概率论与数理统计

主　编◎齐小忠

天津出版传媒集团
天津科学技术出版社

概率论与数理统计

主　编　齐小忠

天津出版传媒集团
天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 齐小忠主编. -- 天津 : 天津科学技术出版社, 2018.6

ISBN 978-7-5576-1626-7

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①齐… Ⅲ. ①概率论 ②数理统计 Ⅳ. ① O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 207679 号

责任编辑：石 崑
责任印制：兰 毅

天津出版传媒集团

天津科学技术出版社出版

出 版 人：蔡 颢
天津市西康路35号 邮编 300051
电话(022)23332369（编辑室）
网址：www.tjkjcbs.com.cn
新华书店经销
天津印艺通制版印刷有限责任公司印刷

开本：787×1092 1/16 印张 13 字数 312000
2018 年 6 月第 1 版 第 1 次印刷
定价：68.00元

前　言

本书是作者在多年教学实践的基础上，参照教育部非数学专业教学指导委员会最新指定的“经济管理学本科数学基础教学基本要求”，涵盖教育部最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中概率论与数理统计全部内容，汲取国内外其他同类图书精华编写而成。

本书作为经济管理类数学基础系列图书之一，以深入浅出的方式介绍了概率论与数理统计的基本内容，并着重介绍概率论与数理统计中主要内容的思想方法。本书在质量上坚持高标准，不但内容正确无误，而且编排科学合理。本书在项目的内容中穿插介绍了与本项目内容有关的一些背景知识或概率论与数理统计的应用实例，旨在加深读者对概率统计内容的了解，扩大阅读视野，加强对实际问题分析能力的培养，以利于读者对基本理论与基本方法的掌握与应用。相信读者学习本书后会大有收获，并对学习概率论与数理统计产生兴趣，快乐地学习概率论与数理统计，增强学习信心，提高科学素质。

本书在编写过程中，参考了大量已出版的优秀图书、公开发表的论文和网络文献，在此对作者表示深切的谢意。由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请广大读者不吝赐教并批评指正。

编者

2018年6月

目 录

项目一 概率论的基本概念

项目二 随机变量及其概率分布

项目三 多维随机变量及其分布

项目四 随机变量及其数字特征

概括起来，这些试验具有以下的特点：

1°可以在相同的条件下重复地进行；

2°每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3°进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，我们将具有上述三个特点的试验称为随机试验.

本书中以后提到的试验都是指随机试验.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

任务2 样本空间、随机事件

（一）样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

下面写出任务 1 中试验 E_k（$k=1, 2, \cdots, 7$）的样本空间 S_k:

S_1: $\{H, T\}$;

S_2: $\{HHH, HHT, HTH. THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$;

S_3: $\{0, 1, 2, 3\}$;

S_4: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

S_5: $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$;

S_6: $\{t \mid t \geqslant 0\}$;

S_7: $\{(x, y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$. 这里 x 表示最低温度（℃），y 表示最高温度（℃）. 并设这一地区的温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1.

（二）随机事件

在实际中，当进行随机试验时，人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如，若规定某种灯泡的寿命（小时）小于 500 为次品，则在 E_6 中我们关心灯泡的寿命是否有 $t \geqslant 500$. 满足这一条件的样本点组成 S_6 的一个子集：$A=\{t \mid t \geqslant 500)$. 我们称 A 为试验 E_6 的一个随机事件. 显然，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有 $t \geqslant 500$.

一般，我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件。简称事件①. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

特别，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件. 例如，试验 E_1 有两个基本事

① 严格地说，事件是指S中的满足某些条件的子集. 当S是由有限个元素或由可列无限个元素组成时，每个子集都可作为一个事件. 若S是由不可列无限个元素组成时，某些子集必须排除在外. 幸而这种不可容许的子集在实际应用中几乎不会遇到. 今后，每当我们讲到一个事件时都是假定它是容许考虑的那种子集. 读者如有兴趣可参考较详细的教材.

件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$；试验 E_4 有 6 个基本事件 $\{1\}$，$\{2\}$。…，$\{6\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，S 称为必然事件．空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，$\varnothing$ 称为不可能事件.

下面举几个事件的例子.

