

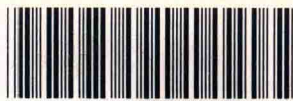
“十三五”国家重点出版物出版规划项目

现代机械工程系列精品教材



# 有限元基础理论与 ANSYS18.0应用

张洪信 管殿柱 主编



GD 02326695



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS

张洪信

“十三五”国家重点出版物出版规划项目  
现代机械工程系列精品教材

# 有限元基础理论与 ANSYS18.0 应用

张洪信 管殿柱 主编



机械工业出版社

本书是“十三五”国家重点出版物出版规划项目，介绍了有限单元法的基础理论与 ANSYS18.0 的应用。全书共分为 7 章：第 1 章对有限元法及 ANSYS 进行了全面概述，以便从总体把握各种要点；第 2 章介绍了有限元法的基础理论及其在结构静力学、结构动力学、结构非线性分析中的应用；第 3 章介绍了 ANSYS 建模与网格划分，对连接板、轴类零件、圆柱齿轮等建模实例的操作进行了具体讲述；第 4 章介绍了结构线性静力分析过程，对连杆受力分析、圆孔应力集中分析等实例的操作进行了具体讲述；第 5 章介绍了动力学分析过程，对机翼模态分析、汽车悬架系统谐响应分析等实例的操作进行了具体讲述；第 6 章介绍了非线性分析过程，对装载时矿石对车厢冲击分析、圆盘塑性变形分析、销与销孔接触分析等实例的操作进行了具体讲述；第 7 章介绍了热分析、流体动力学分析、电磁场分析等过程与实例操作。为了兼顾缺乏弹性力学知识的读者，附录中对有限单元法涉及的弹性力学基本知识做了简要介绍。

本书可作为土木、水利、机械等工科专业本科生及研究生的教材，也可以作为工程设计人员的参考书籍。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

有限元基础理论与 ANSYS18.0 应用/张洪信, 管殿柱主编. —北京: 机械工业出版社, 2018. 8

“十三五”国家重点出版物出版规划项目 现代机械工程系列精品教材  
ISBN 978-7-111-60226-2

I. ①有… II. ①张…②管… III. ①有限元分析-应用软件-高等学校-教材 IV. ①O241. 82-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 128529 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 商红云 责任编辑: 商红云 刘鑫佳

责任校对: 陈越 封面设计: 张静

责任印制: 孙炜

天津嘉恒印务有限公司印刷

2018 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·16.25 印张·441 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-60226-2

定价: 39.80 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线: 010-88379833

读者购书热线: 010-88379649

网络服务

机工官网: [www.cmpbook.com](http://www.cmpbook.com)

机工官博: [weibo.com/cmp1952](http://weibo.com/cmp1952)

教育服务网: [www.cmpedu.com](http://www.cmpedu.com)

金书网: [www.golden-book.com](http://www.golden-book.com)

封面无防伪标均为盗版

# 前 言

本书坚持理论与实践紧密结合的原则,将有限元理论与 ANSYS 操作糅合在一起,以期促进有限元理论与 ANSYS 的学习、应用和普及推广。

有限单元法是当前工程技术领域最常用、最有效的数值方法,已成为现代工程设计技术不可或缺的重要组成部分。ANSYS 软件是集结构、流体、电场、磁场、声场及热传导分析于一体的大型通用有限元分析软件,由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国 ANSYS 公司开发,它能与多数 CAD 软件(如 Pro/ENGINEER、UG、NASTRAN、I-DEAS、AutoCAD)及机械仿真软件(如 ADAMS)接口,实现数据的共享和交换,是现在产品设计中的高级 CAE 工具之一。

本书是为土木、水利、机械等工科专业本科生、研究生和工程技术人员学习有限元法和 ANSYS 操作而编写的教材。编者集多年从事本科生、研究生教学与科研经验,编写时力求做到深入浅出、概念清晰、思路简明、系统性强。论述以 ANSYS18.0 软件为主,兼顾其他版本。为了能够与其他参考资料相互印证,便于 ANSYS 学习,书中诸多例题以操作过程为主线,有的采用米制单位,有的采用英制单位,尽管 ANSYS 程序中并不特别强调物理量的单位。需要特别指出的是,一个分析过程内英制和米制单位不可混用!

本书依次介绍结构静力学问题、结构动力学问题、结构非线性问题、热分析、流体动力学及电磁场问题分析的有限元方法及 ANSYS 操作步骤。第 1 章对有限元法及 ANSYS 进行了全面概述,以便从总体把握各种要点;第 2 章介绍了有限元法的基础理论及其在结构静力学、结构动力学、结构非线性分析中的应用;第 3 章介绍了 ANSYS 建模与网格划分,对连接板、轴类零件、圆柱齿轮等建模过程实例的操作进行了具体讲述;第 4 章介绍了结构线性静力分析过程,对连杆受力分析、圆孔应力集中分析等实例的操作进行了具体讲述;第 5 章介绍了动力学分析过程,对机翼模态分析、汽车悬架系统谐响应分析等实例的操作进行了具体讲述;第 6 章介绍了非线性分析过程,对装载时矿石对车厢冲击分析、圆盘塑性变形分析、销与销孔接触分析等实例的操作进行了具体讲述;第 7 章介绍了热分析、流体动力学分析、电磁场分析等过程与实例操作;书后附录还提供了弹性力学的基本方程、各领域常用量及其单位换算关系。

