqrt{h_1(h_1 + h_2)})$.

(2) 若 $h_1 < h$, 即若 $v_0^2 > 2g(h_1 + \sqrt{h_1(h_1 + h_2)})$, 则飞得最远的碎片,在飞行中会与天花板相碰,从而改变其轨道.对于这种情况,可以证明在所有碎片中,其轨道与天花板相切的碎片可飞得最远,证明如下:

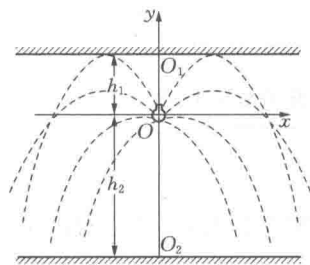
(i) 由机械能守恒定律可知,无论是与天花板相切的碎片,还是与之相碰的碎片,到达天花板时的速度 v 均相同.与天花板作弹性碰撞后的碎片均以原速 v 作斜向下抛的抛物运动,而与天花板相切的碎片,相当于在相切点以相同速度 v 作平抛运动.由抛物运动知识可知:在相同高度、以相同初速度抛出的物体中,作平抛运动的物体比作任何方向的斜向下抛的物体可抛得更远.

(ii) 与天花板相碰的各碎片相比,与天花板相切的碎片到达天花板时的位置,离灯的正上方天花板上 O_1 点的距离更远.

由以上两点分析可知,与天花板相切的碎片将飞得最远.

设与天花板相切的碎片在飞出时的抛射角为 θ' , 故有 $\frac{v_0^2 \sin^2 \theta'}{2g} = h_1$, 即 $v_0 \sin \theta' = \sqrt{2g h_1}$, 将此式代入(2)式,得

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com



题解 1.04 图

$$t^2 - 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}t - \frac{2h_2}{g} = 0$$

此方程的解为

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \pm \sqrt{\frac{2(h_1 + h_2)}{g}}$$

略去上式中“-”号的解,再将“+”号的解代入(1)式,即可获得此情况中碎片落地的范围半径

$$r = \frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gh_1} [\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2g(h_1 + h_2)}]$$

例题 1.05 某人站在距高墙为 d 处做射击游戏,他每次发射子弹的初速度均为 v_0 .

(1) 他射出的多发子弹要击中墙上距地高为 h 的同一水平线,求子弹在墙上瞄准点的轨迹;

(2) 若子弹在墙上的击中点要高于此水平线,求瞄准点的范围.

【提示】 对子弹的运动可以子弹出射点为坐标原点建立三维坐标系,而为求得瞄准点的轨迹,则应在墙上另建立二维坐标系.

【题解】 (1) 坐标系 $O-xyz$ 如图所示,原点 O 为子弹射出点,墙面平行于 xOz 平面,与 O 相距为 d , y 轴与墙面的交点为 O' 点.

设某子弹的运动轨道在 yOz 平面内,其发射的仰角为 θ ,墙上的瞄准点为 M ,击中墙上距地高为 h 的 P 点. 对此子弹有

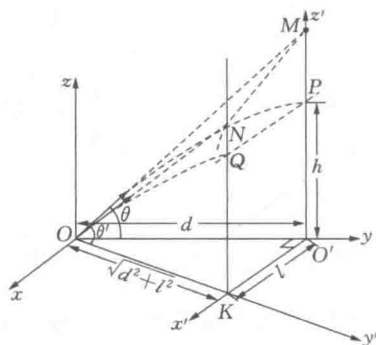
$$\begin{cases} v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 = h & (1) \\ v_0 \cos \theta t = d & (2) \end{cases}$$

由(1),(2)两式消去 t ,可得

$$h = d \tan \theta - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

由此可得

$$\tan \theta = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2 d^2}}{gd} \quad (3)$$



