应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材

JINGJI SHUXUE WEIJIFEN

# 经济数学——微积分

（第二版）

主　编◎曹海军　黄玉娟
副主编◎周玲丽　张　鑫　尹金生

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

应用技术型高等教育"十三五"精品规划教材

# 经济数学——微积分

## (第二版)


主　编　曹海军　黄玉娟

副主编　周玲丽　张　鑫　尹金生



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

·北京·

## 内容提要

本书以培养学生的专业素质为目的，充分吸收多年来教学实践和教学改革成果。主要特点是把数学知识和经济学、管理学的有关内容有机结合起来，融经济、管理于数学，培养学生用数学知识和方法解决实际问题的能力。

本书内容主要包括一元函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程、多元函数及其微分法、二重积分、无穷级数等。

本书内容全面、结构严谨、推理严密、详略得当，例题丰富，可读性、应用性强，习题足量，难易适度，简化证明，注重数学知识的应用性，可作为普通高等院校经济管理类学科“微积分”课程的教材或教学参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

经济数学. 微积分 / 曹海军, 黄玉娟主编. -- 2版.
-- 北京 : 中国水利水电出版社, 2018.8
应用技术型高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-6659-0

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①曹… ②黄… Ⅲ. ①经济数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材 Ⅳ. ①F224.0 ②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第169071号

**策划编辑:宋俊娥　责任编辑:宋俊娥　封面设计:徐小徐**

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材<br>**经济数学——微积分(第二版)**　**JINGJI SHUXUE——WEIJIFEN** |
| 作　　者 | 主　编　曹海军　黄玉娟<br>副主编　周玲丽　张　鑫　尹金生 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>(北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038)<br>网址:www.waterpub.com.cn<br>E－mail:sales@waterpub.com.cn<br>电话:(010)68367658(营销中心) |
| 经　　售 | 北京科水图书销售中心(零售)<br>电话:(010)88383994、63202643、68545874<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 北京智博尚书文化传媒有限公司 |
| 印　　刷 | 三河市龙大印装有限公司 |
| 规　　格 | 170mm×240mm　16开本　22印张　501千字 |
| 版　　次 | 2014年8月第1版<br>2018年8月第2版　2018年8月第1次印刷 |
| 印　　数 | 0001—3000册 |
| 定　　价 | 56.00元 |

# 第二版前言

本教材第二版是在第一版的基础上，根据新形势下国家对人才培养改革中教材改革的精神和近几年编者的教学实践经验，进行全面修订而成的。在修订中，我们仍然充分考虑高等教育大众化教育阶段的现实状况，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，保留了原有教材的系统和风格。参加本书编写修订的人员都是多年担任经济数学——微积分实际教学的教师，包括教授、副教授等，他们都有较深的理论造诣和较丰富的教学经验。在编写修订时，更注重将数学基本知识和经济、管理学科中的实际应用有机结合起来，主要有以下几个特点：

(1)注重体现应用型本科院校特色，根据经济类和管理类的各专业对数学知识的需求，本着“轻理论、重应用”的原则制定内容体系。

(2)注重内容理论联系实际，在内容安排上由浅入深，与中学数学进行了合理的衔接。在引入概念时，注意了概念产生的实际背景，采用提出问题—讨论问题—解决问题的思路，逐步展开知识点，使得学生能够从实际问题出发，激发学习兴趣；另外在微分学与积分学章节中，重点引入了适当的经济、管理类的实际应用例题和课后练习题，以锻炼学生应用数学工具解决实际问题的意识和能力。

(3)本教材结构严谨，逻辑严密，语言准确，解析详细，易于学生阅读。由于抽象理论的弱化，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，使得内容贴近教学实际，便于教师教与学生学。本教材内容包括函数的极限、一元函数微积分学、微分方程、多元函数微积分学、无穷级数等内容。

(4)在每一章的结束部分，附加了历史上在数学上有杰出贡献的伟大数学家的生平简介，通过了解数学家生平和事迹，可以让学生真正了解数学发展的基本过程，而且能让学生学习数学家追求真理、维护真理的坚忍不拔的科学精神。

(5)为了能更好地与中学数学衔接，在附录Ⅰ中对三角函数的常用公式作了全面总结，并在附录Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ中分别介绍了二阶、三阶行列式，常用的一些平面曲线及其图形，各种类型的不定积分公式，供需要的学生查阅参考。