本书是集体劳动的成果,由张洪信(青岛大学)、管殿柱(青岛大学)主编,参加编写工作的还有谈世哲、赵清海、姜晓天、李文秋、王献红、宋一兵、管玥、刘慧、刘志刚、张开拓。

由于写作时间较短,加之编者水平有限,不足之处在所难免,欢迎广大读者批评指正。

编 者

# 目 录

## 前 言

## 第 1 章 有限元法与 ANSYS 入门 ..... 1

1.1 发展与现状 ..... 1

1.2 矩阵分析法及有限元法分析的一般步骤 ..... 3

1.2.1 矩阵分析法 ..... 3

1.2.2 有限单元法分析的一般步骤 ..... 9

1.3 ANSYS 的基本操作 ..... 10

1.3.1 ANSYS 的安装 ..... 10

1.3.2 ANSYS 的启动、用户界面及退出 ..... 10

1.3.3 ANSYS 的操作方式 ..... 13

1.3.4 ANSYS 的典型分析过程 ..... 14

1.3.5 ANSYS 的文件管理及日志文件使用 ..... 18

1.4 本章小结 ..... 19

1.5 思考与练习 ..... 19

## 第 2 章 有限单元法基础理论 ..... 21

2.1 结构静力学问题的有限元法 ..... 21

2.1.1 平面问题有限元法 ..... 21

2.1.2 轴对称问题有限单元法 ..... 29

2.1.3 空间问题有限元法 ..... 32

2.1.4 等参数有限元方法 ..... 35

2.1.5 单元与整体分析 ..... 38

2.2 结构动力学问题有限元方法 ..... 40

2.2.1 运动方程 ..... 41

2.2.2 质量矩阵 ..... 41

2.2.3 阻尼矩阵 ..... 43

2.2.4 结构自振频率与振型 ..... 45

2.2.5 振型叠加法求解结构的受迫振动 ..... 46

2.3 结构非线性有限单元法 ..... 48

2.3.1 塑性力学问题 ..... 48

2.3.2 大位移问题 ..... 56

2.4 本章小结 ..... 57

2.5 思考与练习 ..... 58

## 第 3 章 ANSYS 的建模 ..... 60

3.1 建模基础 ..... 60

3.1.1 模型的生成 ..... 60

3.1.2 坐标系 ..... 60

3.1.3 工作平面 ..... 63

3.1.4 实体模型 ..... 65

3.1.5 有限元模型 ..... 65

3.2 建立复杂有限元模型 ..... 68

3.3 连接板建模实例 ..... 70

3.4 轴类零件建模实例 ..... 75

3.4.1 自底向上建模 ..... 75

3.4.2 自顶向下建模 ..... 80

3.5 圆柱齿轮建模实例 ..... 82

3.6 本章小结 ..... 89

3.7 思考与练习 ..... 90

## 第 4 章 结构线性静力分析 ..... 91

4.1 结构静力分析过程与步骤 ..... 91

4.1.1 建立模型 ..... 91

4.1.2 施加载荷并求解 ..... 91

4.1.3 检查结果 ..... 93

4.2 连杆受力分析实例 ..... 94

4.3 圆孔应力集中分析实例 ..... 105

4.4 本章小结 ..... 112

4.5 思考与练习 ..... 113

## 第 5 章 动力学分析 ..... 115

5.1 动力学分析的过程与步骤 ..... 115

5.1.1 模态分析 ..... 115

5.1.2 谐响应分析 ..... 118

5.1.3 瞬态动力学分析 ..... 122

5.2 机翼模态分析实例 ..... 127

5.3 汽车悬架系统的谐响应分析 ..... 134

5.4 本章小结 ..... 141

5.5 思考与练习 ..... 142

## 第 6 章 非线性分析 ..... 143

6.1 基本概念 ..... 143

6.2 非线性分析的过程与步骤 ..... 146

6.2.1 建模 ..... 146

6.2.2 加载求解 ..... 146

6.2.3 查看结果 ..... 149

6.3 装载时矿石对车厢的冲击非线性分析

实例 .....	151	7.2 流体动力学分析 .....	221
6.4 圆盘塑性变形分析实例 .....	164	7.2.1 FLUENT 分析的概念与基本 步骤 .....	221
6.5 销与销孔接触分析 .....	177	7.2.2 管内流动分析实例 .....	223
6.6 本章小结 .....	187	7.3 电磁场分析 .....	230
6.7 思考与练习 .....	187	7.3.1 电磁场分析的基本步骤与概念 ...	230
<b>第 7 章 其他问题分析</b> .....	<b>189</b>	7.3.2 2D 静态电磁场分析实例 .....	233
7.1 热分析 .....	189	7.4 DesignXplorer 概述 .....	244
7.1.1 热分析单元 .....	189	7.5 本章小结 .....	248
7.1.2 稳态热分析过程 .....	190	7.6 思考与练习 .....	248
7.1.3 瞬态热分析过程 .....	193	<b>附录</b> .....	<b>250</b>
7.1.4 耦合分析的过程和步骤 .....	197	附录 A 弹性力学的基本方程 .....	250
7.1.5 冷却栅管的热分析实例 .....	200	附录 B ANSYS 程序中常用的量和单位 .....	252
7.1.6 包含焊缝的金属板热膨胀分析 实例 .....	208	<b>参考文献</b> .....	<b>254</b>

