Probability and Mathematical Statistics

概率论与数理统计

主编◎许忠好 曾林蕊

华东师范大学出版社

高校教材

Probability and Mathematical Statistics

概率论与数理统计

主编◎许忠好 曾林蕊

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 许忠好, 曾林蕊主编.— 上海: 华东师范大学出版社, 2018

ISBN 978-7-5675-7570-7

I. ①概··· II. ①许··· ②曾··· III. ①概率论②数理统计 IV. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第058448号

概率论与数理统计

主　　编　许忠好　曾林蕊
策划编辑　赵建军
项目编辑　孙小帆
特约审读　石　岩
装帧设计　俞　越

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　上海书刊印刷有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　14
字　　数　286千字
版　　次　2018年6月第1版
印　　次　2018年6月第1次
书　　号　ISBN 978-7-5675-7570-7/O · 283
定　　价　36.00元

出 版 人　王　焰

前言

概率论与数理统计是一门研究和探索客观世界随机现象规律的数学分支, 在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、医学、地质学、气象与自然灾害预报等方面都起到非常重要的作用. 随着社会的进步和科学技术的发展, 特别是在当前的大数据时代, 概率论与数理统计在自然科学和社会科学的各个领域应用越来越广泛.

概率论与数理统计的内容非常丰富, 我们在编写本书时有所筛选, 注重对基本概念、基本原理和基本方法的讲解和运用; 以大量的例题和注记帮助读者轻松掌握重要知识点, 将一些稍难的证明或值得读者去了解的知识点单独放置在“补充”节, 供学有余力的读者参考学习使用, 教师在教学时可以根据学生实际情况和课时数对这部分内容灵活选讲. 这样的编写安排, 旨在期望读者了解概率统计的基本思想, 掌握基本理论和方法, 感知不同于其他数学学科的魅力, 能够运用概率统计的基本原理认识、分析和解决日常生活中存在的问题.

本书前四章由许忠好编写, 后三章由曾林蕊编写, 全书由许忠好统稿. 限于编者水平, 书中内容安排和叙述方式等方面肯定有不妥之处, 敬请读者批评指正. 我们欢迎读者任何有关本书的批评或建议(可发送至电子邮箱zhxu@sfs.ecnu.edu.cn).

在本书编写过程中, 华东师范大学统计学院的领导和同事们给予了极大的支持和帮助, 特别是张日权院长、方方老师和张楠老师仔细审阅了讲义, 并在课堂上试用的同时给出了很多改进意见; 华东师范大学出版社编辑孙小帆女士为本书的编排工作付出了很多辛劳. 两位编者借此机会对以上同志为本书出版所做的工作表示诚挚的谢意.

许忠好　曾林蕊

2018年6月

编写说明

本书是编者结合长期的概率论与数理统计教学经验编写而成的, 既吸取了国内外多部概率论与数理统计教材的优点, 又具有自身独特的风格.

本书体系完整、逻辑严密, 全面、系统地介绍了初等概率论和数理统计的基本内容, 注重对基本概念、基本原理和基本方法的讲解和运用. 本书编者结合自身多年的成功教学经验, 对结构作了不同于国内外其他教材的全新安排. 为便于读者自学和掌握教学重点, 本书将重要知识点以例题或注记的形式给出, 请读者在阅读时要注意. 此外, 每章都附有“补充”一节, 供学有余力或想进一步了解一些概率统计知识的读者参考; 各章节均配有适量的习题, 供读者学习时使用.

本书适合作为高等院校理工科各专业和经济管理类专业的本科生概率论与数理统计课程的教材使用, 同时也适合具有微积分基础的自学者使用.

