

高等学校教学用书

现代控制理论基础

XIANDAI KONGZHI

LILUN JICHU

许世范 李春阳 编著

中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

现代控制理论基础

许世范 李春阳 编著

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书系统地论述了线性系统理论及最优控制理论。书中给出了一些实用的分析与综合的方法,并备有工程应用实例及习题,以便读者深入理解其基本内容及掌握其应用途径。

本书可作为高等学校自动化类及其它相关专业的研究生和高年级大学生学习现代控制理论课程的教科书或教学参考书,也可供专业科技人员学习现代控制理论参考。

责任编辑 胡玉雁
责任校对 周俊平

高等学校教学用书
现代控制理论基础

许世范 李春阳 编著

中国矿业大学出版社出版

江苏省新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 $1/16$ 印张25.25 字数614千字

1990年11月第一版 1990年11月第一次印刷

印数:1—3000册

ISBN 7-81021-381-4

TP·14

定价:4.95元



序 言

“控制”这个词对人们来说是非常熟悉的，因为它是在人类生活的各个领域里涉及很广泛的一个概念。可以说，自古以来在人类的各项活动中，不论是社会活动，生产活动，科学研究，乃至日常生活，无不包含着这个内容。但是，作为一门科学，人们自觉地、系统地去研究它，并形成独自完整的理论体系则是很久以后的事。如果将J.瓦特发明的离心调速器（1769年）作为最早的工业自动控制装置。那么，在经历了一百多年之后，直到本世纪的4、50年代才形成完整、独立的控制理论，这就是以频域方法为基础的古典控制理论。毫无疑问，古典控制理论在解决十分广泛的控制问题上是非常有效的，并且已为广大从事自动控制的工程技术人员所掌握。它的广泛应用给人类带来了巨大的社会的和经济的效益。它的突出成就是导致自动化技术的诞生和发展。但是，也正是这种社会的进化过程对控制理论不断地提出新的更加严格的要求，使古典控制理论面临着挑战。从50年代兴起的航天技术以及其它生产技术的发展，一方面使控制对象变得更加复杂，另一方面对控制的要求提出了更加苛刻的条件。例如非线性的，时变的，或者分布参数的系统的控制问题，对系统本身或其周围环境的不确定因素的适应控制问题，多输入多输出（MIMO）系统的分析与综合的问题，以及实现控制的某种目标函数意义下的最优化问题等等，都不是单纯依赖古典控制理论所能解决的。面对这些挑战，控制理论必须向前发展，而在这一时期整个科学的进步，特别是现代数学和计算机技术的成就恰好为控制理论的发展提供了强有力的工具。正是在这种历史背景下，现代控制理论应运而生。在5、60年代很多科学家为此做出了杰出的贡献，其中应特别提出的有庞特里亚金（Понтрягин）的极值原理，贝尔曼（Bellman）的动态规划以及卡尔曼（Kalman）的滤波，能控性与能观测性理论等。正是他们的这些理论上的突破性的成果奠定了现代控制理论的基础，并成为控制理论由古典控制理论发展到现代控制理论的里程碑。现代控制理论（Modern Control Theory）这个名称就是在1960年召开的美国自动化大会上确定下来的。至今20多年来控制理论不论在理论上还是在应用方面一直处于十分活跃的发展状态。它不仅在航天与航空技术上取得了举世瞩目的惊人成就，而且在诸如电气，机械，化工，冶金，交通等工程系统以至生物工程，企业管理和社会科学等广泛领域内成功地应用都显示出巨大的魅力。可以毫不夸张地说，控制理论已经成为渗透到各个学科领域的横向科学。显然，控制理论的发展与成就标志着人类对客观世界的认识能力和改造能力的进一步提高。因此它也必然要对人类的认识论和方法论给以重大影响。

当然，随着科学技术的进一步发展，对控制理论又提出很多新的更高的要求，使之面临新的挑战。对控制理论工作者来说，这无疑是一个激励。给他们在这方面从事开拓性的工作提供机会。这里值得一提的是1986年9月在美国桑塔卡拉拉（Santa Clara）大学召开的一次会议。在这次有52位著名的控制理论专家参加的会议上讨论了控制理论的发展和