# 第 1 章 有限元法与 ANSYS 入门

CAE 即计算机辅助工程，是指工程设计中的分析计算与仿真。CAE 软件可分为专用软件和通用软件两类，前者主要是针对特定类型的工程或产品用于产品性能分析、预测和优化的软件。它以在某个领域中的应用深入而见长，如美国 ETA 公司的汽车专用 CAE 软件 LS/DYNA3D 及 ETA/FEMB 等。通用软件可对多种类型的工程和产品的物理力学性能进行分析、模拟、预测、评价和优化，以实现产品技术创新。它以覆盖的应用范围广而著称，如 ANSYS、PATRAN、NASTRAN 和 MARC 等。

目前在工程技术领域内常用的数值模拟方法有：有限单元法（Finite Element Method, FEM）、边界元法（Boundary Element Method, BEM）和有限差分法（Finite Difference Method, FDM）等，但就其实用性和应用的广泛性而言，主要还是有限单元法。作为一种离散化的数值解法，有限单元法在结构分析等领域中得到了广泛应用。

## 【本章重点】

- 有限元法与 ANSYS 的起源和发展。
- 矩阵分析法分析杆件结构的过程与步骤。
- ANSYS 的界面组成及分析问题的步骤。

## 1.1 发展与现状

离散化的思想可以追溯到 20 世纪 40 年代。1941 年 A. Hrennikoff 首次提出用离散元素法求解弹性力学问题，当时仅限于用杆系结构来构造离散模型，但能很好地说明有限元的思想。如果原结构是杆系，这种方法的解是精确的，发展到现在就是大家熟知的矩阵分析法。究其实质这还不能说就是有限单元法的思想，但结合以后的有限元理论，统称为广义有限单元法。1943 年 R. Courant 在求解扭转问题时为了表征翘曲函数而将截面分成若干三角形区域，在各三角形区域设定一个线性的翘曲函数，这实质上就是有限单元法的基本思想（里兹法的推广），这一思想真正用于工程中是在电子计算机出现后。

20 世纪 50 年代因航空工业的需要，美国波音公司的专家首次采用三节点三角形单元，将矩阵位移法用到平面问题上。同时，联邦德国斯图加特大学的 J. H. Argyris 教授发表了一组能量原理与矩阵分析的论文，为这一方法的理论基础做出了杰出贡献。1960 年美国的 R. W. Clough 教授在一篇题为《平面应力分析的有限单元法》的论文中首先使用“有限单元法”一词，此后这一名称得到广泛认可。

20 世纪 60 年代有限单元法发展迅速，除力学界外，许多数学家也参与了这一工作。这奠定了有限单元法的理论基础，厘清了有限单元法与变分法之间的关系，发展了各种各样的单元模式，扩大了有限单元法的应用范围。

20 世纪 70 年代以来，有限单元法进一步得到蓬勃发展，其应用范围扩展到所有工程领域，成为连续介质问题数值解法中最活跃的分支。由变分法有限元扩展到加权残数法与能量平衡法有限元，由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定性问题、动



力问题和波动问题，由线性问题扩展到非线性问题，分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等，由结构分析扩展到结构优化乃至设计自动化，从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等领域。它使许多复杂的工程分析问题迎刃而解。

有限单元法的基本思想是将物体（即连续的求解域）离散成有限个且按一定方式相互联结在一起的单元的组合，来模拟或逼近原来的物体，从而将一个连续的无限自由度问题简化为离散的有限自由度问题求解的一种数值分析法。物体被离散后，通过对其中各个单元进行单元分析，最终得到对整个物体的分析。网格划分中每一个小的块体称为单元，单元之间相互联结的点称为节点。单元上节点处的结构内力为节点力，外力（有集中力、分布力等）为节点载荷。

数值模拟技术通过计算机程序在工程中得到了广泛的应用。到 20 世纪 80 年代初期，国际上较大型的面向工程的有限元通用软件达到几百种，其中著名的有 ANSYS、NASTRAN、ABAQUS、ASKA、ADINA、SAP 与 COSMOS 等，它们的功能越来越完善，不仅包含多种条件下的有限元分析程序，而且带有功能强大的前处理和后处理程序。由于有限元通用程序使用方便、计算精度高，其计算结果已成为各类工业产品设计和性能分析的可靠依据。大型通用有限元分析软件不断吸取计算方法和计算机技术的最新进展，将有限元分析、计算机图形学和优化技术相结合，已成为解决现代工程学问题必不可少的有力工具。

ANSYS 软件是集结构、流体、电磁场、声场和耦合场分析于一体的大型通用有限元分析软件。由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国 ANSYS 公司开发，它能与多数 CAD 软件接口，实现数据的共享和交换，如 Pro/ENGINEER、UG、I-DEAS、CADDSS 及 AutoCAD 等，是现代产品设计中的高级 CAD 工具之一。