在修订过程中，我们注意借鉴同类院校的经典系列教材的优点，注重教材改革中的一些成功案例，使得新教材更适合当代大学生人才培养和教学实践的需要，成为适应时代要求又继承传统优点的教材。

为更好地实现与中学数学内容的衔接，教材中对反三角函数的相关内容进行了详细讲述，为保证教学内容更加系统，将微分方程调整到定积分之后，根据现有微积分课程课时要求，对空间解析几何的内容进行适当精简合并，添加到

多元函数微分学的第一节，同时在教材中增加了大量经济管理数学模型的例题和习题。

参加本教材第二版修订的有曹海军（第1、6章），黄玉娟（第2、7章），周玲丽（第4、5章），张鑫（第3、8、9章）。全书由曹海军、黄玉娟统稿并多次修改定稿。最后由尹金生副教授为本教材审稿。在编写过程中，参考和借鉴了许多国内外有关文献资料，并得到了很多同行的帮助和指导，在此对所有关心支持本书的编写、修改工作的教师表示衷心的感谢。

限于编写水平，书中难免有错误和不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

2018年6月

# 目　　录

# 第 1 章

# 函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，研究经济变量的变化趋势，预测经济变量的未来走向，就必然会用到微积分中最基本、最重要的概念之一——极限. 微积分中的许多重要概念均是在极限概念的基础上建立的. 不夸张地说，极限理论是微积分的基石. 本章将介绍函数的概念以及极限的概念、性质、计算方法，并在此基础上讨论函数的连续性.

## 1.1 函数

### 1.1.1 函数

1. 邻域

邻域是高等数学中经常用到的一个概念. 设 $a$ 与 $\delta$ 是实数且 $\delta > 0$，则称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 $a$ 的 $\delta$ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

点 $a$ 称为该邻域的**中心**，$\delta$ 称为该邻域的**半径**. $U(a,\delta)$ 可以在数轴上表示为图1.1.

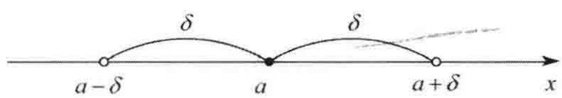


图 1.1

有时需要把邻域的中心去掉，邻域 $U(a,\delta)$ 去掉中心 $a$ 后，称为点 $a$ 的**去心 $\delta$ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x \neq a$. $\mathring{U}(a,\delta)$ 可以在数轴上表示为图 1.2.

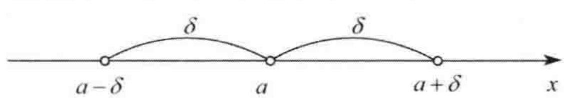


图 1.2

为表述方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 $a$ 的**左 $\delta$ 邻域**，把 $(a,a+\delta)$ 称为点 $a$ 的**右 $\delta$ 邻域**. 如果无须指明 $a$ 的某邻域(去心邻域)的半径，邻域(去心邻域)可记作 $U(a)(\mathring{U}(a,\delta))$.

2. 函数的概念

当我们观察自然现象或生产过程时，常常遇到各种不同的量，有些量在进程中始终保持同一数值，称为**常量**；有些量在进程中取不同的数值，称为**变量**. 通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量，用字母 $x,y,z,\cdots$ 表示变量.

**定义 1.1.1** 设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的非空数集. 如果对于 $D$ 中每个确定的变量 $x$ 的取值，变量 $y$ 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称 $y$ 是 $x$ 的**函数**，记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中，$x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**，$D$ 称为这个函数的**定义域**，记作 $D_f$，即 $D_f=D$.

在函数定义中，对每个取定的 $x_0\in D$，按照对应法则 $f$，总有确定的值 $y_0$ 与之对应，这个值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

当 $x$ 取遍 $D$ 的各个数值时，对应函数值 $f(x)$ 的全体组成的集合称为函数的**值域**，记作 $R_f$，即

$$R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可知，构成函数的两个基本要素是：定义域与对应法则，而值域是由以上二者派生出来的. 若两个函数的对应法则和定义域都相同，则认为这两个函数相同，与自变量及因变量用什么字母表示无关.

函数定义域的确定，取决于两种不同的研究背景：一是有实际应用背景的函数，其定义域取决于变量的实际意义；二是抽象的用算式表达的函数，其定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为**自然定义域**.