当前面临的问题。他们在“当今和未来的挑战——集体的观点”的报告中列举了7个课题是很有参考价值的。现将这7个课题分列于下,相信会有益于读者。这些课题是:1.多变量鲁棒、自适应和容错控制;2.非线性与随机控制;3.分布参数系统的控制;4.含有离散变量和离散事件的控制系统;5.信号处理与通讯;6.分布信息的处理及决策结构;7.系统的集成、实验和实现。

本书是在作者多年为研究生和高年级大学生讲课用的讲义基础上几经修改、补充而成。它可作为自动化专业及包括企业管理等非自动化专业的硕士研究生及大学生学习现代控制理论基础课程的教材。在选材上,在满足教学大纲要求前提下补充了一些新的内容,同时在叙述上注意了由浅入深,并舍弃了一些不必要的繁琐推证,还尽量选择一些实际应用的范例作为例题。所有这些努力都是为便于对本学科有兴趣的读者自学和应用。全书可分为两大部分。前五章是线性系统理论基础,但在第四章的稳定性理论中考虑到李雅普诺夫稳定性理论是现代控制理论的一个重要组成部分,在以后的课程中,如自适应控制,还要应用。因此在该章内对它的叙述并没有只限于线性系统,而是对它做了较为全面的介绍。第六至第八章是最优控制理论。考虑到现代控制理论的应用都是利用微机实现的,因此在各章中都注意到离散化系统的特殊问题并做了必要的讨论。

本书的第六和第八章由李春阳教授编写,其余各章由许世范教授编写并担任主编。本书的初稿承蒙杨仲平教授精心审阅并提出很多宝贵意见,仅向他表示衷心地感谢。作者还应感谢为本书提供部分习题及其解答的郭西进同志,为本书绘制大部分插图的朱湘冀同志以及帮助抄写书稿的研究生候晓秋和高静娟,他们都为本书的完成作出了贡献。本书的责任编辑从组稿,审校到成书都付出了辛勤地劳动并给作者以积极地支持,仅致诚挚的谢意。若广大读者能从本书中得到哪怕是微小的收获,作者将感到极大地欣慰。但毕竟作者的学识有限,误谬之处当所难免,热诚地欢迎并希望读者给以批评指正。

作者

1988年4月

目 录

第一章 动态系统的状态空间模型	(1)
第一节 状态空间模型的表示法	(1)
第二节 拉格朗日运动方程式	(7)
第三节 连续系统数学模型的转换	(15)
第四节 离散系统的状态空间模型	(27)
参考文献	(29)
习题	(29)
第二章 状态方程的解	(32)
第一节 线性定常系统状态方程的解	(32)
第二节 e^{At} 的计算方法	(36)
第三节 线性时变系统状态方程的解	(41)
第四节 离散状态方程的解	(46)
第五节 连续系统离散化	(51)
参考文献	(54)
习题	(55)
第三章 能控性与能观测性	(58)
第一节 基本概念	(58)
第二节 能控性的性质	(62)
第三节 能观测性的性质	(77)
第四节 系统结构	(86)
第五节 关于传递函数阵的进一步讨论	(104)
第六节 对偶原理与能控、能观标准形	(108)
第七节 最小实现	(111)
第八节 输出能控性	(122)
参考文献	(124)
习题	(125)
第四章 动态系统的稳定性理论	(129)
第一节 概述	(129)
第二节 李雅普诺夫直接法	(132)
第三节 李雅普诺夫函数	(136)
第四节 李雅普诺夫直接法在线性系统的应用	(143)
第五节 结构稳定性定理	(150)