ANSYS 公司成立于 1970 年，总部位于美国宾夕法尼亚州的匹兹堡，致力于 CAE 技术的研发。ANSYS 软件的创始人是美国匹兹堡大学力学系教授、著名有限元权威 John Swanson 博士。如今，ANSYS 软件已经成功地应用于世界工业的各个领域，它广泛应用于结构、热、流体、电池、交通、土木工程、电子、造船等一般工业及科学研究。ANSYS 程序是一个功能强大、应用灵活的设计分析及优化软件包，可以浮动运行于从 PC、工作站到巨型计算机的各种计算机及操作系统。

目前 ANSYS 公司发布了最新的 ANSYS 18.0 版本，在 CAE 功能上引领现代产品研发科技，涉及的内容包括：高级分析、网格划分、优化、多物理场和多体动力学。立足于拥有世界上最多的用户，ANSYS 18.0 不仅为当前的商业应用提供了新技术，而且在以下方面取得了显著进步：

- (1) 继续开发和提供世界一流的求解器技术。
- (2) 提供了针对复杂仿真的多物理场耦合解决方法。
- (3) 整合了 ANSYS 的网格技术并产生统一的网格环境。
- (4) 通过对先进的软硬件平台的支持来实现对大规模问题的高效求解。
- (5) 继续改进最好的 CAE 集成环境——ANSYS Workbench。
- (6) 继续融合先进的计算流体动力学技术。
- (7) 提供了功能更为强大的显式动力学分析模块 ANSYS/LS-DYNA。
- (8) 加速多步求解——ANSYS VT 加速器，基于 ANSYS 变分技术，是通过减少迭代总步数以加速多步分析的数学方法。
- (9) 网格变形和优化。对于很多项目进行优化分析的最大障碍是 CAD 模型不能重新生成，特征参数不能反映那些修改研究的几何改变。
- (10) 采用全新的 Modelica 图形建模编辑器，提供了全新的建模环境，简化了复杂物理系统的建模过程。



(11) 为协同仿真、系统模型识别、系统工程流程连接以及嵌入式软件闭环测试提供了全新的支持。

## 1.2 矩阵分析法及有限元法分析的一般步骤

矩阵分析法适用于由连杆或梁等单元组成的杆件结构，是一种具有朴素的有限元思想的非连续介质的力学分析方法，下面以矩阵分析法为例说明有限元分析的一般步骤。

### 1.2.1 矩阵分析法

杆系结构的矩阵分析方法从广义上说，也可以包括在有限单元法中，并且可以比较形象地说明有限单元法的概念，在实际工程中也有很大的应用价值。

#### 1. 水平杆单元刚度矩阵

如图 1-1 所示的桁架，杆的两端都可以产生位移。为了循序渐进，先研究水平直杆  $ij$ ，如图 1-2 所示。

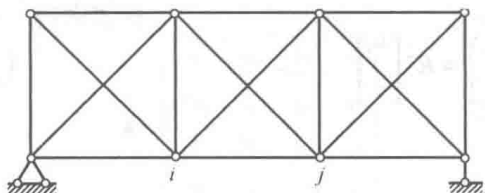


图 1-1 桁架



图 1-2 水平杆单元

杆单元两端各有一个水平节点位移  $u_i$  和  $u_j$ ，即具有两个自由度。两端结节点力分别为  $U_i$  和  $U_j$ 。

杆的受力情况可分解为两种状态。

(1) 状态一： $u_i = u_i$ ， $u_j = 0$ 。这时，节点  $j$  被固定。

单元应变为

$$\varepsilon = -\frac{u_i}{l}$$

单元应力为

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Eu_i}{l}$$

材料力学中以拉应力为正，而有限单元法中，以向右的节点力为正，所以单元左端节点力为

$$U_i = -A\sigma = \frac{AE}{l}u_i$$

单元右端节点力为

$$U_j = A\sigma = -\frac{AE}{l}u_i$$

(2) 状态二： $u_i = 0$ ， $u_j = u_j$ 。这种状态与状态一正好相反。

单元应变为

$$\varepsilon = \frac{u_j}{l}$$

单元应力为

$$\sigma = \frac{Eu_j}{l}$$

单元左端节点力为

$$U_i = -A\sigma = -\frac{AE}{l}u_j$$

单元右端节点力为

$$U_j = A\sigma = \frac{AE}{l}u_j$$

把以上两种状态的结果叠加起来, 得到左、右两端都可变位情况下单元节点力为

$$U_i = \frac{AE}{l}u_i - \frac{AE}{l}u_j$$

$$U_j = -\frac{AE}{l}u_i + \frac{AE}{l}u_j$$

写成矩阵形式得到

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \mathbf{K}^e \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

其中,

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

式 (1-2) 称为单元刚度矩阵。刚度矩阵在有限单元法中是一个比较重要的概念, 它能体现出任何一个自由度方向的节点力与所有节点位移之间的关系。

单元轴力可写为

$$N = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

其中,

$$\mathbf{S} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

在杆件结构中, 通常以轴力作为广义应力, 因此矩阵  $\mathbf{S}$  称为单元应力矩阵。

实际上, 在节点  $i$  和  $j$ , 除了水平位移外, 还可产生垂直位移 (但在小变形条件下, 垂直节点位移对铰接杆的内力无影响)。引入垂直节点位移  $v_i$ 、 $v_j$  和垂直节点力  $V_i$ 、 $V_j$ , 把单元刚度矩阵扩展为四阶形式, 单元节点力为