例1　在 E_2 中事件 A_1：“第一次出现的是H”，即

$$A_1=\{HHH，HHT，HTH、HTT\}.$$

事件 A_2：“三次出现同一面”，即

$$A_2=\{HHH，TTT\}.$$

在 E_6 中．事件 A_3：“寿命小于 1000 小时”，即

$$A_3=\{t \mid 0 \leqslant t<1000\}.$$

在 E_7 中，事件 A_4：“最高温度与最低温度相差 10 摄氏度”，即

$$A_4=\{(x，y) \mid y-x=10，T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}.$$

（三）事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理．下面给出这些关系和运算在概率论中的提法．并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 A，B，A_k（$k=1$，2，…）是 S 的子集.

1° 若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

2° 事件 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件．当且仅当 A，B中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，称$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$为 n 个事件 A_1，A_2，…。A_n 的和事件；称$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1$．$A_2$，…的和事件.

3° 事件 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件．当且仅当 A，B 同时发生时，事件$A\cap B$ 发生．$A\cap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件；称$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为可列个事件A_1，A_2，…的积事件.

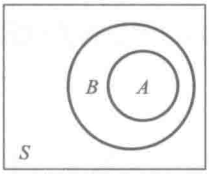
4° 事件 $A—B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件．当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A—B$ 发生.

5° 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的．这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生．基本事件是两两互不相容的.

6° 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件．又称事件 A 与事件 B 互为对立事件．这指的是对每次试验而言．事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一

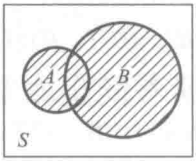
个发生．A 的对立事件记为 $\overline{A}$．$\overline{A}=S-A$.

用图 1—1—图 1—6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算．例如，在图 1—1 中长方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A. 又如在图 1—2 中长方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，而阴影部分表示和事件 $A\cup B$.



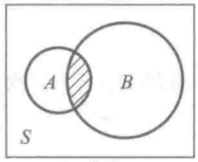
$A\subset B$

图1—1



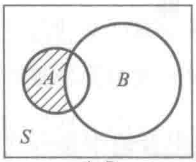
$A\cup B$

图1—2



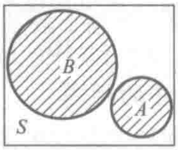
$A\cap B$

图1—3



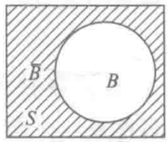
$A-B$

图1—4



$A\cap B=\varnothing$

图1—5



$B\cup\overline{B}=S,\ B\cap\overline{B}=\varnothing$

图1—6

在进行事件运算时，经常要用到下述定律．设 A，B，C 为事件，则有

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例2　在例1中有

$A_1\cup A_2=\{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\}$,

$A_1\cap A_2=\{HHH\}$,

$A_2-A_1=\{TTT\}$,

$\overline{A_1\cup A_2}=\{THT, TTH、THH\}$.

例3　如图 1—7 所示的电路中，以 A 表示“信号灯亮”这一事件，以 B，C，D 分别表示事件：继电器接点 I，Ⅱ，Ⅲ 闭合，那么容易知道 $BC\subset A$，$BD\subset A$，$BC\cup BD=A$，而 $\overline{B}A=\varnothing$，即事件 $\overline{B}$ 与事件 A 互不相容．又，$\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}$. （左边表示事件“I，Ⅱ至少有一个闭合”的逆事件，也就是I，Ⅱ都不闭合，即 $\overline{B}$，$\overline{C}$ 同时发生．）

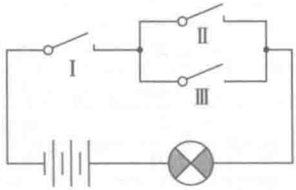


图　I—7

任务3　频率与概率

对于一个事件（除必然事件和不可能事件外）来说，它在一次试验中可能发生．也可能不发生．我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大．例如，为了确定水坝的高度，就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小．我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小．为此，首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率．

（一）频率

定义在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数．比值 A_n/n 称为事件 A 发生的频率。并记成 $f_n(A)$．

由定义，易见频率具有下述基本性质：

1° $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

2° $f_n(S)=1$；

3° 若 A_1，A_2，…，A_k 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发生的频繁程度．频率大，事件 A 发生就频繁，这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就大．反之亦然．因而，直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小．但是否可行，先看下面的例子．

例1　考虑“抛硬币”这个试验，我们将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍．得到数据如表 1—1 所示（其中 n_H 表示 H 发生的频数，$f_n(H)$ 表示 H 发牛的频率）．

表　1—1

实验符号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498

续表

3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

这种试验历史上有人做过，得到如表 1—2 所示的数据.