第六节 应用举例	(155)
附录 关于引理的证明	(158)
参考文献	(160)
习题	(161)
第五章 状态反馈与观测器的设计	(163)
第一节 概述	(163)
第二节 单输入系统的极点配置	(166)
第三节 多输入系统的极点配置	(172)
第四节 观测器及其设计方法	(179)
第五节 自适应观测器	(190)
第六节 用状态观测器的反馈系统	(198)
第七节 关于离散系统的讨论	(204)
第八节 关于状态反馈解耦问题的讨论	(209)
参考文献	(230)
习题	(231)
第六章 最优控制中的变分法与极小值原理	(234)
第一节 概述	(234)
第二节 变分原理的基本概念	(237)
第三节 尤拉(Euler)方程	(241)
第四节 变分原理在最优控制中的应用	(258)
第五节 局部极值的充分条件	(267)
第六节 极小值原理	(270)
第七节 最小时间控制	(277)
第八节 离散系统的极小值原理	(290)
第九节 奇异最优控制问题	(296)
第十节 应用举例	(300)
参考文献	(304)
习题	(305)
第七章 线性二次型最优控制问题	(309)
第一节 有限时间线性最优调节器	(309)
第二节 非时变最优调节器	(317)
第三节 有持续干扰存在时的线性调节器	(322)
第四节 具有指定稳定度的最优调节器	(326)
第五节 关于调节器的几个问题	(329)
第六节 伺服问题	(344)
第七节 应用举例	(349)
参考文献	(358)
习题	(359)
第八章 动态规划	(362)

第一节	最优性原理与多步决策过程	(362)
第二节	离散系统最优控制的动态规划解法	(366)
第三节	离散系统动态规划的数值计算方法	(370)
第四节	离散线性二次型最优控制问题解法	(373)
第五节	动态规划在计划管理中的应用	(376)
第六节	连续系统最优控制的动态规划解法	(380)
参考文献		(386)
习题		(386)
习题答案		(388)

第一章 动态系统的状态空间模型

第一节 状态空间模型的表示法

从系统论的观点出发,任何客观存在的事物都可以看做为一个系统。数学模型就是描述各类系统的物理量之间关系的数学表达式,也可以说是对这些实际系统的状况的数学抽象或数学模拟。因此,在分析一个实际系统的状况,或为之设计控制律以使其具有设计者所期望的性能时,首先就要解决数学模型的建立问题,并称之为建模。通常的建模方法有分析的方法,即根据已知的定律(如物理的、化学的、经济的、社会的、生物的以及其它等)推导出数学模型。另一种建模方法是试验研究的方法,即根据观测到的数据用统计的方法来构造数学模型,这种方法就是系统辨识(System Identification)的方法。有时需要将这两种方法结合起来使用。本章将只讨论用分析的方法建立数学模型的问题。

任何一个系统都可以抽象地表示为图1-1的形式。 S 表示系统自身。其中图a的 $u(t)$ 为外部加到系统上的作用,称为输入; $y(t)$ 表示系统对输入的响应,是被控制的量,称为系统的输出或观测值。对复杂的系统,其输入和输出量不止一个(图1-1b)。一般称前者为单输入单输出(SISO)系统,称后者为多输入多输出(MIMO)系统,或简称多变量系统。

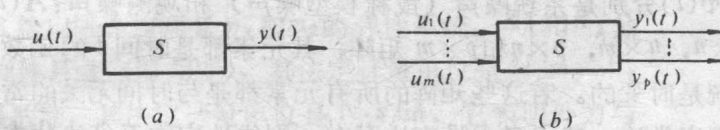


图1-1 系统表示
a—SISO系统; b—MIMO系统

系统有静态系统(static system)和动态系统(dynamic system)之分。当系统的输出变量 y 只决定于系统的输入变量 u 的值而与时间无关时,就称为静态系统。若系统的输出受系统过去的输入的影响时,就称为动态系统。显然,研究动态系统的包括输入、输出在内的各物理量之间的关系对分析和设计一个控制系统是至关重要的。通常在描述一个动态系统的动态过程时,微分方程(对连续时间型系统)和差分方程(对离散时间型系统)是最基本的数学模型。在古典控制理论中还引用传递函数作为系统的动态模型。

