

数 学

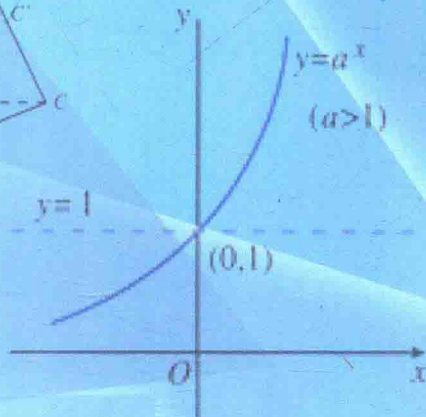
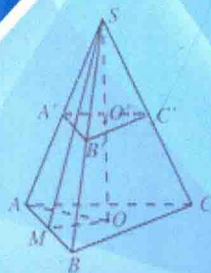
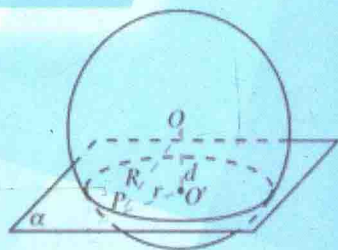
思想方法

SHUXUESIXIANGFANGFA

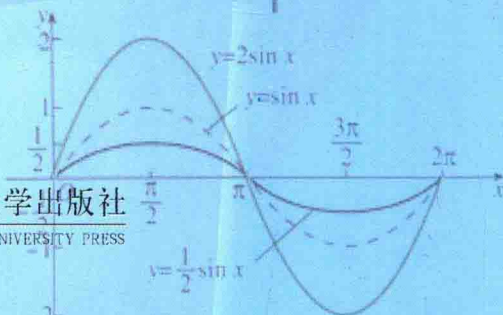
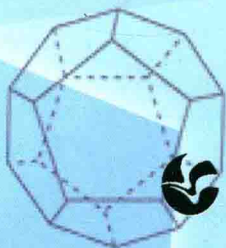
吴文丽 主 编



$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$



$$s = \sqrt{\frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]}$$



首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d]$$

北京市丰台区实验学校高中校本课程

数学思想方法

吴文丽 主编



首都师范大学出版社

CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思想方法/吴文丽主编. —北京: 首都师范大学出版社, 2015. 11

ISBN 978-7-5656-2630-2

I. ①数… II. ①吴… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料
IV. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 267761 号

SHUXUE SIXIANG FANGFA

数学思想方法

吴文丽 主编

责任编辑 孙琳

首都师范大学出版社出版发行

地址 北京西三环北路 105 号

邮编 100048

电话 68418523 (总编室) 68982468 (发行部)

网址 www.cnupn.com.cn

印刷 北京集惠印刷有限责任公司

经销 全国新华书店发行

版次 2015 年 11 月第 1 版

印次 2015 年 11 月第 1 次印刷

开本 710mm×1000mm 1/16

印张 9

字数 151 千

定价 22.00 元

版权所有 违者必究

如有质量问题 请与出版社联系退换

编委会

主编：吴文丽

编委：袁海英 雷群莉 罗越 韩丽颖 李万红
何晓润 宣峰 陈艳霞 张彦海 李雅萍
王力平 李春林 王翥

北京市丰台区实验学校高中校本课程开发方案

一、学校校本课程的名称

数学思想与方法

二、校本课程的方案

(一)背景分析

实验学校的学生知识基础不够扎实，学习兴趣偏弱，对数学学习的认识不够，导致学习上的困难较大。高中新课标的理念是让学生增强感悟的过程，重点是掌握学科的信息和思想方法。而数学思想方法对人的一生都有着极其深远的影响。

数学教育的任务，是让学生学习和掌握数学科学。因此，数学教育不能只谈教育，不谈数学。一个数学教师，必须具备丰富的数学知识，掌握数学技能，更重要的是理解数学的本质，掌握数学思想方法。只有这样，学生才能受到数学科学的影响，了解数学科学的体系，体会数学科学的精髓。

