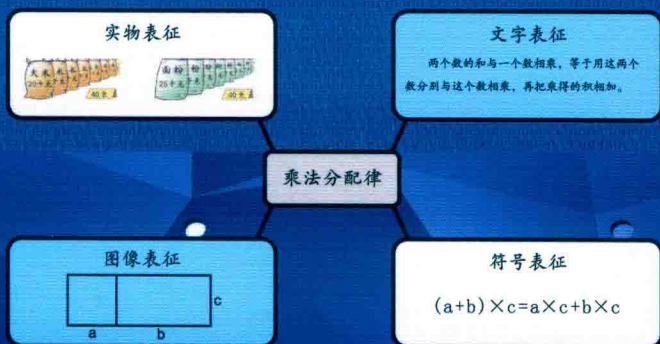


数学多元表征学习的理论与实践

席爱勇 李 宾 编著



南京大学出版社

数学多元表征学习的 理论与实践

席爱勇 李 宾 编著



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学多元表征学习的理论与实践 / 席爱勇, 李宾编著.
—南京: 南京大学出版社, 2018.10
ISBN 978-7-305-21053-2

I. ①数… II. ①席…②李… III. ①数学教学—
教学研究 IV. ①O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 234400 号

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

出 版 人 金鑫荣

书 名 数学多元表征学习的理论与实践

编 著 席爱勇 李 宾

责任编辑 钱梦菊 编辑热线 025-83592146

照 排 南京紫藤制版印务中心

印 刷 虎彩印艺股份有限公司

开 本 880×1230 1/32 印张 7.625 字数 160 千

版 次 2018 年 10 月第 1 版 2018 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-305-21053-2

定 价 28.00 元

网 址: <http://www.njupco.com>

官方微博: <http://weibo.com/njupco>

官方微信: njupress

销售咨询热线: (025)83594756

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换



席爱勇 男，淮安工业园区实验学校副校长，高级教师，研究方向是小学数学教育。江苏省优秀教育工作者，江苏省教育科研先进个人，江苏省领航名师小学数学项目组成员，江苏省第五期“333工程”学术技术人才培养对象，淮安市“533英才工程”学术技术拔尖人才培养对象，淮安市学科带头人，特级教师后备人选。现主持中央电化教育馆国家级重点课题“基于智慧教室环境的数学多元表征教学研究”，先后在《中小学教师培训》《江苏教育研究》《小学数学教师》《中小学教材教学》等各级各类教育期刊上发表教学论文二十多篇，多篇论文被人大复印报刊资料《小学数学教与学》转载，多次在江苏省“教海探航”“师陶杯”征文大赛中获一、二等奖。



李 宾 男,1976年6月出生,江苏淮安人,江苏省特级教师,江苏省“333”人才培养对象,江苏省教科研先进个人,江苏省乡村骨干教师培育站优秀主持人、优秀导师,淮安市“533”拔尖人才培养对象,淮安市学科带头人,淮安市教育督导专家组成员,淮安市基础教育专家组成员。

近年来参研省级课题研究4个,主持一项国家级课题;在《中学数学教学参考》《初中数学教与学》《中学数学》等专业期刊上发表学术论文40余篇,其中有多篇被人大复印资料全文转载;曾荣获江苏省创新方案设计大赛一等奖;开设学术讲座50余场;曾在江苏省“名师课堂”“省教师培训”等各级活动中开设示范课、研讨课30余节,《三元一次方程组》在“一师一优课”活动中获得部优。

教育主张:“教育的本质在于唤醒,发于对每一个生命的尊重,归于让每一个生命幸福的存在。”

教学主张:“学之道在于悟,教之道在于促悟。引学启思,促悟贯通,让学生能更好地理性思考,启发学生追求对知识的自明。”

前言

近期,我有幸阅读了席爱勇老师的《数学多元表征学习的理论与实践》的文稿,感到非常欣慰。欣慰的是在小学基础教育一线出现了像席老师这样的数学教师开始回归到科学的视角审视自己的数学教育教学行为,研究探索学生的数学学习规律,注重大脑认知科学、现代信息技术和数学教育教学的跨学科有效融合,这是可喜的进步。

席老师能站在国际数学教育心理学最新理论研究成果的视角,诠释了数学多元表征学习的基本概念和本质内涵,从双重编码理论、变异学习理论、多元智能理论、具身认知理论、认知负荷理论等视角探寻数学多元表征学习的理论支撑,从概念建构、技能习得、问题解决等方面建构数学多元表征学习的策略,从学案设计、学材开发、学评调节等方面建构数学多元表征学习教的策略,从数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践等领域呈现数学多元表征学习丰富的实践案例。这是他一直以来孜孜不倦地进行数学多元表征学习理论思考和实践探索以后智慧的结晶。