在现代控制理论中采用状态空间法建立系统的数学模型。这是因为在古典控制理论中所用的方法只给出系统(即受控对象)的输入与输出量之间的关系,它所反映的只是系统的外部特性。在以后的论述中读者将会看到它并不是在所有的情况下都能全面地反映系统的动态性质,而状态空间模型恰是克服了这个缺陷。下面就来讨论系统的状态空间描述的问题。

若受控对象是如图1-1b所表示的具有 m 个输入 $u_i(t)$, $i=1, \dots, m$, 和 p 个输出 $y_j(t)$, $j=1, \dots, p$, 的系统时, 则在其状态空间模型中除这些输入和输出变量 $(m+p)$ 个之外, 还包含有状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots$ 。这个状态变量是由能反映所描述系统的动态过程的状态所需要的最少的物理量所组成。若这些物理量有 n 个, 如 $x_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, 则该系统的状态变量就记为

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \quad (1-1-1)$$

显然状态变量 $\mathbf{x}(t)$ 是一个 n 维向量, 相应地称这个系统是 n 阶系统。由系统的状态变量的所有可能取值的集合构成一个向量空间。可以很容易证明它是一个线性空间, 并称之为状态空间。若记 $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_p(t)]^T$ 及 $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$, 并分别称它们为输出向量和输入向量。则系统的状态空间模型的一般形式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1-1-2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1-1-3)$$

式中, $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ 是 n 维的函数向量; ϕ 是关于 $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t$ 的标量函数。

式(1-1-2)是一阶向量微分方程, 也可看做是由 n 个一阶微分方程所构成的方程组, 并称之为系统的状态方程。式(1-1-3)是一个代数方程, 表示系统的输出量 $\mathbf{y}(t)$ 与输入以及状态变量的关系, 称为系统的输出方程, 或称为观测方程。这两个方程在一起也统称为系统方程。

若系统是线性的, 则式(1-1-2)和式(1-1-3)可写成

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1-1-4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (1-1-5)$$

的形式。

式中, $\mathbf{w}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 分别是系统噪声(或称模型噪声)和观测噪声; $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$ 分别是 $n \times n, n \times m, p \times n$ 和 $p \times m$ 矩阵, 其元素都是时间 t 的函数。因此称由这类模型所描述的系统是时变的。若这些矩阵的所有元素都是与时间无关的常数, 就称这个系统是时不变的, 或定常的。若不考虑噪声的存在, 则线性定常系统的状态空间模型为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1-1-6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1-1-7)$$

由于读者对建立这类数学模型的问题并不完全陌生, 因此先给出一些具有代表性的实例, 然后再通过它们做必要的归纳。

例1 图1-2给出一个电路系统

设其输入为 $e(t)$, 输出为电容 C 两端的电压 $e_c(t)$, 则由克希霍夫定律可写出电路的方程为

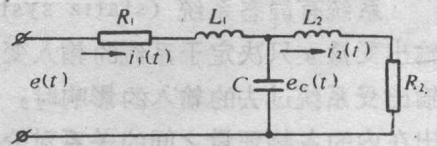


图1-2 电路系统

$$e(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + e_c(t)$$

$$e_c(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$C \frac{de_c(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t)$$

若取状态变量为 $x_1(t) = i_1(t)$, $x_2(t) = i_2(t)$, $x_3(t) = e_c(t)$, 并记 $u(t) = e(t)$, $y(t) = e_c(t)$ 。则由上列方程组可直接得到此电路系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{R_1}{L_1}x_1(t) - \frac{1}{L_1}x_3(t) + \frac{1}{L_1}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{R_2}{L_2}x_2(t) + \frac{1}{L_2}x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) \end{cases}$$

输出方程为

$$y(t) = x_3(t)$$

令 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$, 则可写成矩阵的表达形式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1]$$

例 2 图 1-3 给出一个有质量 m_1 和 m_2 的弹性系统。 K_1 和 K_2 分别是两个弹簧的弹性系数（即刚度），其法定计量单位是 N/m， B_1 和 B_2 是粘性摩擦系数，其法定计量单位是 N·s/m，它表明外力与速度之间呈线性关系的阻碍作用，可以看做是阻尼器； $f(t)$ 是加到系统上的外力， $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 分别表示两个质量自平衡点的位移。