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

或

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e \quad (1-6)$$

式中,  $\mathbf{F}^e = [U_i \ V_i \ U_j \ V_j]^T$  为节点力;  $\boldsymbol{\delta}^e = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j]^T$  为节点位移。

单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

单元轴力为

$$N = \frac{AE}{l} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \mathbf{S} \boldsymbol{\delta}^e \quad (1-8)$$

## 2. 倾斜杆单元刚度矩阵

如图 1-3 所示, 局部坐标  $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$  与整体坐标  $x$ 、 $y$  之间的位移  $\bar{\boldsymbol{\delta}}$  与  $\boldsymbol{\delta}$  之间存在如下变换关系:

$$\bar{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\delta} \quad (1-9)$$

式中 转换矩阵

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

为正交矩阵, 其中,  $\alpha = \cos\theta$ ,  $\beta = \sin\theta$ 。

则局部坐标系中节点力  $\bar{\mathbf{F}} = [\bar{U}_i \quad \bar{V}_i \quad \bar{U}_j \quad \bar{V}_j]^T$  与整体坐标系中的节点力  $\mathbf{F} = [U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j]^T$  之间的关系为

$$\bar{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\lambda} \mathbf{F} \quad (1-10)$$

局部坐标系中的节点力为

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\boldsymbol{\delta}} \quad (1-11)$$

其中, 局部坐标系中的刚度矩阵  $\bar{\mathbf{K}}^e$  见式 (1-7)。

将式 (1-9) 和式 (1-10) 代入式 (1-11) 得

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\lambda}^{-1} \bar{\mathbf{K}}^e \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\delta}$$

或记为

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta} \quad (1-12)$$

式 (1-12) 反映了单元节点位移与单元节点力的关系, 称为单元刚度方程。其中,  $\mathbf{K}^e = \boldsymbol{\lambda}^{-1}$

$\bar{\mathbf{K}}^e \boldsymbol{\lambda}$  为整体坐标系中的单元刚度矩阵, 即

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

并将式 (1-12) 记为

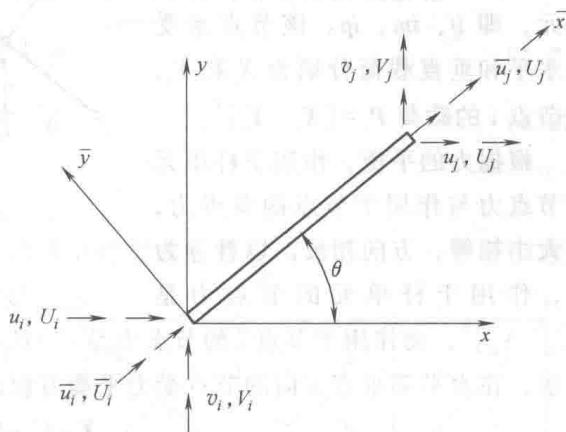


图 1-3 局部坐标与整体坐标

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i \\ \boldsymbol{\delta}_j \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

式中  $i$  点节点力  $\mathbf{F}_i = [U_i \ V_i]^T$ ;  $j$  点节点力  $\mathbf{F}_j = [U_j \ V_j]^T$ ;  $i$  点节点位移  $\boldsymbol{\delta}_i = [u_i \ v_i]^T$ ;  $j$  点节点位移  $\boldsymbol{\delta}_j = [u_j \ v_j]^T$ ;  $\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{K}_{jj} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji} = -\mathbf{K}_{ii}$ 。刚度系数  $\mathbf{K}_{ij}$  的意义是节点  $j$  的单位节点位移在节点  $i$  上产生的节点力, 其余类推。

### 3. 节点平衡方程与整体刚度矩阵

从一个桁架中取一节点  $i$ , 如图 1-4a 所示, 设环绕该点有三个单元, 即  $ij$ 、 $im$ 、 $ip$ 。该节点承受的水平垂直荷载分别为  $X_i$  和  $Y_i$ , 即节点  $i$  的载荷  $\mathbf{P}_i = [X_i \ Y_i]^T$ 。

根据力的平衡, 作用于杆单元的节点力与作用于节点的节点力, 其大小相等, 方向相反。以杆  $ij$  为例, 作用于杆单元的节点力是

$[U_{ij} \ V_{ij}]^T$ , 而作用于节点  $i$  的节点力是  $[-U_{ij} \ -V_{ij}]^T$ 。将节点脱离出来, 其受力分析如图 1-4b 所示, 在水平和垂直方向的节点受力平衡方程为

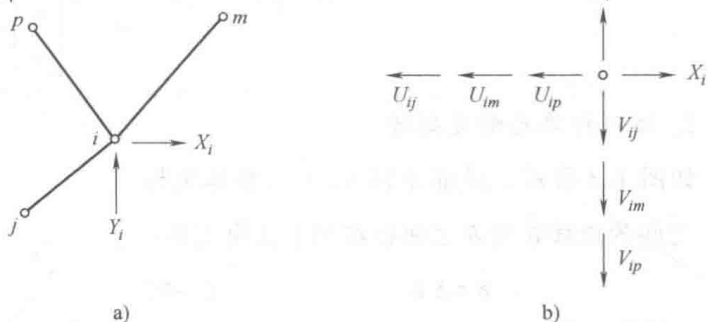


图 1-4 节点  $i$  的平衡

$$\begin{cases} X_i - U_{ij} - U_{im} - U_{ip} = 0 \\ Y_i - V_{ij} - V_{im} - V_{ip} = 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