目录

第一章 事件与概率

概率论起源于17世纪法国数学家帕斯卡(Pascal)和费马(Fermat)之间就赌博问题而展开的书信方式的讨论. 历史上, 概率论的发展历经三个时期. 从17 世纪中期概率论的产生到18世纪末, 概率论主要以计算各种古典概率问题为中心. 这一时期通常被称为古典概率时期; 从18 世纪末到19 世纪末, 矩母函数与特征函数的概念被概率论研究者引入, 并逐渐引进了比较成熟的分析工具, 使概率论的发展进入了一个新的时期, 即分析概率时期. 早期的概率论发展缓慢, 主要是由于对概率的定义没有达成广泛的共识, 直到1933年前苏联概率学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov) 首次给出概率的公理化定义, 为现代概率论的发展奠定了基础. 当然, 概率论的表述方式还有其他不同的公理系统, 本书所采用的是柯尔莫哥洛夫建立的公理化体系.

1.1 随机事件

在介绍概率的公理化定义之前, 我们需要一些基本的概念, 这是本节的任务.

1.1.1 样本空间

自然界中有两类现象, 一类是确定性现象, 即在一定条件下必然发生某一结果的现象. 例如, 水在1个标准大气压下加热到100摄氏度就会沸腾; 太阳从东方升起等都是确定性现象. 另一类是

♣**定义1.1.1** 在一定条件下并不是总出现相同结果的现象, 称之为**随机现象**.

例如,

▶**例1.1.2** 下列现象都是随机现象:

(1) 抛一枚均匀的硬币, 正面向上还是反面向上;

(2) 掷一枚骰子出现的点数;

(3) 一天内进入某购物广场的顾客数;

(4) 某种品牌型号手机的寿命.

不难发现,

♠**注记1.1.3** 随机现象具有两个特点: 出现的结果不止一个; 事先我们并不知道哪个结果会出现.

♠**注记1.1.4** 尽管随机现象的结果事先不可预知, 但是很多随机现象的发生会表现出一定的规律性, 例如, 重复抛一枚均匀的硬币足够多的次数, 我们会发现, 出现正面向上的次数和反面向上的次数大致相当. 随机现象的这种规律性称之为**统计规律性**, 其正是概率统计的研究对象.

为研究随机现象的统计规律性, 我们需要进行随机试验.

♣**定义1.1.5** 对随机现象进行的实验和观察, 称为**随机试验**, 常用大写字母E来表示.

由定义可知,

♠**注记1.1.6** 随机试验具有两个特征: (1)结果具有随机性; (2)可以重复进行.

为了刻画随机试验的试验结果, 我们定义

♣**定义1.1.7** 随机试验的每一个可能结果, 称为**样本点**, 通常记为ω.

▶**例1.1.8** 做下列随机试验:

(1) 抛一枚均匀的硬币, 观察其是正面向上还是反面向上. 我们用H表示正面向上, T表示反面向上, 则H和T都是样本点.

(2) 投掷一枚骰子, 观察其出现的点数, 则$1,2,3,4,5,6$都是样本点.

(3) 观察一天内进入某购物广场的顾客数, 则$0,1,2,\ldots$都是样本点.

(4) 记录某个品牌型号的手机寿命, 则任意非负实数都是样本点.

♣**定义1.1.9** 随机试验的所有样本点组成的集合, 称为**样本空间**, 通常记为Ω.

♠**注记1.1.10** 样本空间来自随机试验.

▶**例1.1.11** 考虑下列随机试验的样本空间

(1) 抛一枚均匀的硬币, 观察其是正面向上还是反面向上.

(2) 投掷一枚骰子, 观察其出现的点数.

(3) 观察一天内进入某购物广场的顾客数.

(4) 记录某个品牌型号的手机寿命.

解 由上例, 我们不难得到样本空间分别为

(1) $\Omega_1=\{H,T\}$.

(2) $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(3) $\Omega_3=\{0,1,2,\ldots\}$.

(4) $\Omega_4=[0,\infty)$. □

♠**注记1.1.12** 根据样本空间所含样本点的个数, 我们将样本空间分为两类, 一类是离散样本空间, 如果其含有有限个或可列个样本点; 另一类是连续样本空间, 如果其含有无穷不可列个样本点. 例如, 上例中$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 都是离散样本空间, 但Ω_4是连续样本空间.

1.1.2 随机事件

样本空间刻画了随机试验的所有可能的结果, 但是通常我们需要考虑其中部分试验结果, 为此, 我们引入随机事件的概念.