由图可以直接写出该系统的力的平衡方程式

$$f(t) = m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + K_1(y_1(t) - y_2(t)) + B_1 \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right)$$

$$K_1(y_1(t) - y_2(t)) + B_1 \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + K_2 y_2(t) + B_2 \frac{dy_2}{dt}$$

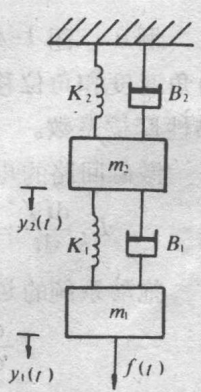


图1-3 弹性系统

取状态变量为 $x_1(t) = y_1(t)$, $x_2(t) = \dot{y}_1(t)$, $x_3(t) = y_2(t)$, $x_4(t) = \dot{y}_2(t)$, 则将上述两个方程的变量用状态变量替换并整理，就得到系统的状态方程，即

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{K_1}{m_1}(x_1(t) - x_3(t)) - \frac{B_1}{m_1}(x_2(t) - x_4(t)) + \frac{1}{m_1}f(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{K_1}{m_2}x_1(t) + \frac{B_1}{m_2}x_2(t) - \frac{K_1 + K_2}{m_2}x_3(t) - \frac{B_1 + B_2}{m_2}x_4(t) \end{cases}$$

若以位移 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 做为系统的输出, 则输出方程为

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_3(t) \end{cases}$$

以外力 $f(t)$ 做为系统输入, 且记为 $f(t) = u(t)$, 令 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$, 则系统方程的矩阵形式为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{m_1} & -\frac{B_1}{m_1} & \frac{K_1}{m_1} & \frac{B_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_1}{m_2} & \frac{B_1}{m_2} & -\frac{(K_1 + K_2)}{m_2} & -\frac{(B_1 + B_2)}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例3 图1-4是一个磁场控制的恒流电机的调速系统。电枢电流 $I_a = \text{const}$ 。设电机的角速度和角位移分别是 ω 和 θ , J 是传动系统折算到电动机轴上的转动惯量, B 是传动的粘性摩擦系数。

激磁回路的电压方程为

$$L_f \frac{di_f}{dt} = -R_f i_f(t) + e_f(t)$$

拖动系统的运动方程为

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - B\omega(t)$$

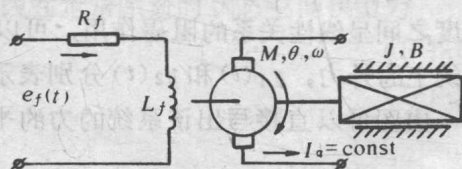


图1-4 机电调速系统

式中, $M = K_T \Phi I_a = K_T K_f i_f(t) I_a = K_1 i_f(t)$ (不考虑磁路饱和)

取状态变量为 $x_1(t) = i_f(t)$, $x_2(t) = \theta(t)$, $x_3(t) = \dot{\theta}(t) = \omega(t)$, 令 $u(t) = e_f(t)$, $y(t) = \omega(t)$, 则状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{R_f}{L_f}x_1(t) + \frac{1}{L_f}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{K_1}{J}x_1(t) - \frac{B}{J}x_3(t) \end{cases}$$

输出方程为

$$y(t) = x_3(t)$$

令 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$, 则其数学模型的矩阵形式为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R_f}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_i}{J} & 0 & \frac{-B}{J} \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{L_f} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1]$$

例4 图1-5 给出一个双阶水槽的液位控制系统。 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 分别是两个控制阀门的开度, 槽I和槽II的液位分别记为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 。