表　1—2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出：抛硬币次数 n 较小时。频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动，其幅度较大，但随着 n 增大，频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性. 即当 n 逐渐增大时 $f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5.

例2　考察英语中特定字母出现的频率. 当观察字母的个数 n（试验的次数）较小时，频率有较大幅度的随机波动. 但当 n 增大时，频率呈现出稳定性. 表 1—3 就是一份英文字母频率的统计表[①]：

表　1—3

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

① 这是由Dewey · G，统计了约438 023个字母得到的. 引自Relative Frequency of English Spellings（Teachers Coilege Press，Columbia University，New York，1970）.

大量试验证实，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数. 这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性. 我们让试验重复大量次数，计算频率 $f_n(A)$，以它来表征事件A发生可能性的大小是合适的.

但是，在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，用以表征事件发生可能性的大小. 同时，为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出如下表征事件发生可能性大小的概率的定义.

（二）概率

定义设 E 是随机试验，S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

1° 非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

2° 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

3° 可列可加性：设 A_1，A_2，$\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j=\varnothing$，$i \neq j$，i，$j=1$，2，$\cdots$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \tag{3.1}$$

当 $n \to \infty$ 时频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们就有理由将概率 $P(A)$ 用来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

由概率的定义，可以推得概率的一些重要性质.

性质　i $P(\varnothing)=0$.

证　令 $A_n=\varnothing$（$n=1$，2，$\cdots$），则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，$\cdots$. 由概率的可列可加性（3.1）得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

由概率的非负性知，$P(\varnothing) \geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

性质 ii（有限可加性）　若 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{3.2}$$

（3.2）式称为概率的有限可加性.

证　令 $A_{n+1}=A_{n+2}\cdots=\varnothing$，即有 $A_iA_j=\varnothing$，$i=j$，i，$j=1$，2，$\cdots$. 由（3.1）式得

$$\begin{aligned}&P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\\&=P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\\&=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)+0=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

（3.2）式得证.

性质 iii　设 A，B 是两个事件，若 $A \subset B$。则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A); \tag{3.3}$$

$$P(B) \geqslant P(A). \tag{3.4}$$

证　由 $A \subset B$ 知 $B = A \cup (B-A)$（参见图 1—1），且 $A(B-A)=\varnothing$。再由概率的有限可加性（3.2），得

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

（3.3）得证；又由概率的非负性 1°，$P(B-A) \geqslant 0$ 知

$$P(B) \geqslant P(A).$$

性 v　对于任一事件 A，

$$P(A) \leqslant 1.$$

证　因 $A \subset S$，由性质 iii 得

$$P(A) \leqslant P(S)=1.$$

性质 iv（逆事件的概率）　对于任一事件 A，有

$$P(A)=1-P(A).$$

证　因 $A \cup \overline{A}=S$，且 $A\overline{A}=\varnothing$，由（3.2）式，得

$$1=P(S)=P(A \cup \overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

性质 v 得证.

性质 vi（加法公式）　对于任意两事件 A，B 有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{3.5}$$

证　因 $A \cup B=A \cup (B-AB)$（参见图 1—2），且 $A(B-AB)=\varnothing$，$AB \subset B$，故由（3.2）式及（3.3）式得

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A)+P(B-AB) \\ &= P(A)+P(B)-P(AB). \end{aligned}$$

（3.5）式还能推广到多个事件的情况．例如，设 A_1，A_2，A_3 为任意三个事件，则有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2) \\ & -P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3). \end{aligned} \tag{3.6}$$

一般，对于任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，可以用归纳法证得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = {} & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j) \\ & + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \end{aligned} \tag{3.7}$$