♣**定义1.1.13** 随机试验的某些可能的结果组成的集合, 即样本空间Ω中的部分元素所组成的集合, 称为**随机事件**, 简称为**事件**, 通常用大写英文字母A, B, C 等来表示.

显然,

♠**注记1.1.14** 随机事件的本质是集合, 是样本空间Ω的子集.

▶**例1.1.15** 投掷一枚骰子, 观察其出现的点数, 其样本空间为$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. 于是$A = \{2\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{1,3,5\}$ 和$D = \{4,5,6\}$都是随机事件.

♠**注记1.1.16 事件的表示**

事件除了可以用大写英文字母或者列举出样本点来表示以外, 还可以用文字语言来叙述. 例如在例1.1.15中, $A =$"掷得的点数是2", $B =$"掷得的点数是偶数", $C =$"掷得的点数是奇数", $D =$"掷得的点数大于3".

♠**注记1.1.17** 几类特殊事件:

(1) **基本事件**: 只含有一个样本点的事件.

(2) **必然事件**: 包含全部样本点的事件, 即Ω.

(3) **不可能事件**: 不含有任何样本点的事件, 用$\emptyset$来表示.

▶**例1.1.18** 在例1.1.15中, A是基本事件, Ω是必然事件.

♣**定义1.1.19** 如果某次随机试验出现的结果ω包含在随机事件A中, 我们就称**事件A发生了**. 以集合论的语言来说, 即$\omega \in A$.

▶**例1.1.20** 在例1.1.15中, 如果某次掷得的点数是2, 我们就说事件A发生了, B也发生了, 但是C和D都没有发生; 若掷得的点数是4, 我们就说事件B和D发生了, A和C皆未发生.

♠**注记1.1.21** 由上述定义, 读者不难理解我们为什么用样本空间Ω和空集符号$\emptyset$分别来表示必然事件和不可能事件.

从随机事件的定义可知, 随机事件从本质上说是集合, 因而可以依照集合的关系和运算来定义事件间的关系和运算.

♣**定义1.1.22 事件间的关系**

(1) 包含: 若事件A发生必然导致事件B也发生, 则称事件A包含于事件B, 事件B包含事件A或者事件A是事件B的子事件. 记为$A \subset B$或者$B \supset A$.

(2) 相等: 若事件A与B使得$A \subset B$和$B \subset A$同时满足, 则称事件A与B相等或等价, 即是同一事件, 记为$A = B$.

(3) 互不相容: 若事件A与B不能同时发生, 则称事件A与B互不相容.

▶**例1.1.23** 在例1.1.15中, $A \subset B$, A与C互不相容, B与C互不相容.

♣**定义1.1.24** **事件间的运算**

(1) 并: 由事件A与B至少有一个发生构成的事件, 称为事件A与B的并, 记为$A \cup B$.

(2) 交: 由事件A与B同时发生构成的事件, 称为事件A与B的交, 记为$A \cap B$或AB.

(3) 差: 由事件A发生而B不发生构成的事件, 称为事件A与事件B的差, 记为$A \backslash B$.

(4) 对立: 事件$\Omega \backslash A$称为事件A的对立事件, 记为$\overline{A}$.

(5) 对称差: 事件$A \backslash B$和$B \backslash A$的并称为事件A与B的对称差, 记为$A \triangle B$.

♠**注记1.1.25** 由定义,

(1) $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$.

(2) 一般地, $A \backslash B \neq B \backslash A$, 但$A \triangle B = B \triangle A$.

(3) 事件A与B互不相容当且仅当$AB = \emptyset$.

(4) 事件A与B对立, 则一定互不相容; 反之不真.

(5) $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{A} = B$当且仅当$AB = \emptyset$且$A \cup B = \Omega$ 成立.

♠**注记1.1.26** 今后为方便起见, 本书中我们约定:

(1) 当$AB = \emptyset$时, 我们将$A \cup B$ 写为$A + B$.

(2) 当$A \supset B$时, 我们将$A \backslash B$写为$A - B$.

此约定也适用于多个集合的情形.