题解 1.05 图

注: O' 应是发射方向与 OK 之间的夹角

过 O 点另取一坐标轴 y' , 如图所示, 此轴与墙面的交点为 K , 取 $KO' = l$, 则 $KO = \sqrt{d^2 + l^2}$. 设另有一子弹的运动轨道在 $y'Oz$ 平面内, 其发射的仰角为 θ' , 墙上的瞄准点为 N , 击中墙上距地高同为 h 的 Q 点. 对此子弹, 可得类似于(3)式的关系:

$$\tan \theta' = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2(d^2 + l^2)}}{g \sqrt{d^2 + l^2}} \quad (4)$$

过 O' 点另取一平面坐标系 $O'x'z'$, $O'K$ 为 x' 轴, $O'M$ 为 z' 轴. 在此坐标系中, N 点的坐标设为 (x', z') . 由图所示的几何关系可得

$$x' = l, \quad z' = \sqrt{d^2 + l^2} \tan \theta'$$

将(4)式代入,得

$$z' = \frac{v_0^2}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2 d^2 - g^2 x'^2}}{g}$$

由此可得

$$\left(z' - \frac{v_0^2}{g}\right)^2 + x'^2 = \left(\frac{\sqrt{v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2 d^2}}{g}\right)^2 \quad (5)$$

(5) 式为在 $O'x'z'$ 坐标系中圆心在 $(0, \frac{v_0^2}{g})$ 点、半径 $R = \frac{1}{g} \sqrt{v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2 d^2}$ 的圆方程, 此圆即为子弹击中距地高 h 的水平线的瞄准点的轨迹方程。

(2) 子弹若要击中墙上高于 h 水平线的点, 只需将 $h' (> h)$ 代入(5)式中的 h , 可知方程变为半径为 $R' (< R)$ 的圆. 可见瞄准点在(5)式所示的圆内。

【点评】 本题涉及三维空间, 选择好恰当的坐标系是求解本题的关键。

例题 1.06 在倾角为 $\alpha = 30^\circ$ 的斜面底端固定一块与斜面垂直的挡板, 在斜面上方空间的 A 点, 由静止释放一小球, 小球自由下落, 与斜面和挡板碰撞后又重新回到 A 点. 已知 A 点到斜面的垂直距离为 $h = 1.0\text{m}$, 小球与斜面和挡板的碰撞都是弹性的, 且小球与挡板的碰撞不超过两次. 试求:

(1) A 点与挡板的垂直距离 L ;

(2) 小球从 A 点释放后又回到 A 点所经过的时间 t 。

【提示】 分析小球与挡板的碰撞, 以确定能使小球返回出发点的情况。

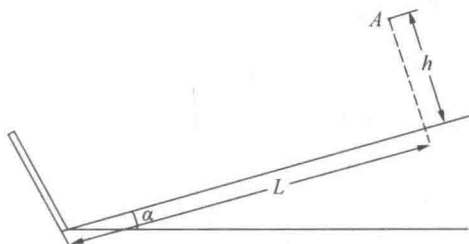
【题解】

(1) 取 A 点为坐标系原点, 坐标轴选取如图所示。

在此坐标系中, 小球运动加速度沿 x, y 两方向的分量分别为

$$a_x = g \sin \alpha, \quad a_y = g \cos \alpha$$

小球从 A 点由静止开始释放后自由下落, 落到斜面上的 B_1 点, 与斜面碰撞跳起后作抛物运动, 先后到达 $A_2, B_3, A_4, B_5 \dots$, 其轨迹如图中实线所示, 其中 $A_2, A_4 \dots$ 都在 x 轴上, 分别过 $A_2, A_4 \dots$ 作斜面的垂线, 交斜面于 $B_2, B_4 \dots$, 再分别过 $B_1, B_3 \dots$ 作斜面的垂线, 交 x 轴于 $A_1, A_3 \dots$, 小球从 A 至 B_1 、从 B_1 到 A_2 、从 A_2 到 $B_3 \dots$, 经过的时间都是 T ,