例如，函数 $y=\pi x^2$，若 $x$ 表示圆的半径，$y$ 表示圆的面积，则此时定义域 $D=[0,+\infty)$；若不考虑 $x$ 的实际意义，则其自然定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值只有一个，这种函数称为**单值函数**. 否则称为**多值函数**. 例如，变量 $x$ 和 $y$ 之间的对应法则由 $x^2+y^2=1$ 给出，显然对任意 $x\in(-1,1)$，对应的 $y$ 有两个值，所以方程确定了一个多值函数. 今后，若无特别说明，函数均指单值函数.

函数的表示方法主要有三种：表格法、图形法、解析法(公式法). 将图形法与公式法相结合研究函数，可以将抽象问题直观化. 一方面可以借助几何方法研究函数的有关特性，另一方面可以借助函数的理论研究几何问题. 函数 $y=f(x)$的图形，指的是坐标平面上的点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$，函数 $f(x)$的图形通常是平面内的一条曲线.

**例 1.1.1** 确定下列函数的定义域.

(1) $y=\ln(x^2-4x+3)$； (2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

**解** (1)定义域应满足 $x^2-4x+3>0$，解不等式，得定义域为

$$D=(-\infty,1)\cup(3,+\infty);$$

(2)定义域应满足 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-1>0,\end{cases}$ 解不等式组，得定义域为 $D=(1,2]$.

**例 1.1.2** 函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$$

是一个分段函数，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=(-\infty,1)$，图形如图 1.3 所示.

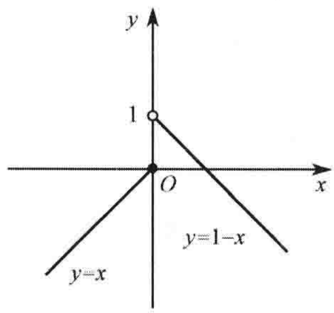


图 1.3

**例 1.1.3** 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，图形如图 1.4所示.

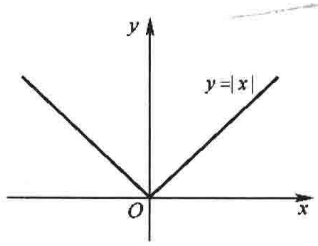


图 1.4

**例 1.1.4** 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1.5所示.

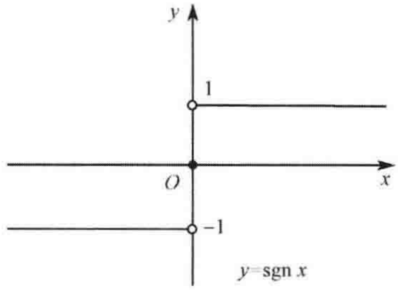


图 1.5

显然,对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $x = \operatorname{sgn}x \cdot |x|$.

**例 1.1.5** 设 $x$ 为任一实数,不超过 $x$ 的最大整数称为 $x$ 的整数部分,记作 $[x]$. 若把 $x$ 看作变量,则函数

$$y = [x]$$

称为**取整函数**,其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \mathbf{Z}$, 图形如图 1.6所示.

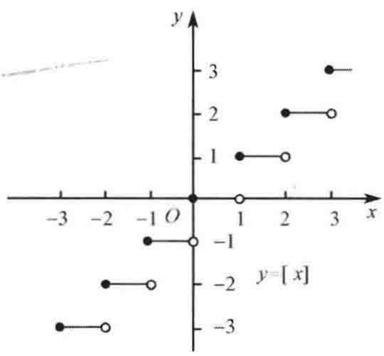


图 1.6

需要指出,例 1.1.2 至例 1.1.5 都是分段函数,对于分段函数要注意以下两点:

(1)分段函数是用若干个表达式表示的一个函数,而不是几个函数.

(2)分段函数的定义域是各段表达式定义域的并集.

3. 函数的几种特性

(1)函数的有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$, 数集 $X \subseteq D$. 如果存在数 $K_1$, 使得对任一 $x \in X$ 都有

$$f(x) \leqslant K_1$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上有**上界**,而 $K_1$ 称为 $f(x)$ 在 $X$ 上的一个**上界**. 如果存在数 $K_2$, 使得对任一 $x \in X$ 都有

$$f(x) \geqslant K_2$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上有**下界**,而 $K_2$ 称为 $f(x)$ 在 $X$ 上的一个**下界**. 如果存在正数 $M$, 使得对任一 $x \in X$ 都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立,则称 $f(x)$ 在 $X$ 上**有界**.如果这样的 $M$ 不存在,则称 $f(x)$ 在 $X$ 上**无界**.这就是说,如果对于任何 $M>0$,总存在 $x_0 \in X$,使得 $|f(x_0)|>M$,则 $f(x)$ 在 $X$ 上**无界**.