♠**注记1.1.27** 有了上述约定后, 我们有

(1) $\overline{A} = \Omega - A$.

(2) $\overline{A} = B$当且仅当$A + B = \Omega$.

(3) $A \triangle B = (A \backslash B) + (B \backslash A)$; $A \cup B = (A \triangle B) + (AB)$.

▶**例1.1.28** 接例1.1.15, $A \cup B = B$, $AB = A$, $\overline{B} = C$, $A \backslash B = \emptyset$, $B \backslash A = \{4, 6\}$.

♠**注记1.1.29** 事件间的运算实质上是集合间的运算, 因此满足交换律, 结合律和分配律等运算性质, 限于篇幅, 这里我们不再详述, 只列出今后经常用到的对偶公式; 事件间的关系和运算以及它们的性质自然地可以推广到任意有限个或可列个的情形, 我们这里也不再一一叙述.

★**定理1.1.30** **对偶公式:**

$$(1)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad (2)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

证明 (1)先证$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$. 事实上, 若$\omega\in\overline{A\cup B}$, 则$\omega\notin A\cup B$. 于是$\omega\notin A$且$\omega\notin B$, 即$\omega\in\overline{A}$且$\omega\in\overline{B}$, 从而$\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$. 故$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

再证, $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. 只需将上述证明过程逆叙即可.

(2)的证明有两种方法, 方法一, 可仿照(1)的证明过程, 这里略去; 方法二, 对事件$\overline{A}$和$\overline{B}$直接利用(1)的结论, 并注意到对立事件的对立事件是其自身这个事实, 我们有

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}}=\overline{\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}}=\overline{A\cap B}.$$ □

▶**例1.1.31** 设A,B,C为三个事件, 试用A,B,C 表示下列事件:

(1) A发生.
(2) 仅A发生.
(3) 恰有一个发生.
(4) 至少有一个发生.
(5) 至多有一个发生.
(6) 都不发生.
(7) 不都发生.
(8) 至少有两个发生.

解 不难写出

(1) A.
(2) $A\bar{B}\bar{C}$.
(3) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.
(4) $A\cup B\cup C$.
(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.
(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.
(7) $\overline{ABC}$.
(8) $AB\cup AC\cup BC$. □

随机事件是样本空间Ω的子集, 但是很多场合下我们并不能把样本空间Ω所有的子集都作为随机事件, 否则会给我们后面定义事件发生的概率带来不可克服的困难(关于这一点的详细解释已经超出了本书的范围); 同时, 为使得概率论的基本框架能够适用于解决更多的实际问题, 所考虑的随机事件应该足够丰富. 为此, 我们考虑样本空间Ω 的部分子集所组成的事件类, 它需要满足一定的条件, 才能使其对前面我们介绍的事件的并,交和差等运算封闭.

♣**定义1.1.32** 设Ω表示样本空间, $\mathcal{F}$是由Ω的部分子集组成的集合类, 若$\mathcal{F}$ 满足

(1) $\Omega\in\mathcal{F}$;
(2) $A\in\mathcal{F}$蕴含$\overline{A}\in\mathcal{F}$;
(3) 对任意的$n\geqslant 1$, $A_n\in\mathcal{F}$ 蕴含$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$,

则称$\mathcal{F}$为样本空间Ω上的事件域, 简称为事件域.

▶**例1.1.33** 容易验证,

(1) $\mathcal{F}_0=\{\Omega,\emptyset\}$和$\mathcal{F}_1=\{A:A\subset\Omega\}$都是事件域.
(2) 设$\mathcal{F}$为样本空间Ω 上的任意事件域, 则必有$\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_1$.
(3) 设$\mathcal{F}$为样本空间Ω 上的事件域, 则$\mathcal{F}$对事件的有限并, 有限交, 可列交等运算都封闭.

▶例1.1.34 设$A \subset \Omega$, 且$A \neq \emptyset$, $A \neq \Omega$, 则$\{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\}$构成一个事件域.

♠注记1.1.35 今后, 我们总是假定, 样本空间Ω和事件域$\mathcal{F}$都已给定, 除非特别声明.