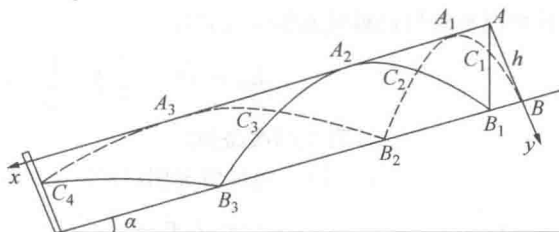
题 1.06 图

$$h = \frac{1}{2} a_y T^2, \quad T = \sqrt{\frac{2h}{a_y}} = \sqrt{\frac{2h}{g \cos \alpha}} = 2 \sqrt{\frac{h}{\sqrt{3}g}}$$

若挡板的位置恰好在 $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3 \dots$ 处时, 小球与挡板碰撞后会回到 A 点. 这是因为当板的位置在 $A_1 B_1, A_3 B_3 \dots$ 时, 小球与板的碰撞可视为小球先与斜面碰撞、跳起后紧接着与板碰撞, 因小球的体积可忽略, 这两次碰撞几乎同时进行, 碰撞后以相同的速率沿着与碰撞前相反的方向跳起. 这与光线经两个互成直角平面镜反射后, 沿与入射光线相反的方向出射相仿. 而当板的位置在 $A_2 B_2, A_4 B_4 \dots$ 处时, 小球与挡板碰撞时速度垂直于挡板, 故碰撞后速度的大小不变, 且方向相反, 同时也垂直于挡板. 可见以上这两种情况小球都会沿原轨迹返回 A 点, 在整个运动过程中小球与挡板只发生一次碰撞, 由此可得 A 点与挡板的垂直距离为

$$L = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} g \sin \alpha (nT)^2 = \frac{n^2 h}{\sqrt{3}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

图中画出了另一条轨迹线: 此轨迹经过 $B, A_1, B_2, A_3 \dots$ 各点 (如图中虚线所示), 此轨迹线与 y 轴相切. 若小球从 A 点由静止释放后沿 $A, B_1, A_2, B_3 \dots$ 轨迹 (如图中实线所示) 运动, 与挡板碰撞后若转为此虚线轨迹, 则小球到达 B 点时速度与斜面垂直, 与斜面碰撞后沿此虚线轨迹返回挡板, 再次与挡板碰撞, 碰撞



题解 1.06 图

后沿原实线轨迹回到 A 点. 在这种情况下, 小球在整个运动过程中与挡板发生两次碰撞, 要完成上述运动, 挡板只能位于两轨迹的交点 $C_1, C_2, C_3, C_4 \dots$ 点处.

下面求 C_1 点的位置坐标. C_1 点是 AB_1 和 A_1B 的交点, AB_1 轨道上各点坐标为

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2, \quad y = \frac{1}{2}a_y t^2$$

AB_1 的轨道方程

$$y = \frac{a_y}{a_x} x = \cot \alpha x = \sqrt{3}x \quad (1)$$

A_1B 轨道上各点坐标为

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2, \quad y = h - v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

上式中 v_{0y} 是小球在 B 点反跳时 y 方向的速度, 有

$$v_{0y} = \sqrt{2a_y h} = \sqrt{2g \cos \alpha h} = \sqrt{\sqrt{3}gh}$$

于是可得 A_1B 的轨道方程

$$y = h - 2\sqrt{\sqrt{3}hx} + \sqrt{3}x \quad (2)$$

由(1)式和(2)式可求得 C_1 点的 y 坐标, 这也是各 C 点的 y 坐标,

$$y_{c_1} = \frac{1}{4}h = y_{c_2} = y_{c_3} = \dots$$

小球从 A 点运动到 C_1 点经过的时间为 t_0 , $y_{c_1} = \frac{1}{2}a_y t_0^2$, $t_0 = \sqrt{\frac{2y_{c_1}}{a_y}} = \sqrt{\frac{\frac{h}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}g}} = \sqrt{\frac{h}{\sqrt{3}g}} = \frac{T}{2}$.