数学教学有两个不同的水平。低级水平是介绍数学概念，陈述数学定理和公式，指出解题的程式和套路，以便通过考试。高级水平是着眼于数学知识背后的数学思想方法，在解决数学问题的过程中进行深层次的数学思考，经过思维训练，获得数学美学的享受。20世纪90年代以来，重视数学思想方法的教学已经成为中国数学教育的一大特色。继承和发扬这一优势，是21世纪数学教育工作者的一项重要任务。

数学教科书里陈述的数学相当程式化，可以说是“冰冷的美丽”。但是，数学家提出这些数学定理和公式的时候却经过了火热的思考。原始的思想，独特的方法，正是这些重大数学发现的核心。数学教育的任务是把数学的学术形态转化为学生易于接受的教育形态，将冰冷美丽的数学恢复为火热的思考。

评价一堂数学课的质量，首先要关注教学过程是否揭示了数学的本质，让学生领会数学内容的精神。这里所说的本质与精神，就是数学思想方法。一堂数学课如果能够使学生体会到其中的数学思想和方法，就属于高品质的数学教学。

哲学是自然科学和社会科学的概括；数学是自然科学和社会科学中数量关系的概括。数学思维就是以数和形为思维对象，以数学的语言和符号为思

维的载体,并以认识和发现数学规律为目的的一种思维。数学思维是以高度概括和极度抽象的形式出现的,这种特点恰恰反映了人类一般抽象思维的典型特征,从而保证了数学思维存在的普遍性和广泛的适应性。现代科学技术发展的一个明显特征是:数学思维正在到处渗透,生活在当代社会的每一个公民,如果不具备一定的数学思维能力是难以在当代社会得以生存和发展的。

综上所述,数学思想方法更是实验学校的学生应该认真感悟的思想方法。

(二)课程目标

1. 知识与技能

(1)了解中学阶段重要的数学思想:函数与方程、转化与化归、分类讨论、数形结合、对称与类比。掌握常见的数学方法:①常用数学方法:配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、参数法、消元法等。②数学逻辑方法:分析法、综合法、反证法、归纳法、演绎法、统筹法等。③数学思维方法:观察与分析、概括与抽象、分析与综合、特殊与一般、类比、归纳和演绎等。

(2)理解数学思想和常见的数学方法在现实生活中的应用。

(3)能够用数学的观点和数学的思想方法观察世界万事万物,初步形成用数学解决问题的能力。

2. 过程与方法

以高一学生的数学知识为基础,通过对实际生活中问题的剖析,进一步领悟数学思想方法解决问题的优势,提升学生的数学学习热情,提高学生的数学成绩,培养学生解决实际问题的能力。

3. 情感与价值观

渗透辩证唯物主义和历史唯物主义的教育,确立科学的发展观;提升学生的数学素养和人生修养。

(三)开发程序

1. 根据学生需求,提出课程名称

根据学校的办学方针、培养目标,对学校和学生的发展需要进行评估,分析学校的教师资源;通过学校与专家、教师、学生等有关人士进行访谈和调查等,获取诊断校本课程设置的信息;综合各类分析和评估资料,提出高中校本课程课题。

2. 考察教师,选择适合教学的教师

在全校范围内采取自愿报名的方式,对本校在数学教学上有一定研究和思考的教师进行考察,选择适合本门课教学的教师,并对教师进行专门的短期培训(教材编写、校本教学等)。

3. 问卷调查,了解学生认知水平

在开课之前,教研组进行对学生和教师的访谈,从认知基础、认知态度以及认知需求等方面对学生和教师进行调查。

4. 分析调查结果,确定课程目标

任课教师将问卷情况进行汇总与分析,确定学生的课程需求。教研组制定出校本课程的总体目标和大致框架。

5. 组织备课,课堂教学

确定课程教学计划,安排课表,根据选定的教学内容进行备课,由教务处定期进行检查,并由教研组定期进行备课指导;定期进行课堂检查。

6. 阶段性评价反馈

对课堂教学效果和 student 认知层次定期进行检查评价;对学生作业及作品进行整理;根据学生认知情况不断修改教学内容和呈现方式,以达到教学的最优化。

(四)教学原则

校本课程与其他课程一样,都是师生共同参与的学校教育活动,因此需要遵循一般教学原则。校本课程又有其自身的特点和规律,在教学上应注意以下原则:

1. 符合发展性原则,培养学生的数学兴趣爱好,培养学生的创新精神。
2. 符合整体性原则,立足于学校科技学科特色教育。
3. 符合适应性原则,将爱国主义教育渗透于教学中,适应学生成长需求。
4. 符合学生均衡性发展,教学与主题教育活动相结合的原则。

(五)课程呈现方式

1. 教学组织方式:共同体学习活动辅助。

2. 教学方式

(1)班级授课:专任教师组织学生实施校本课程教学(讲授、合作探究、网络教学等)。

(2)专题研究活动:学生讲座。

(3)学生实践活动:用数学的思想方法解决一两个实际问题。

3. 授课对象:高中学生。

4. 课时安排:每周一课时。

(六)学校对校本课程的管理与评价

1. 对教师的评价

(1)通过听课、观看活动、说课活动等评价教师开发的课程方案是否符合学生实际需求和知识结构,是否创设了适合教学的环境和资源,是否关注学

生的活动参与度，课堂气氛是否融洽、宽松。

(2)通过学生的问卷调查、学生活动参与层次、活动作品展示等观察学生的学习层次与效果，对教师教学效果进行评价。

(3)通过对教师的教案、课件、课堂资源、课后反思和公开课材料对教师的经验总结、教学评价反馈能力进行评价。

2. 对学生的评价

采取阶段性评价和全面发展性评价相结合的方式，注重学生之间的差异性，不仅关注学生的学习成果，更重视学生在学习过程中的感兴趣程度和积极参与程度。注重从学习目标的三个维度(知识与技能、过程与方法、情感与价值观)出发，评价学生的学习效果。具体评价内容如下：

(1)自评：通过谈收获体会展示成果。

(2)互评：以共同体小组为单位，根据本组组员在学习活动中的参与表现，进行小组组员间互评。

(3)教师评价：根据学生课堂参与能力和态度、作业完成和作品制作的重视程度等方面对学生进行评价。

按照自评 40%、互评 30%、教师评价 30%的比例为学生的学习情况评出 A、B、C、D 四个等级。

丰台实验学校
高中数学思想与方法校本课程计划

课程计划		课时	责任人
数 学 思 想	数形结合思想	4	李万红 雷群莉
	分类讨论思想	4	韩丽颖
	函数与方程思想	4	王 嵩 何晓润
	化归与转化思想	4	王力平 李春林
	对称的思想	4	吴文丽
	哲学思想	4	吴文丽
数 学 方 法	特殊与一般	3	袁海英
	统计方法	3	李雅萍
	概括与抽象	3	宣 峰
	数学建模	4	王 嵩
	换元法	2	陈艳霞
	配方法	2	罗 越
	待定系数法	2	张彦海
	统筹法	4	吴文丽

目 录

第一讲 分类讨论思想方法 / 1

第二讲 化归与转化思想 / 8

- 第一课时 未知与已知的转化 / 9
- 第二课时 数与形的转化 / 13
- 第三课时 数学各分支之间的转化 / 17
- 第四课时 正与反、一般与特殊、整体与局部的转化 / 22

第三讲 函数与方程思想 / 27

- 第一课时 一元二次方程实根分布问题(一) / 28
- 第二课时 一元二次方程实根分布问题(二) / 30
- 第三课时 函数与方程思想的应用(一) / 32
- 第四课时 函数与方程思想的应用(二) / 34