任务4　等可能概型（古典概型）

任务1中所说的试验 E_1，E_4，它们具有两个共同的特点：

1° 试验的样本空间只包含有限个元素；

2° 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验是大量存在的．这种试验称为等可能概型．它在概率论发展初期曾是主要的研究对象，所以也称为古典概型．等可能概型的一些概念具有直观、容易理解的特点，有着广泛的应用．

下面我们来讨论等可能概型中事件概率的计算公式．

设试验的样本空间为 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$．由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同，即有

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

又由于基本事件是两两互不相容的．于是

$$\begin{aligned}1=P(S)&=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\&=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})\\&\quad+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\}),\end{aligned}$$

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n},\ i=1, 2, \cdots, n.$$

若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\}$，这里 i_1，$i_2\cdots$，i_k 是 1，2，…，n 中某 k 个不同的数．则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}}. \tag{4.1}$$

（4.1）式就是等可能概型中事件A的概率的计算公式[①]．

例1　将一枚硬币抛掷三次．（1）设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”，求 $P(A_1)$；（2）设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”。求 $P(A_2)$．

解　（1）我们考虑任务1中 E_2 的样本空间：

$$S_2=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

而　$A_1=\{HTT, THT, TTH\}$.

S_2 中包含有限个元素，且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同．故由（4.1）式，得

$$P(A_1)=\frac{3}{8}.$$

（2）由于 $\overline{A}_2=\{TTT\}$，于是

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

当样本空间的元素较多时，我们一般不再将 S 中的元素一一列出，而只需分别求出 S 中与 A 中包含的元素的个数（即基本事件的个数），再由（4.1）式即可求出 A 的概率．

---

① 易知由（4.1）所确定的概率满足非负性、规范性和有限可加性．但此时由于S中只含有限个子集（只有$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$个子集）．因而若在$S$中取可列无限个两两互不相容的事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…．则其中必包含无限多个不可能事件，即知可列可加性与有限可加性是等价的．

例2 一个口袋装有6只球，其中4只白球、2只红球．从袋中取球两次，每次随机地取一只．考虑两种取球方式：（a）第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球．这种取球方式叫做放回抽样．（b）第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球．这种取球方式叫做不放回抽样．试分别就上面两种情况求（1）取到的两只球都是白球的概率；（2）取到的两只球颜色相同的概率；（3）取到的两只球中至少有一只是白球的概率．

解 （a）放回抽样的情况．

以 A、B、C 分别表示事件"取到的两只球都是白球"，"取到的两只球都是红球"，"取到的两只球中至少有一只是白球"．易知"取到两只颜色相同的球"这一事件即为 $A\cup B$，而 $C=\overline{B}$．

在袋中依次取两只球，每一种取法为一个基本事件，显然此时样本空间中仅包含有限个元素．且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同．因而可利用（4.1）式来计算事件的概率．

第一次从袋中取球有6只球可供抽取，第二次也有6只球可供抽取．由组合法的乘法原理，共有6×6种取法．即样本空间中元素总数为 6×6．对于事件 A 而言，由于第一次有4只白球可供抽取，第二次也有4只白球可供抽取，由乘法原理共有4×4种取法，即 A 中包含 4×4 个元素．同理，B 中包含 2×2 个元素．

于是

$$P(A)=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}$$

$$P(B)=\frac{2\times2}{6\times6}=\frac{1}{9}$$

由于 $AB=\varnothing$，得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}$$

$$P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{8}{9}$$

（b）不放回抽样的情况．

由读者自己完成．

例3 将 n 只球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中去，试求每个盒子至多有一只球的概率（设盒子的容量不限）．

解 将 n 只球放入 N 个盒子中去，每一种放法是一基本事件．易知，这是古典概率问题．因每一只球都可以放入 N 个盒子中的任一个盒子，故共有 $N\times N\times\cdots\times N=N^n$ 种不同的放法，而每个盒子中至多放一只球共有 $N(N-1)\cdots[N-(n-1)]$ 种不同放法．因而所求的概率为

$$p=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}$$

有许多问题和本例具有相同的数学模型. 例如，假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的，即都等于 1 / 365，那么随机选取 n（$n\leqslant 365$）个人，他们的生日各不相同的概率为

$$\frac{365\cdot 364\cdot\cdots\cdot(365-n+1)}{365^n}.$$

因而，n 个人中至少有两人生日相同的概率为

$$p=1-\frac{365\cdot 364\cdot\cdots\cdot(365-n+1)}{365^n}.$$

经计算可得下述结果：

n	20	23	30	40	50	64	100
p	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.999 999 7

从上表可看出，在仅有 64 人的班级里，“至少有两人生日相同”这一事件的概率与1相差无几，因此，如作调查的话，几乎总是会出现的. 读者不妨试一试.