其次,我们能够从这本书中触摸到数学多元表征学习的基本“模样”:多元表征学习是一门科学,它是基于大脑生理机



能和视觉、听觉、动觉等感觉器官发展起来的认知科学。从数学学习角度看,主要表现为注重数学知识内在结构关联,对数学知识进行多维建构、多维理解、多维应用和多维创新,注重数学认知尤其是数学思维多维发展的科学。多元表征学习是一门技术,它是集操作、绘图、言语、文字、符号、多媒体等于一体的教学实践技术。从数学学习角度看,主要表现为数学思维可视化和学生数学认知和思维表达的技术。多元表征学习是一门艺术,它是集美术、音乐、语言、符号、影视等于一体的教育教学艺术。从数学学习角度看,主要表现为促进学生进行数学深度学习、思考、分析、表达和交流的艺术。

最后,我们还能够从这本书中感受到席老师阅读了大量脑科学、认知心理学、数学教育心理学和现代信息技术方面的理论书籍,并进行了实践融合,理论联系实际地进行了有益的探索实践尝试,从中可以看出他刻苦勤勉的工作作风、踏实严谨的工作态度和大胆创新的治学精神。

但愿读者也能够从中有所受益、启发和感悟。

吴玉国

江苏省特级教师,正高级教师,

人民教育家培养对象

目 录

绪 论	1
第一章 内涵诠释	5
第一节 表征	5
第二节 数学表征	8
第三节 数学多元表征	19
第四节 数学多元表征学习	24
第二章 理论支撑	35
第一节 数学多元表征学习与双重编码理论	35
第二节 数学多元表征学习与变异学习理论	46
第三节 数学多元表征学习与多元智能理论	53
第四节 数学多元表征学习与具身认知理论	57
第五节 数学多元表征学习与认知负荷理论	63
第三章 学的策略	69
第一节 数学多元表征学习学的策略:概念建构	69
第二节 数学多元表征学习学的策略:技能习得	86
第三节 数学多元表征学习学的策略:问题解决	98



第四章 教的策略	111
第一节 数学多元表征学习教的策略:学案设计 ...	111
第二节 数学多元表征学习教的策略:学材开发 ...	131
第三节 数学多元表征学习教的策略:学评调节 ...	150
第五章 实践案例	168
第一节 数学多元表征学习实践案例:数与代数 ...	168
第二节 数学多元表征学习实践案例:图形与几何	180
第三节 数学多元表征学习实践案例:统计与概率	197
第四节 数学多元表征学习实践案例:综合与实践	215
第六章 未来展望	227
后 记	229
参考文献	234

绪 论

随着经济全球化和信息化时代的到来,面对更富挑战性的时代格局,世界各国的发展越来越取决于科技的发展。而科技发展的背后本质是人才的培养。因此,世界各国都在思考“面向未来,到底需要培养什么样的人?”的问题。当前,最受热议的莫过于“核心素养”,它是适应个人终生发展和未来社会发展所需要的必备品格和关键能力。2016 年我国发布了《中国学生发展核心素养》总体框架,随后各个学科都在研究如何在学科中发展学生的核心素养,即学科核心素养。2017 年《普通高中数学课程标准(2017 版)》颁布,书中明确指出:“学科核心素养是育人价值的集中体现,是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观念、必备品格和关键能力。”“提升学生的数学素养,引导学生用数学眼光观察世界,用数学思维思考世界,用数学语言表达世界。”“数学学科核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象和数据分析。”

无论是数学眼光、数学思维,还是数学语言,都需要以数学多元表征为载体,在数学活动过程中逐步实现。数学眼光就是抽象,人们运用数学多元表征,把现实世界中事物的数量和数量关系,图形和图形关系抽象到数学内部,形成数学研究