第四讲 数学思想——特殊与一般 / 38

- 第一课时 集合与函数 / 38
- 第二课时 函数与三角函数 / 40
- 第三课时 不等式、数列、立体几何与解析几何 / 42

第五讲 数形结合 / 45

- 第一部分 数形结合思想在初中数学中的应用 / 45
- 第二部分 数形结合思想在高中数学中的应用(共三课时) / 48
 - 第一课时 一元二次不等式的解法 / 48
 - 第二课时 集合中的“数形结合”应用举例 / 50
 - 第三课时 数形结合在函数与方程中的应用 / 52

第六讲 抽象与概括 / 54

第七讲 待定系数法 / 58

第一课时 确定函数的解析式 / 58

第二课时 解不等式 / 59

第八讲 配方法 / 62

第一课时 配方法在二次方程、二次不等式、二次函数中的应用 / 62

第二课时 配方法在三角函数、圆、椭圆、函数中的应用 / 64

第九讲 换元法 / 68

第一课时 换元法及换元法在代数中的应用 / 68

第二课时 换元法在函数上的应用 / 71

第三课时 换元法在数列、不等式上的应用 / 74

第十讲 统计方法 / 77

第一课时 抽样方法 / 78

第二课时 图表法 / 79

第三课时 回归分析方法 / 82

第十一讲 统筹法 / 87

第一课时 统筹法的概念 / 87

第二课时 网络图的绘制 / 90

第三课时 网络图的计算 / 91

第四课时 网络图的分析 / 95

第十二讲 对称的思想方法 / 101

第一课时 什么是对称 / 101

第二课时 带形图案(或花边图案、带饰)与带群 / 105

第三课时 平面装饰图形(或壁纸图案、花布)与平面晶体群 / 110

第十三讲 数学美在哲学 / 120

第一讲 分类讨论思想方法

韩丽颖

在解答某些数学问题时,有时会有多种情况,对各种情况加以分类,并逐类求解,然后综合得出结论,就是分类讨论法。分类讨论是一种逻辑方法,也是一种数学思想。有关分类讨论思想的数学问题具有明显的逻辑性、综合性、探索性,能训练人的思维条理性和概括性,所以在高考中占有重要的地位。

分类原则:分类的对象是确定的,标准是统一的,不遗漏,不重复,分层次,不越级讨论。

分类方法:明确讨论对象,确定对象的全体 → 确定分类标准,正确进行分类 → 逐步进行讨论,获取阶段性结果 → 归纳小结,综合得出结论。

一、再现性题组

1. 集合 $A=\{x \mid |x| \leq 4, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid |x-3| \leq a, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \supseteq B$, 那么 a 的范围是_____。

- A. $0 \leq a \leq 1$ B. $a \leq 1$ C. $a < 1$ D. $0 < a < 1$

2. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $p = \log_a(a^3 + a + 1)$, $q = \log_a(a^2 + a + 1)$, 则 p 、 q 的大小关系是_____。

- A. $p = q$ B. $p < q$ C. $p > q$

D. 当 $a > 1$ 时, $p > q$; 当 $0 < a < 1$ 时, $p < q$

3. 函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} + \frac{\tan x}{|\tan x|} + \frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是_____。

4. 若 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^n \theta - \sin^n \theta}{\cos^n \theta + \sin^n \theta}$ 的值为_____。

- A. 1 或 -1 B. 0 或 -1 C. 0 或 1 D. 0 或 1 或 -1

5. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的值域是_____。

- A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
C. $(-\infty, +\infty)$ D. $[-2, 2]$

6. 正三棱柱的侧面展开图是边长分别为 2 和 4 的矩形, 则它的体积

为_____。

- A. $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ B. $\frac{4}{9}\sqrt{3}$ C. $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ D. $\frac{4}{9}\sqrt{3}$ 或 $\frac{8}{9}\sqrt{3}$