各 C 点的 x 坐标为

$$\begin{aligned} x_{cn} &= \frac{1}{2}a_x (nT + t_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}g \left(n\sqrt{\frac{4h}{\sqrt{3}g}} + \sqrt{\frac{h}{\sqrt{3}g}} \right)^2 = \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 h}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}{\sqrt{3}} (\text{m}) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

综上所述, A 点到挡板的距离 L 有两种可能:

$$(i) \quad L_n = \frac{n^2}{\sqrt{3}} (\text{m}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

此情况小球与挡板只发生一次碰撞.

$$(ii) \quad L_n = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{3}} (\text{m}) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

此情况小球与挡板发生两次碰撞.

(2) 整个过程与以上两种情况相对应所需的时间分别为

$$(i) \quad t_n = 2nT = \frac{4n}{\sqrt{\sqrt{3}g}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(ii) \quad t_n = 2(2n+1)T = 4(2n+1) \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}g}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

例题 1.07 一飞机在离地面高度为 h 处, 以速度 v_0 水平匀速飞行, 并向地面目标投掷炸弹。

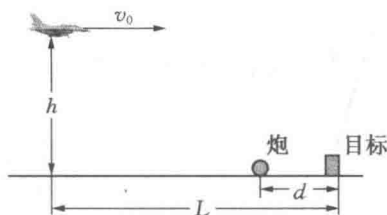
(1) 为使炸弹击中地面上的目标, 飞机应在离地面目标水平距离 L 为多大时投掷炸弹?

(2) 若在离地面目标距离为 d 处有一门炮, 在飞机投掷炸弹的同时发射一炮弹, 如图所示. 为使炮弹能在空中击中飞机所投之炸弹, 试求炮弹发射的最小初速度 $v_{\min}$ 及相应的发射角。

【提示】 注意炮弹相对炸弹的运动速度, 并讨论要使炮弹在空中击中炸弹所需的最小相对速度与炸弹投出时速度的大小关系。

【题解】 (1) 炸弹被投出后, 以与飞机相同的运动速度 v_0 为初速度作平抛运动, 当击中地面上目标时, 有

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}gt^2 & (1) \\ L = v_0 t & (2) \end{cases}$$



题 1.07 图

联立(1),(2)式, 即可求得炸弹投掷点与目标的水平距离 $L = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 。

(2) 设炸弹投掷时 $t = 0$, 在时刻为 t 时炸弹的速度 $\mathbf{v}_1$ 为

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t \quad (3)$$

地面上的炮以初速度 $\mathbf{v}$ 发射的炮弹此刻的速度 $\mathbf{v}_2$ 为

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{g}t \quad (4)$$

取炸弹为运动参照系, 在此参照系中, 炮弹的相对速度 $\mathbf{v}'$ 为

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \quad (5)$$

(5) 式的矢量关系如图 1 所示. 设经过时间 t_1 , 炮弹在空中击中炸弹, 则有

$$v't_1 = \sqrt{(L-d)^2 + h^2} \quad (6)$$

由于炮弹击中炸弹的点要在空中, 而炸弹在空中飞行的最长时间 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, 故必有

$$t_1 \leq t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (7)$$

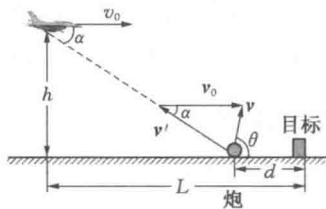
综合(6),(7)式, 得

$$v' \geq \sqrt{(L-d)^2 + h^2} \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (8)$$

由(8)式可知, 炮弹要在空中击中炸弹所需的最小相对速度为 $v'_m = \sqrt{(L-d)^2 + h^2} \sqrt{\frac{g}{2h}}$ 。

为求得炮弹相对地面的最小初速度, 可作以下讨论:

(i) 若 $v_0 \cos \alpha < v'_m = \sqrt{(L-d)^2 + h^2} \sqrt{\frac{g}{2h}}$, 其中 $\cos \alpha = \frac{L-d}{\sqrt{(L-d)^2 + h^2}}$, 故此条件可表示为