由式 (1-14) 可知, 杆单元  $ij$  在节点  $i$  的节点力为

$$\mathbf{F}_{ij} = \begin{bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{ii} \boldsymbol{\delta}_i + \mathbf{K}_{ij} \boldsymbol{\delta}_j \quad (1-16)$$

其他单元施于节点  $i$  的节点力同样可以写出, 一起代入式 (1-15), 得到

$$\left( \sum_n \mathbf{K}_{ii} \right) \boldsymbol{\delta}_i + \mathbf{K}_{ij} \boldsymbol{\delta}_j + \mathbf{K}_{im} \boldsymbol{\delta}_m + \mathbf{K}_{ip} \boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{P}_i \quad (1-17)$$

每个节点都有一对平衡方程如上, 对于全部节点  $i=1, 2, \dots, N$  的结构, 得到  $2N$  阶线性方程组, 即结构的节点平衡方程组为

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{P} \quad (1-18)$$

式中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= [\boldsymbol{\delta}_1 \ \boldsymbol{\delta}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\delta}_N]^T \\ \mathbf{P} &= [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \dots \ \mathbf{P}_N]^T \end{aligned}$$

其中  $\boldsymbol{\delta}$  为全部节点位移组成的列阵;  $\mathbf{P}$  为全部节点载荷组成的列阵;  $\mathbf{K}$  为结构的整体刚度矩阵。

### 4. 总体刚度矩阵的合成

由单元刚度矩阵合成结构的整体刚度矩阵通常采用两种方法: 一种为编码法, 另一种为大域变换矩阵法。前者对自由度较少的结构简单明了, 后者特别适合计算机编程运算。下面重点阐述后者。

结构总体刚度矩阵  $\mathbf{K}$  与单元刚度矩阵  $\mathbf{K}^e$  之间的关系为

$$\mathbf{K} = \sum_e (\mathbf{G}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{G}^e \quad (1-19)$$

式中  $G^e$  为单元大域变换矩阵。对平面桁架结构，单元自由度  $m=4$ ，节点自由度为  $h=2$ ，整个结构有  $n$  个节点，则该单元大域变换矩阵为  $m \times (hn)$  维。其中  $ij$  单元假定为全局单元编号中第 3 个，其大域变换矩阵为

$$G^3 = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & \cdots & 2i-1 & 2i & \cdots & 2j-1 & 2j & \cdots & 2n \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

另外，总体结构的载荷向量、位移向量与单元载荷向量、位移向量之间的关系为

$$P = \sum_e (G^e)^T P^e \quad (1-21)$$

$$\delta = \sum_e (G^e)^T \delta^e \quad (1-22)$$

### 5. 边界条件的处理

边界条件是指结构边界上所受到的外加约束。边界上的节点通常有两种情况。一种可以自由变形，如图 1-5 中的节点 5、6、7、8 等，这时只要让这些节点上的载荷等于零就可以了。如果节点 3 作用有外载荷，可令该点的载荷等于规定的载荷  $Q$ 。另一种是边界上的节点，规定了节点位移的数值，如图 1-5 所示为桁架，有

$$u_1 = v_1 = v_4 = 0, v_2 = b$$

这时，是否可以把规定的位移数值直接放到平衡方程  $K\delta = P$  中去呢？当采用迭代法求解时，是可以这样做的。如果采用直接法求解时，就不能这样做了，因为直接法是以全部节点位移都是未知量为基础的。

现在把结构平衡方程组重新排列为

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab}^T & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a \\ P_b \end{bmatrix}$$

式中  $\delta_b$  为已知的节点位移； $\delta_a$  为未知的节点位移； $P_a$  为已知的节点载荷； $P_b$  为未知的支点反力。只要已给出的位移  $\delta_b$  足以阻止结构的刚体移动，则子矩阵  $K_{aa}$  将是非奇异的，可以解出未知的节点位移为

$$\delta_a = K_{aa}^{-1} (P_a - K_{ab} \delta_b)$$

进而求出未知支点反力为

$$P_b = (K_{bb} - K_{ab}^T K_{aa}^{-1} K_{ab}) \delta_b + K_{ab}^T K_{aa}^{-1} P_a$$

上面我们说明了求解平衡方程组的步骤，但在有限单元法中，未知量的个数通常有几百个，甚至几万个，一般都利用计算机进行求解。给定位移的节点和给定载荷的节点实际上是交错出现的。通常为了程序设计的方便，刚度矩阵  $K$  的行序和列序都不改变，而做下述处理。

设结构的平衡方程为

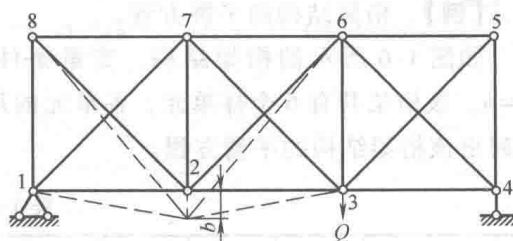


图 1-5 桁架

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & \cdots & k_{1,16} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & \cdots & k_{2,16} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & \cdots & k_{3,16} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & \cdots & k_{4,16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{16,1} & k_{16,2} & k_{16,3} & k_{16,4} & \cdots & k_{16,16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_8 \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