7. 过点 $P(2, 3)$, 且在坐标轴上的截距相等的直线方程是_____。

- A. $3x-2y=0$ B. $x+y-5=0$
C. $3x-2y=0$ 或 $x+y-5=0$ D. 不能确定

二、示范性题组

例 1 设 $0 < x < 1$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小。

【分析】对数函数的性质与底数 a 有关, 应分两类讨论。

【解】 $\because 0 < x < 1 \quad \therefore 0 < 1-x < 1, 1+x > 1$ 。

①当 $0 < a < 1$ 时, $|\log_a(1-x)| - |\log_a(1+x)| = \log_a(1-x) - [-\log_a(1+x)] = \log_a(1-x^2) > 0$;

②当 $a > 1$ 时, $|\log_a(1-x)| - |\log_a(1+x)| = \dots$

由①②可知, $\dots$

例 2 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素, $A \cap B$ 含有 4 个元素, 试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数: ① $C \subset A \cup B$ 且 C 中含有 3 个元素; ② $C \cap A \neq \emptyset$ 。

【分析】根据已知并结合集合的概念, 可知 C 中的元素分为两类: ①属于 A 的元素; ②不属于 A 而属于 B 的元素。根据含 A 中元素的个数 1、2、3, 将取法分为三种。

【解】 $C_{12}^1 \cdot C_8^2 + C_{12}^2 \cdot C_8^1 + C_{12}^3 \cdot C_8^0 = 1084$

【注】本题是“包含与排除”的基本问题, 正确解题的前提是正确分类, 达到分类完整及每类互斥的要求。并且要确定如何取 C 中元素。

例 3 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 是前 n 项的和。

①证明: $\frac{\lg S_n + \lg S_{n+2}}{2} < \lg S_{n+1}$; ②是否存在常数 $c > 0$, 使得

$\frac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} = \lg(S_{n+1} - c)$ 成立? 并证明结论。

【分析】先将要证明的不等式和讨论的等式进行等价变形; 再应用比较法求解。

【解】设公比为 q , 则 $a_1 > 0, q > 0$ 。

①过程略。

②要使 $\frac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} = \lg(S_{n+1} - c)$ 成立, 则必有 $(S_n - c)$

$$(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2。$$

分两种情况讨论如下:

当 $q=1$ 时, $S_n=na_1$, 则

$$(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2=(na_1-c)[(n+2)a_1-c]-[(n+1)a_1-c]^2=-a_1^2<0$$

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ 则 } (S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2 = \left[\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}-c\right]\left[\frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}-c\right]-\left[\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}-c\right]^2 = -a_1q^n[a_1-c(1-q)]。$$

$$\because a_1q^n \neq 0 \quad \therefore a_1-c(1-q)=0, \text{ 即 } c=\frac{a_1}{1-q}$$

$$\text{而 } S_n-c=S_n-\frac{a_1}{1-q}=-\frac{a_1q^n}{1-q}<0 \quad \therefore \text{对数式无意义。}$$

综上所述, 不存在常数 $c>0$, 使得 $\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$ 成立。

【注】本例因所用公式的适用范围而导致分类讨论。该题文科考生改问题为: 证明 $\frac{\log_{0.5} S_n + \log_{0.5} S_{n+2}}{2} > \log_{0.5} S_{n+1}$ 。