对象;数学思维就是推理,人们从数学研究对象出发,运用数学多元表征,有逻辑地得到研究对象的性质和关系的命题和计算结果,促进数学内部的发展;数学语言就是模型,人们运用数学多元表征,描述现实世界中的故事,建构数学世界和现实世界的桥梁。因此,在当今世界数学课程改革中,数学多元表征越来越受到人们的重视。美国 2010 年颁布的《美国统一核心州课程标准》的数学部分明确将“表征”列为目标要求之一,并结合具体内容详细说明如何进行表征,如:“解决需要计算三个整数的和(其和不超过 20)的文字题,例如使用物体、图画、用含有一个未知数的等式来表征问题。”加拿大安大略省 2005 年颁布的《安大略省数学课程标准》将“表征”作为数学学习过程性目标,指出:“表征有助于学生对数学抽象概念的理解,而且表征的过程同时是培养学生思维的灵活性的过程,当学生恰当地表征数学概念及需要解决的问题时,他们将开始连接有关的思想,建立数学模型解释实际问题情境。”芬兰在《基础教育国家核心课程》中强调“在问题解决过程中使用数学相关概念,体现对数学概念的理解;能用多种方式表示这些数学概念,如用工具、图片、符号、语言、数字或表格。”“能够将观察到的结果和自己的想法通过多种方式与他人进行交流,如动作、语言、文字和符号。”法国中学课程标准中指出:“数学同样有不同于常见语言的各种表达方法要学习(数、符号、图形、表格、图象)……”我国《义务教育数学课程标准(2011 年版)》也提出“课程内容的呈现应注意层次性和多样性”,“教材的呈现可以将实物照片、图形、图表、文字、数学符



号等多种形式结合起来”。这些都充分体现了数学多元表征的目标指向和具体要求。

学习者在进行数学学习时,主要涉及三个方面:数学理解、数学应用和数学创新。数学理解是以数学概念(或命题)的意义建构、多元表征和灵活转换为标志的,数学理解的程度是由数学概念构成的网络联系的数目和强度来确定的。莱什(R.P.T.Lesh)指出,学生必须同时具备以下三个条件才真正理解了一个数学概念:

第一,他必须能将所学数学概念放入不同的表征系统之中;第二,在给定的表征系统内,他能够很好地处理这个概念;第三,他必须很精确地将此概念从一个表征系统转换到另一个表征系统中,即在不同表征系统之间任意切换。

为了促进学生对数学概念的理解,许多学者都建议,在课程建设与教材编写时就应该提供多元表征。

数学多元表征是数学理解的内容,也是理解数学的工具。目前,数学多元表征的研究已经成为数学教育心理学国际研讨组(International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME)的主题,在1989年PME专门成立了数学学习表征的研究工作组,研究主题也逐渐从过去只关注实验情境中多元外在表征对学习影响的研究,转向在真实、日常教学情境中“向多元表征学习”(learning from multi-representations)和“用多元表征学习”(learning with multi-representations)的研究,关注多元表征的教和多元表征的学的实践性研究。

数学应用和创新主要是通过问题解决实现的。而影响数



学应用和创新的根本因素也是数学多元表征和灵活转换。美国 NCTM 在 2000 年的《学校数学课程标准与原则》中指出：“不同的表征将导致不同的思维方式。”建议学生不仅应该学会在问题解决过程中选择、使用与转化各种数学表征，而且能够在不同的表征之间建立广泛的联系。

国际数学教育家蔡金法对国际数学测试结果的深入研究发现，中国学生在“过程受限”问题(process-constrained problems,是指那些通过实施标准算法就能解决的问题)表现很好,但在“过程开放”问题(process-open problems,是指通常不能通过一种算法就可以解决,而是更加需要对问题情境作新探索的问题)中不如美国学生。研究表明,我国学生问题解决的常规能力优于美国学生,而问题解决的创新能力不及美国学生。进一步观察分析,美国学生喜欢使用图示的、表格的、言辞的等直观、具体的表征和与之相应的直接策略,突出非形式化的数学表征;而中国学生擅长使用符号表征和与之相应的抽象策略,过分强调形式化的数学表征。可见,不同的数学表征方式导致不同的数学思维方式,最终导致不同的数学理解、应用和创新能力。

综合来看,数学多元表征以及表征间的相互灵活转换,可以从根本上促进学生数学眼光、数学思维和数学语言的发展,促进学生的数学理解、应用和创新的发展,提升学生的数学素养和实践能力。数学多元表征学习理应成为一条促进学生数学深度学习自然发生,实现数学核心素养持续发展的行之有效的实践范式。

第一章 内涵诠释

如果有一个独立于表征的客观世界,那表征就应该去描述那个世界。

第一节 表 征

《辞海(第6版)》对“表征”解释为“① 揭示;阐明。……② 事物显露在外的征象。”即表征有两层含义:一是作为动词,就是对事物内在本质揭示和阐明的行为和过程;二是作为名词,就是事物显示出来的现象、表现出来的特征,是事物通过一定的形式显示和表现出来的信号,它代表这个事物,并传递这个事物的信息。

Palmer 从认知心理学的观点指出,一般地,表征是指用某一种形式(物理的或心理的),将一种事、物、想法或知识重新表现出来。因此,一定存在一个“表征”世界,也必定存在一个“被表征”的世界。表征的含义,即指在这两个世界的特征或元素之间建立一种对应关系。