题解 1.07 图 1

$v_0 < \frac{d^2 + h^2}{d} \sqrt{\frac{g}{2h}}$. 由图 1 中矢量三角形可知, 要使 v 的值最小, v' 的值应尽可能地小, 故取 v'_m , 于是有

$$v_{\min}^2 = v_m'^2 + v_0^2 - 2v'_m v_0 \cos \alpha = (L-d)^2 \frac{g}{2h} + \frac{1}{2}gh + v_0^2 - 2v_0(L-d) \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

将 $v_0 = L \sqrt{\frac{g}{2h}}$ 代入上式, 可得此情况下炮弹的最小发射速度为

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{g}{2h}(d^2 + h^2)}$$

由图 1 所示的几何关系, 可得与 $v_{\min}$ 相应的炮弹发射角 θ 满足 $v_{\min} \sin \theta = v'_m \sin \alpha$, 即有

$$\sin \theta = \frac{v'_m}{v_{\min}} \sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}$$

或可表示为

$$\tan \theta = \frac{h}{d}, \quad \theta = \arctan \frac{h}{d}$$

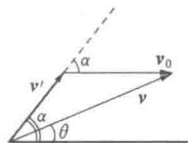
(ii) 若 $v_0 \cos \alpha \geq v'_m$, 此情况的条件也可表示为 $v_0 \geq \frac{d^2 + h^2}{d} \sqrt{\frac{g}{2h}}$. 此情况的速度矢量三角形如图 1 所示, 由图 1 可知, 只需使 $v \perp v'$, 则 v 达最小, 注意此时 $v' > v'_m$. 于是最小初速度 $v_{\min}$ 为

$$v_{\min} = v_0 \sin \alpha = \frac{v_0 h}{\sqrt{(L-d)^2 + h^2}} = \frac{v_0 h}{\sqrt{\left(v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} - d\right)^2 + h^2}}$$

与此最小初速度对应的发射角 θ 为

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ 或 } \theta = \arctan \left(\frac{v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} - d}{h} \right)$$

以上的讨论均是取 $d < L$ 的情况, 即如图 1 所示的情况. 若取 $d \geq L$, 则速度矢量三角形如图 2 所示. 由图示的几何关系可知, 要使 v 最小, v' 应尽可能地小, 故 v' 取 v'_m , 用余弦定理就可求得 $v_{\min} = \sqrt{\frac{g}{2h}(h^2 + d^2)}$.



题解 1.07 图 2

此值与情况 (i) 相同, 与此相应的发射角也与情况 (i) 相同, 即

$$\theta = \arctan \left(\frac{h}{d} \right).$$

例题 1.08 一半径为 R 的圆在纸面内以速度 v_1 向右匀速平动, 直线 MN 以速度 v_2 向上匀速平动. 当直线与圆的交点 P 与圆心 O 的连线 OP 与直线 MN 的夹角为 θ 时, 求 P 点位置变动的速度与加速度.

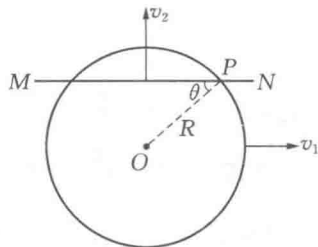
【提示】 P 点相对纸面的加速度与相对直线的加速度相等.

【题解】 先求 P 点位置变动的速度 v_P .