例 1、例 2、例 3 属于数学概念、定理、公式、运算性质、法则等是分类讨论的问题或者分类给出的, 我们解题时应按要求进行分类(概念、性质型)。

例 4 设函数 $f(x)=ax^2-2x+2$, 对于满足 $1<x<4$ 的一切 x 值都有 $f(x)>0$, 求实数 a 的取值范围。

【分析】含参数的一元二次函数在有界区间上的值域问题, 先对开口方向进行讨论, 再对其抛物线对称轴的位置进行分类讨论(也属于数形结合法)。

$$\text{【解】当 } a>0 \text{ 时, } f(x)=a(x-\frac{1}{a})^2+2-\frac{1}{a}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{a} \leq 1, \\ f(1)=a-2+2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 1 < \frac{1}{a} < 4, \\ f(\frac{1}{a})=2-\frac{1}{a} > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{1}{a} \geq 4, \\ f(4)=16a-8+2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\therefore a \geq 1 \text{ 或 } \frac{1}{2} < a < 1 \text{ 或 } \emptyset, \text{ 即 } a > \frac{1}{2};$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } \begin{cases} f(1)=a-2+2 \geq 0, \\ f(4)=16a-8+2 \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } \emptyset;$$

当 $a=0$ 时, $f(x)=-2x+2$, $f(1)=0$, $f(4)=-6$, $\therefore$ 不合题意。

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $a > \frac{1}{2}$ 。

例 5 解不等式 $\frac{(x+4a)(x-6a)}{2a+1} > 0$ (a 为常数, $a \neq -\frac{1}{2}$)。

【分析】 含参数的不等式, 参数 a 决定了 $2a+1$ 的符号和两根 $-4a$ 、 $6a$ 的大小, 故对 $a > 0$ 、 $a = 0$ 、 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 、 $a < -\frac{1}{2}$ 分别加以讨论。

【解】 $2a+1 > 0$ 时, $a > -\frac{1}{2}$; $-4a < 6a$ 时, $a > 0$ 。

所以分以下四种情况讨论:

当 $a > 0$ 时, $(x+4a)(x-6a) > 0$, 解得 $x < -4a$ 或 $x > 6a$ 。

当 $a = 0$ 时, $x^2 > 0$, 解得 $x \neq 0$ 。

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $(x+4a)(x-6a) > 0$, 解得 $x < 6a$ 或 $x > -4a$ 。

当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, $(x+4a)(x-6a) < 0$, 解得 $6a < x < -4a$ 。

综上所述, ……

例 6 在 xOy 平面上给定曲线 $y^2 = 2x$, 设点 $A(a, 0)$, $a \in \mathbf{R}$, 曲线上的点到点 A 的距离的最小值为 $f(a)$, 求 $f(a)$ 的函数表达式。

【分析】 求两点间距离的最小值问题, 先用公式建立目标函数, 转化为二次函数在约束条件 $x \geq 0$ 下的最小值问题, 从而展开对参数 a 的取值讨论。

【解】 设 $M(x, y)$ 为曲线 $y^2 = 2x$ 上任意一点, 则

$$|MA|^2 = (x-a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + 2x = x^2 - 2(a-1)x + a^2 = [x - (a-1)]^2 + (2a-1)$$

由于 $y^2 = 2x$ 限定 $x \geq 0$, 所以分以下情况讨论:

当 $a-1 \geq 0$ 时, $x = a-1$ 取最小值, 即 $|MA|_{\min}^2 = 2a-1$;

当 $a-1 < 0$ 时, $x = 0$ 取最小值, 即 $|MA|_{\min}^2 = a^2$;

综上所述, 有 $f(a) = \begin{cases} \sqrt{2a-1} & (a \geq 1), \\ |a| & (a < 1). \end{cases}$

【注】 例 4、例 5、例 6 属于含参问题, 应结合参数的意义及对结果的影响分类讨论(含参型)。

例 7 在 6 名运动员中, 选 4 人参加 4×100 米接力, 其中甲不跑第一棒, 乙不跑第四棒, 共有多少种参赛方法?