我国心理学者荆其诚先生认为,表征(Representation)又



称心理表征或知识表征,是指信息或知识在心理活动中的表现和记载的方式。一个外部客观事物在心理活动中可以具体形象,表象或图形,或者以词语和概念的形式呈现出来。这些形象、表象和图形、词语和符号概念等都是信息的表征。因此,表征是外部客观事物在心理活动中的内部再现,它一方面反映客观事物,代表客观事物,另一方面又是心理活动进一步加工的对象。同一事物,由于信息的来源不同,其表征的方式不同,对它的加工也不相同。不同的表征所具有的共同信息称为表征的内容,而每一个不同表征形式称为“编码”。例如,谈到正方形,有的人可能会在头脑中呈现正方形的桌子、窗户等具体事物,有的人可能会在头脑中呈现大小不一、位置不同的正方形的图形,还有的可能会在头脑中呈现四条边相等、四个角都是 90° 的正方形特征。这些都是“正方形”概念在心理活动中的表现,又叫心理意象,形成了各种信息的联合体。这样,表征就是一种内在心理活动,是人们在心理上运用形象、文字、符号等来表示外部各种各样信息并将它们组织成有内在联系的有意义的知识结构的认知活动,作为活动就包含着活动的过程和活动的方式,同时,表征也把它理解为一种认知活动结果,即经过认知活动而在人们大脑中形成的知识结构及其意义。因此,学生对知识的心理表征就是学生在原有认知结构的基础上将外部的知识信息以自己独特的方式或形式组织起来并建构出一定的结构和意义。

随着信息技术在教育、心理研究的应用,人们已经不再局限研究心理表征了,表征的含义得到了拓展。表征是指可反



复指代某一事物的任何符号或符号集。也就是说,在某一事物缺席时,它代表该事物;那一事物是外在世界的一个特征或者所想象的一个对象(即自身的内心世界)。因此,表征有外在表征与内在表征之别。外在表征是客观世界中对象的一个替代或是主观世界中某个对象的外化,是以语言、文字、符号、图片、具体物、活动或实际情境等形式存在的表征。一般而言,外在表征不是文字符号就是图形符号,其中文字符号的表征较为抽象,它所表征的信息可以从任何知觉形式中取得,而图形符号较为具体,虽然也能从任何知觉形式中取得,但与视觉的关联性较强,因此图形表征也叫视觉化表征。内在表征是指存在于个体头脑里而无法直接观察的心理表征。内在表征也有不同的形式,有些表征是个别的、外显的、能根据规则加以组合的,以及较为抽象的形式;有些则不是个别的、以内隐的方式表征各种事物、具有宽松的组合规则,以及较为具体的形式。

关于表征的构成要素目前存在着很大的争论,主要有以下几种假说。A. 帕维奥的双重代码假说认为,人们具有言语和表象两个平行的认知编码系统,言语系统加工离散的语言信息,表象系统则对具体的客体或事件的信息进行编码、存贮、转换和提取。另一种相对应的学说是单一的命题表征假说,它认为无论是抽象的信息还是形象的信息都是由命题组成的概念系统存贮的,人们之所以具有表象,那是命题或概念的激活所致。此外,还有多种编码说,如斯诺格拉斯提出的多水平模型认为,在不同的认知阶段有不同的表征,即知觉阶段



是对物理特征的表征,工作记忆阶段是对言语表象和视觉表象的表征,而长时记忆阶段是对命题或语义的表征。

儿童的发展从一定程度上再现了人类文明的发展历程。因此,我们可以借助人类文明发展规律来引领儿童的发展。人类交流始于动作手势,其交流表征方式是动作表征,在此基础上逐步发展口语表征和文字表征;而文字的发展始于结绳记事,即用实物表征,在此基础上逐步过渡到用图画记事,即图形表征;人们不断简化图画,形成象形文字,即文字表征;最后抽象成各种符号,形成符号表征;表音文字则是随着表音字母的诞生而发展起来的。随着人类文明尤其是信息技术的不断进步,人们又先后发明了视频表征、音频表征和音视频表征。至此,人类交流表征方式变得越来越丰富。

第二节 数学表征

Cuoco 等认为,学生若要理解某个数学结构,就必须在这个数学结构与一个更易理解的数学结构之间建立一个对应,而数学表征就是这个对应过程。它既不是表征的对象(被表征了的数学结构),也不是表征的目的(较易理解的数学结构),数学表征就存在于这种映射活动之中,数学表征是一个包含对象与其他对象相互转换的“包(packages)”。

Goldin 等综述了数学教育领域对表征的研究,归纳了数学外在表征与数学内在表征的区别。数学外在表征是“指需