对  $u_1=0$ , 式 (1-23) 做如下变化: 在刚度矩阵  $K$  中, 把与  $u_1$  对应的对角线上的刚度系数  $k_{1,1}$  换为一个极大的数, 例如可换成  $k_{1,1} \times 10^8$ ; 把与  $u_1$  对应的节点载荷换成  $k_{1,1} \times 10^8 \times u_1=0$ , 其余保留不变。对其他边界条件可以类推。

通过上述变化, 式 (1-23) 中节点位移列阵成为未知量, 载荷列阵成为已知向量, 两端左乘刚度矩阵的逆阵可以求出节点位移, 进而得到节点力和单元内力。上述以位移作为未知量求解并表示出节点力和单元内力的方法, 称为“位移法”, 相应的有限单元法为“位移法有限元”。以单元内力为未知量的有限元方法称为“力法有限元”, 工程中采用不多。

【例】桁架结构的平衡方程。

如图 1-6 所示的桁架结构, 支承条件  $u_1=v_1=u_4=v_4=0$ ,  $u_3=b$ 。该桁架共有 6 个杆单元, 各单元的尺寸和倾角见表 1-1。试列出该桁架结构的平衡方程。

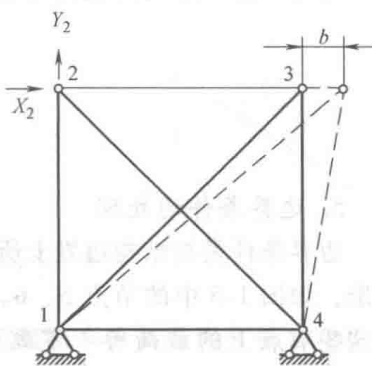


图 1-6 桁架

表 1-1 单元结构尺寸

杆单元	$i$ 点	$j$ 点	面积	长度	弹性模量	倾角 $\theta/(\circ)$	$\alpha = \cos\theta$	$\beta = \sin\theta$	$\alpha^2$	$\beta^2$	$\alpha\beta$
12	1	2	$A$	$l$	$E$	90	0	1	0	1	0
13	1	3	$A$	$\sqrt{2}l$	$E$	45	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
14	1	4	$A$	$l$	$E$	0	1	0	0	0	0
23	2	3	$A$	$l$	$E$	0	1	0	0	0	0
24	2	4	$A$	$\sqrt{2}l$	$E$	315	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
34	3	4	$A$	$l$	$E$	270	0	-1	0	1	0

## 求解步骤

(1) 根据前述列出各单元的刚度矩阵为

$$K^{12} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K^{13} = \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

(2) 列出各单元的大域变换矩阵

$$G^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G^{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

(3) 进而计算整体刚度矩阵  $K$ , 写出结构总体平衡方程



$$\frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1.914 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{bmatrix}$$

(4) 引入边界条件后, 得到

$$\frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1.914 \times 10^8 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914 \times 10^8 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914 \times 10^8 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914 \times 10^8 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ 1.914 \times 10^8 \times b \\ Y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 1.2.2 有限单元法分析的一般步骤

### 1. 结构离散化

结构离散化就是将结构分成有限个小的单元体, 单元与单元、单元与边界之间通过节点连接。结构的离散化是有限单元法分析的第一步, 关系到计算精度与计算效率, 是有限单元法的基础步骤, 包含以下三个方面的内容:

(1) 单元类型选择。离散化首先要选定单元类型, 这包括单元形状、单元节点数与节点自由度数的三个方面的内容。

(2) 单元划分。划分单元时应注意以下几点: ①网格划分越细, 节点越多, 计算结果越精确。网格加密到一定程度后计算精度的提高就不明显, 对应力应变变化平缓的区域不必要细分网格。②单元形态应尽可能接近相应的正多边形或正多面体, 如三角形单元三边应尽量接近, 且不出现钝角; 矩形单元长、宽不宜相差过大等。③单元节点应与相邻单元节点相连接, 不能置于相邻单元边界上。④同一单元由同一种材料构成。⑤网格划分应尽可能有规律, 以利于计算机自动生成网格。

(3) 节点编码。

### 2. 单元分析

通过对单元的力学分析建立单元刚度矩阵  $\mathbf{K}^e$ 。

### 3. 整体分析

整体分析包括以下几方面内容：

(1) 集成整体节点载荷向量  $P$ 。结构离散化后，单元之间通过节点传递力，所以有限单元法在结构分析中只采用节点载荷，所有作用在单元上的集中力、体积力与表面力都必须静力等效地移置到节点上去，形成等效节点载荷。最后，将所有节点载荷按照整体节点编码顺序组集成整体节点载荷向量。

(2) 集成整体刚度矩阵  $K$ ，得到总体平衡方程为

$$K\delta = P$$

(3) 引进边界约束条件，解总体平衡方程，求出节点位移。

## 1.3 ANSYS 的基本操作

ANSYS 的界面与操作无论版本怎样变化，始终以原貌为主，仅做少量的改进，具有较强的继承性，形成了自己固有的风格，具有操作直观易行的特点。本书论述以符号“>”表示进入下一级菜单或选择项，这也是 ANSYS 的默认格式。