【分析】 本题中甲、乙两名运动员是特殊元素, 第一棒、第四棒是两个特殊位置, 所以可依据特殊元素、特殊位置分类, 要先特殊后一般, 先选后排, 合理分类。

【解】解法一：依据甲运动员跑第几棒可分为两类。

(1) 甲跑第四棒时，有 60 种参赛方法；

(2) 甲不跑第四棒不跑第一棒，选派第四棒有 4 种方法，选第一棒有 4 种不同方法，余下的中间两棒在剩下的 4 人中任意选排有 12 种方法，共有 192 种参赛方法。

综上可得，共有 252 种参赛方法。

解法二：依据甲乙两人参赛方式，可分为三类。

(1) 甲乙两人无人参赛，共有 24 种参赛方法；

(2) 甲乙两人只有一人参赛，共有 144 种参赛方法；

(3) 甲乙两人都参加比赛，共有 84 种参赛方法。

综上可得，共有参赛方法 252 种。

例 8 设 $a \geq 0$ ，在复数集 $\mathbf{C}$ 中，解方程： $z^2 + 2|z| = a$ 。

【解】解法一： $\because z \in \mathbf{R}$ ，由 $z^2 + 2|z| = a$ 得 $z^2 \in \mathbf{R}$ ；

$\therefore z$ 为实数或纯虚数。

当 $z \in \mathbf{R}$ 时， $|z|^2 + 2|z| = a$ ，解得： $|z| = -1 + \sqrt{1+a}$

$\therefore z = \pm(-1 + \sqrt{1+a})$ 。

当 z 为纯虚数时，设 $z = \pm yi (y > 0)$ ， $\therefore -y^2 + 2y = a$

解得： $y = 1 \pm \sqrt{1-a} \quad (0 \leq a \leq 1)$

由上可得， $z = \pm(-1 + \sqrt{1+a})$ 或 $\pm(1 \pm \sqrt{1-a})i$

解法二：设 $z = x + yi$ ，代入得 $x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = a$ ；

$$\therefore \begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} = a, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

当 $y = 0$ 时，……

【注】本题用标准解法(设 $z = x + yi$ ，代入原式得到一个方程组，再解方程组)过程十分烦琐，而挖掘隐含信息，对 z 分两类讨论则简化了数学问题(简化型)。

三、巩固性题组

1. 若 $\log_a \frac{2}{3} < 1$ ，则 a 的取值范围是_____。

A. $(0, \frac{2}{3})$

B. $(\frac{2}{3}, 1)$

C. $(0, \frac{2}{3}) \cup (1, +\infty)$

D. $(\frac{2}{3}, +\infty)$

2. 非零实数 a, b, c , 则 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的值组成的集合是_____。

- A. $\{-4, 4\}$ B. $\{0, 4\}$ C. $\{-4, 0\}$ D. $\{-4, 0, 4\}$

3. $f(x) = (a-x) |3a-x|$, a 是正常数, 下列结论正确的是_____。

- A. 当 $x=2a$ 时有最小值 0 B. 当 $x=3a$ 时有最大值 0
C. 无最大值, 且无最小值 D. 有最小值但无最大值

4. 设 $f_1(x, y) = 0$ 是椭圆方程, $f_2(x, y) = 0$ 是直线方程, 则方程 $f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) 表示的曲线是_____。

- A. 只能是椭圆 B. 椭圆或直线
C. 椭圆或一点 D. 还有上述外的其他情况

5. 函数 $f(x) = ax^2 - 2ax + 2 + b$ ($a \neq 0$) 在闭区间 $[2, 3]$ 上有最大值 5, 最小值 2, 则 a, b 的值为_____。

- A. $a=1, b=0$ B. $a=1, b=0$ 或 $a=-1, b=3$
C. $a=-1, b=3$ D. 以上答案均不正确

6. 方程 $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ 的整数解的个数是_____。

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 5

7. 到空间不共面的 4 个点距离相等的平面的个数是_____。

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

8. $z \in \mathbf{C}$, 方程 $z^2 - 3|z| + 2 = 0$ 的解的个数是_____。

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

9. 解关于 x 的不等式: $2\log_a^2(2x-1) > \log_a(x^2-a)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

10. 设首项为 1, 公比为 q ($q > 0$) 的等比数列的前 n 项和为 S_n , 又设 $T_n = \frac{S_n}{S_{n+1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 。