取圆为运动参照系. 在此系中, 直线在垂直于直线方向的速度为 v_2 , P 点的速度 v'_P (相对速度) 方向沿圆周的切向, P 点作为直线上的一点, 必有

$$v'_P \cos \theta = v_2 \quad (1)$$

由相对运动公式, 可得 P 点相对纸面位置变动的速度 v_P (绝对速



题 1.08 图

度)为

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}'_P + \mathbf{v}_1 \quad (2)$$

其矢量关系如图1所示,由图示的几何关系可得

$$v_P = \sqrt{(v_1 - v'_P \sin \theta)^2 + v_2^2} = \sqrt{(v_1 - v_2 \tan \theta)^2 + v_2^2}$$

$\mathbf{v}_P$ 的方向与直线的夹角 α 为

$$\cot \alpha = \frac{v_1 - v_2 \tan \theta}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} - \tan \theta, \quad \alpha = \operatorname{arccot} \left(\frac{v_1}{v_2} - \tan \theta \right)$$

下面再求 P 点位置变动的加速度:

先取圆为运动参照系. 在此系中, 作为圆上的一点, P 点作圆周运动, 且为变速圆周运动, 故其相对加速度 $\mathbf{a}'_P$ 可表示为 $\mathbf{a}'_P = \mathbf{a}'_n + \mathbf{a}'_t$, 其中 $\mathbf{a}'_n$ 和 $\mathbf{a}'_t$ 分别为法向加速度和切向加速度. 法向加速度的值为

$$a'_n = \frac{v'^2_P}{R} = \frac{v_2^2}{R \cos^2 \theta} \quad (3)$$

由于圆相对纸面作匀速平动, 由相对运动知识可知, P 点相对纸面的加速度 $\mathbf{a}_P$ 与 $\mathbf{a}'_P$ 相等, 即

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}'_P = \mathbf{a}'_n + \mathbf{a}'_t \quad (4)$$

再取直线为运动参照系, 在此系中, 作为直线上的一点, P 点作直线运动, 故其相对加速度 $\mathbf{a}''_P$ 的方向沿此直线. 由于直线相对纸面也作匀速平动, 同样由相对运动知识可得

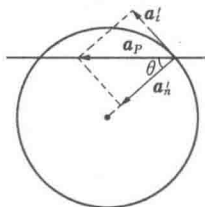
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}''_P \quad (5)$$

即相对纸面, P 点加速度 $\mathbf{a}_P$ 的方向就是沿直线方向. 图2表示(4)式中的矢量关系, 于是便可求得 a_P 的值为

$$a_P = \frac{a'_n}{\cos \theta} \quad (6)$$

将(3)式代入(6)式, 有

$$a_P = \frac{v_2^2}{R \cos^3 \theta}$$



题解 1.08 图 2

【点评】 本题的 P 点加速度也可先通过 v'_P 对时间求导求得 a'_t , 然后由

$a_P = a'_P = \sqrt{a'^2_n + a'^2_t}$ 来求得 a_P . 前面的解法是先后取圆和直线为运动参照

系, 通过分析求得 $\mathbf{a}_P$ 的方向沿直线. 于是, 只需求得 a'_n 的值, 便可求得 a_P 的值. 此种解法可避免求导, 显得更为简便.

例题 1.09 一根细棒 AB 斜搁在半径为 R 的固定半圆柱面上, 棒与地面接触的 A 端以速度 v 沿水平面作匀速直线运动, 如图所示. 当棒与地面的夹角为 θ 时, 试求:

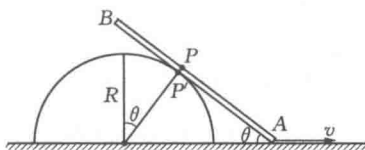
(1) 棒上与圆柱面接触的 P 点此时的速度 $\mathbf{v}_P$;

(2) 棒与圆柱面的交点 P' 位置变动的速度 $\mathbf{v}_{P'}$.

【提示】 棒相对地面的转动角速度和在与 A 点一起运动的参照系中棒绕 A 点转动的角速度相等.

【题解】 (1) 取棒与地面的接触点 A 为运动参照系, 在此系中, 棒绕 A 点转动, 故棒上与圆柱的接触点 P 点的速度 (相对速度) $\mathbf{v}'_P$ 的方向为垂直于棒的方向, 即沿圆柱半径指向圆心 O 的方向, 设棒此刻绕 A 点转动的角速度为 ω , 故有

$$v'_P = \omega l \quad (1)$$



题 1.09 图