例如,函数 $y=\sin x$,对一切 $x \in (-\infty,+\infty)$,恒有 $|\sin x| \leqslant 1$,故 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

显然,$f(x)$ 在 $X$ 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 $X$ 上既有上界又有下界.

(2)函数的单调性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$,区间 $I \subseteq D$,如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$,$x_2$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 $I$ 上是**单调增加**(或**单调减少**)的;如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$,$x_2$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 $I$ 上是**单调不减**(或**单调不增**)的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**,$I$ 称为**单调区间**.

从几何直观上看,单调增加函数的图形是随 $x$ 的增加而上升的曲线,单调减少函数的图形是随 $x$ 的增加而下降的曲线,分别如图 1.7、图 1.8 所示.

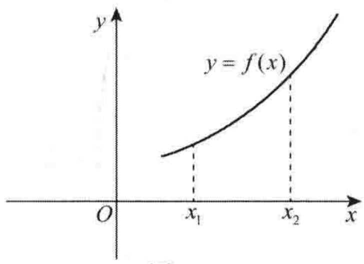


图 1.7

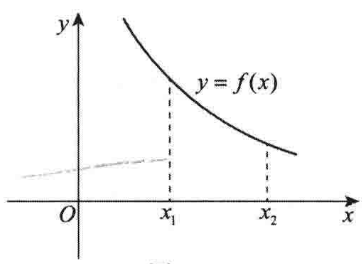


图 1.8

例如,$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少,在 $[0,+\infty)$ 内单调增加,在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内却不具有单调性.

再如,$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$ 内都单调减少,但在定义域 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 内却不具有单调性.

(3)函数的奇偶性.

设 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称(若 $x \in D$,则 $-x \in D$),如果对任一 $x \in D$,都有

$$f(-x)=f(x)\ (\text{或 } f(-x)=-f(x))$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**(或**奇函数**).

从几何直观上看,偶函数的图形关于 $y$ 轴对称(图 1.9),奇函数的图形关于原点对称(图 1.10).

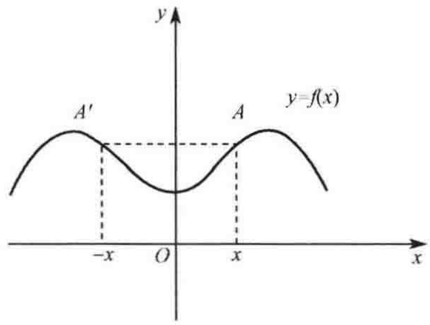


图 1.9

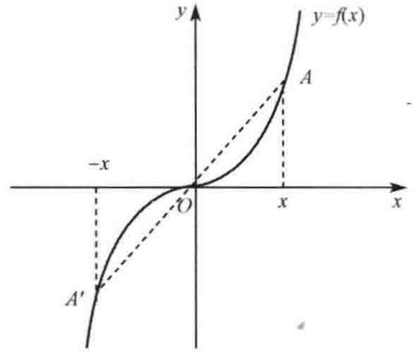


图 1.10

例如，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数，称此类函数为**非奇非偶函数**.

(4)函数的周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在一个正数 $T$，使得对于任一 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，$T$ 称为 $f(x)$ 的一个**周期**. 通常我们说的周期函数的周期是指**最小正周期**.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

### 1.1.2　反函数与复合函数

1. 反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系. 但在研究过程中，选取哪个量作为自变量，哪个量作为因变量往往是由具体问题来决定的. 例如，圆的面积 $A$ 与其半径 $r$ 的函数关系为 $A=\pi r^2\ (r>0)$，这里 $r$ 是自变量，$A$ 是因变量；但如果把半径 $r$ 表示为面积 $A$ 的函数，则有 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}\ (A>0)$，这里 $A$ 是自变量，$r$ 则是因变量. 对这两个函数而言，可以把后一个函数看作是前一个函数的反函数，也可以把前一个函数看作是后一个函数的反函数.

**定义 1.1.2**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，值域为 $R$，如果对于 $R$ 中的每一个 $y$，$D$ 中总有唯一的 $x$，使 $f(x)=y$，则在 $R$ 上确定了以 $y$ 为自变量，$x$ 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R$，或称 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ **互为反函数**.

习惯上用 $x$ 表示自变量，用 $y$ 表示因变量，因此函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数通常表示为