为研究问题的方便, 我们有时需要对样本空间进行适当的分割:

♣定义1.1.36 设事件$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$满足

(1) 若$i \neq j$, 则$A_i A_j = \emptyset$;

(2) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

则称事件$A_1, \ldots, A_n$是样本空间Ω 的一组分割.

♠注记1.1.37 显然, 给定样本空间Ω和事件域$\mathcal{F}$, 样本空间Ω的分割可能不是唯一的.

♠注记1.1.38 在结束本节之前, 我们给出概率论中事件的关系和运算与集合论中的集合的关系和运算的对照表, 见表1-1.

表1-1 概率论与集合论相关概念对照表

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间,必然事件	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
$A \subset B$	A发生必然导致B发生	A是B的子集
$A \cup B$	A与B至少有一个发生	A和B的并集
AB	A与B同时发生	A和B的交集
$AB = \emptyset$	A与B互不相容	A与B无共同元素
$A \backslash B$	A发生且B不发生	A与B的差集
$\overline{A}$	A不发生	A的余集

习题1.1

1. 在$0, 1, \ldots, 9$中任取一个数, A表示事件“取到的数不超过3”, B 表示事件“取到的数不小于5”, 求下列事件

$$A \cup B, \quad AB, \quad \overline{A}, \quad \overline{B}.$$

2. 设$\Omega = (-\infty, \infty)$, $A = \{x \in \Omega : 1 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \Omega : 3 < x < 7\}$, $C = \{x \in \Omega : x < 0\}$, 求下列事件

$$\overline{A}, \quad A \cup B, \quad B\overline{C}, \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \quad (A \cup B)C.$$

3. 写出下列事件的对立事件:

(1) A=“掷三枚硬币, 全为正面”;

(2) B="抽检一批产品, 至少有三个次品";

(3) C="射击三次, 至多命中一次".

4. 设I是任意指标集, $\{A_i, i \in I\}$是一事件类, 证明

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A}_i.$$

5. 设$\mathcal{F}$是Ω上的事件域, $A, B \in \mathcal{F}$. 证明: $A \cup B, AB, A\backslash B, A\triangle B \in \mathcal{F}$.

6. 设$\mathcal{F}$是Ω上的事件域, $A, B, C \in \mathcal{F}$. 证明事件运算的分配律:

$$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC), \quad A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C).$$

7. 设$\mathcal{F}$是Ω上的事件域, $B \in \mathcal{F}$. 证明: 集类$\mathcal{F}_B = \{AB : A \in \mathcal{F}\}$是$\Omega_B = \Omega \cap B = B$上的事件域.

1.2 概率及其性质

上一节中, 我们介绍了样本空间和随机事件. 虽然我们不能确定某次随机试验中某个试验结果是否会发生, 但是我们可以确定该结果发生的可能性有多大. 可能性的大小通常用$[0,1]$里的数来衡量, 即概率. 因此, 事件的概率直观上的含义就是其发生可能性的大小. 数学上, 我们有严格的定义:

♣定义1.2.1 概率的公理化定义

设$P(\cdot)$是定义在$\mathcal{F}$上的实值函数, 如果其满足下面三条公理:

(1) **非负性公理:** $P(A) \geqslant 0$

(2) **正则性公理:** $P(\Omega) = 1$

(3) **可列可加性公理:** 若$A_1, \ldots, A_n, \ldots$互不相容, 则

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

则称$P(\cdot)$为**概率测度**或**概率**.

▶例1.2.2 设$\Omega = \{H, T\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \{\Omega, \emptyset, \{H\}, \{T\}\}$, 设$p: 0 < p < 1$, 定义$\mathcal{F}$上的函数$P$满足

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\{H\}) = p, \quad P(\{T\}) = 1 - p.$$

于是由定义知, P是概率.

♠注记1.2.3 本质上, 概率是一个集函数, 即自变量是集合(事件), 取值为实数的函数.

♠注记1.2.4 称三元总体$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为**概率空间**, 其中Ω为样本空间, $\mathcal{F}$为事件域, P是定义在$\mathcal{F}$ 上的概率测度.