### 1.3.1 ANSYS 的安装

下面提供在 Windows 7/Windows10 操作系统下可供参考的 ANSYS18.0 安装步骤：

(1) 将 ANSYS Products 18.0 x64 文件夹拷到硬盘上，Windows7 系统下用虚拟光驱 Daemon Tools 分别加载 Disk1 和 Disk2 镜像文件；Windows10 系统下可直接从右键打开方式中选择 Windows 资源管理器加载镜像文件。

(2) 安装主程序之前检查是否缺少必要程序，单击 PreReqCheck.exe，提示不需要安装其他程序；若缺少必要程序，则单击 InstallPreReqs.exe 安装缺少的程序。

(3) 运行安装主程序，单击 setup.exe。

(4) 弹出初始安装菜单，按照从上至下的顺序，单击 Install ANSYS, Inc. Products，开始安装 ANSYS18.0 程序。单击同意，选择安装目录，单击下一步，在 Hostname 栏中，填入计算机名（计算机名在系统属性里寻找），继续单击下一步，选择 ANSYS18.0 程序的各个安装组件与模块。接下来几步是进行三维 CAD 软件关联配置，可以选择每个三维 CAD 软件的安装目录进行关联配置，如果系统没有安装 CAD 软件也可以选择 skip（跳过）设置，待以后需要时再进行配置。

(5) 确认安装信息，单击 Next 进行下一步，开始自动安装。

(6) 在 Disk1 安装完毕后，依据提示选择 Disk2 继续安装，安装完毕后单击 Exit 退出，完成主程序安装。


(7) 将 ANSYS Products 18.0 x64 文件夹中的 Shared Files 文件夹拷入到安装目录下即完成安装。

安装成功后，可以从“开始菜单>程序>ANSYS18.0”选择启动 Mechanical APDL 18.0、Mechanical APDL Product Launcher 18.0 及 Workbench18.0 平台。

### 1.3.2 ANSYS 的启动、用户界面及退出

ANSYS 软件有很多版本，可运行于从 PC、NT 工作站、UNIX 工作站直至巨型机的各类计算机及操作系统中，数据文件在其所有的产品系列和工作平台上均兼容。目前最新的版本是 ANSYS18.0 版，也是本书所述的默认版本。

第一次启动 ANSYS 软件应进行 ANSYS 产品选择、默认工作路径和文件名设定，路径为：开始>ANSYS 18.0> Mechanical APDL Product Launcher 18.0，启动后出现如图 1-7 所示【18.0: ANSYS Mechanical APDL Product Launcher】对话框。进行一般结构分析时，在【Simulation Environ-

ment:】下拉框中选择“ANSYS”；在【License:】下拉框中选择“ANSYS Multiphysics”；在【Working Directory:】文本框中输入工作文件存取路径；在【Jobname:】文本框中输入文件名，如果不输入则默认文件名为“file”；单击按钮  运行 ANSYS。以后启动路径为：开始>ANSYS 18.0> Mechanical APDL 18.0。启动后出现两个窗口：其一为输出窗口，显示软件的文本输出，通常在其他窗口的后面，需要查看时可提到前面；其二如图 1-8 所示，为 ANSYS 用户界面 (GUI)，下面介绍 GUI 的主要组成部分。

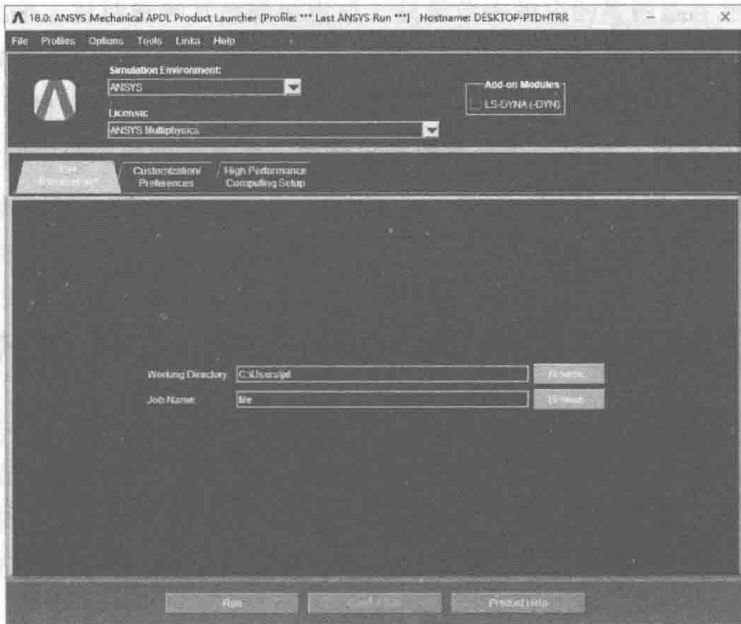


图 1-7 【18.0: ANSYS Mechanical APDL Product Launcher】对话框



图 1-8 ANSYS 的用户界面 (GUI)

### 1. 应用菜单

应用菜单 (Utility Menu) 包含文件管理、选择、显示控制、参数设置等应用功能。该菜单试读结束 需要全本请在线购买: [www.ertongbook.com](http://www.ertongbook.com)