例4 设有 N 件产品，其中有 D 件次品，今从中任取 n 件，问其中恰有 k（$k\leqslant D$）件次品的概率是多少?

解 在 N 件产品中抽取 n 件（这里是指不放回抽样），所有可能的取法共有 $\binom{N}{n}$ ① 种，每一种取法为一基本事件，且由于对称性知每个基本事件发生的可能性相同. 又因在 D 件次品中取 K 件，所有可能的取法有 $\binom{D}{k}$ 种. 在 $N-D$ 件正品中取 $n-k$ 件所有可能的取法有 $\binom{N-D}{n-k}$ 种，由乘法原理知在 N 件产品中取 n 件，其中恰有 k 件次品的取法共有 $\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}$ 种，于是所求概率为

$$p=\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}\Big/\binom{D}{n} \tag{4.2}$$

（4.2）式即所谓超几何分布的概率公式.

---

① 对于任意实数 a 以及非负整数 r，定义 $\binom{a}{r}=\frac{a(a-1)\cdots(a-r+1)}{r!}$，$\binom{a}{0}=1$. 例如 $\binom{-\pi}{3}=\frac{(-\pi)(-\pi-1)(-\pi-2)}{3!}=-\frac{\pi(\pi+1)(\pi+2)}{3!}$. 特别，当 a 为正整数，且 $r\leqslant a$ 时，$\binom{a}{r}$ 即为组合数，即 $\binom{a}{r}C_a^r$.

例5 袋中有 a 只白球，b 只红球，k 个人依次在袋中取一只球，（1）作放回抽样；（2）作不放回抽样，求第 i（$i=1, 2, \cdots, k$）人取到白球（记为事件 B）的概率（$k \leqslant a+b$）.

解 （1）放回抽样的情况，显然有

$$P(B)=\frac{a}{a+b}$$

（2）不放回抽样的情况．各人取一只球，每种取法是一个基本事件．共有 $(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$ A_{a+b}^{k} 个基本事件，且由于对称性知每个基本事件发生的可能性相同．当事件 B 发生时，第 i 人取的应是白球，它可以是 a 只白球中的任一只，有 a 种取法．其余被取的 $k-1$ 只球可以是其余 $a+b-1$ 只球中的任意 $k-1$ 只，共有 $(a+b-1)(a+b-2)\cdots[a+b-1-(k-1)+1]=A_{a+b-1}^{k-1}$ 种取法，于是事件 B 中包含 $a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}$ 个基本事件，故由（4.1）式得到

$$P(B)=a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}\ /\ A_{a+b}^{k}=\frac{a}{a+b}$$

值得注意的是 $P(B)$ 与 i 无关，即 k 个人取球，尽管取球的先后次序不同，各人取到白球的概率是一样的，大家机会相同（例如在购买福利彩票时，各人得奖的机会是一样的）．另外还值得注意的是放回抽样的情况与不放回抽样的情况下 $P(B)$ 是一样的.

例6 在 1~2000 的整数中随机地取一个数，问取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率是多少?

解 设 A 为事件“取到的数能被 6 整除”，B 为事件“取到的数能被 8 整除”，则所求概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)].\end{aligned}$$

由于 $333<\frac{2000}{6}<334$，

故得 $P(A)\frac{333}{2000}$.

由于 $\frac{2000}{8}=250$，

故得 $P(B)=\frac{250}{2000}$.

又由于一个数同时能被 6 与 8 整除，就相当于能被 24 整除，因此，由

$83<\frac{2000}{24}<84$，

得 $P(AB)=\frac{83}{2000}$.

于是所求概率为