若将两个水槽都近似为一阶惯性环节, 设它们的传递函数分别是 $\frac{1}{s+a_1}$ 和 $\frac{1}{s+a_2}$, 则当记 $X_1(s)$, $X_2(s)$, $U_1(s)$ 和 $U_2(s)$ 分别是变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 的拉氏变换时, 就有

$$sX_2(s) + a_2X_2(s) = U_2(s)$$

$$sX_1(s) + a_1X_1(s) = U_1(s) + X_2(s)$$

对两个方程取拉氏反变换, 就得到系统的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1x_1(t) + x_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a_2x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

输出方程为

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

令 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$, $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$, $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$, 则系统的系数矩阵 A , 控制矩阵 B 和输出矩阵 C 分别是

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, 这是一个双输入双输出的多变量系统。

例5 建立最佳库存问题的数学模型。设某产品在 t 时刻的库存量为 $x(t)$, 该产品的生产速率为 $u(t)$, 销售速率为 $s(t)$ 。则在 t 时刻该产品库存量的变化率为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -s(t) + u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

且有约束条件: $x(t) > 0$ 。

实际上这就是最佳库存问题的状态方程, 其中 x_0 是初始库存量, 约束条件是为避免产品脱销所必需的。

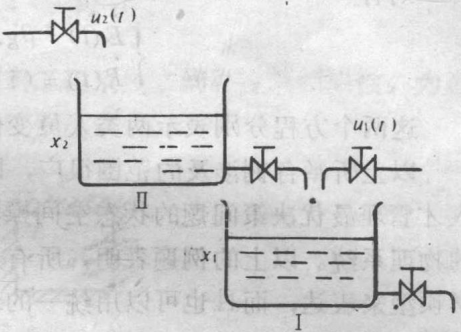


图1-5 水槽系统

例6 人才分配最优决策的数学模型。设某部门新分配来的科学家可以安排从事科研工作或教学工作。显然,安排做科研工作的人员可以立即出成果,而安排从事教学工作的人员则可以培养未来的科学家,但当前不能出成果。人才分配的最优决策就是确定出分配从事这两种工作的人员最佳比例。为此首先要建立在该部门这两类人员变动情况的数学模型。设

$E(t)$ —— t 时刻教育工作者的人数;

$R(t)$ —— t 时刻科研工作者的人数(兼职者按比例折算);

g ——每个教育工作者平均每年培养科学家的人数;

δ ——人员的退出率(如死亡、退休、或调出);

β ——新分配来人员中分配做教师的百分数。

则有

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = \beta g E(t) - \delta E(t) \\ \dot{R}(t) = (1 - \beta) g E(t) - \delta R(t) \end{cases}$$

这两个方程分别表示两类人员变化的规律,即状态方程。

以上所举各例涉及的范围很广,既有工程控制系统的状态空间模型,又有企业管理和人才管理最优决策问题的状态空间模型,就是在工程控制系统的各例中也包含了不同性质的物理系统。以上的例题表明,所有这些性质完全不同的各类系统都可以用统一模式的数学模型来表达,而且也可以用统一的理论基础来解决。仅此一点就足以表明控制理论在现代科学中所占有的极其重要的地位。

其次,通过所举的各例读者已经了解到并能掌握了建立状态空间模型的方法。在这里关键的问题是状态变量的选择。从例题可以看出,对一个已知的系统,其状态变量的选择不是唯一的,且当状态变量的选择不同时,该系统的数学模型的形式也将随之改变。当然在选择状态变量时必须考虑到控制的目的(要求)。一般言之,状态变量应是全面反映所描述系统的动态过程的状态所需要的最少的变量的总和,如一个运动的系统,至少应当有位移和速度两个变量才能全面地反映出它的状态。从系统控制的观点分析,状态变量都应满足下面两个条件:

1. 在初始时刻 $t = t_0$ 的状态变量的全体 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ 能唯一地定义系统的初始状态。

2. 系统在任意时刻 $t \geq t_0$ 的状态应由其初始状态 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ 和控制作用 $u(t)$ 所唯一确定。

通常将状态变量表示为向量的形式,且记为 $\mathbf{x}(t)$, 即 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, 因此系统的状态是由状态变量 $\mathbf{x}(t)$, 即其全体分量 $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, 所定义的。对一个物理系统而言,其中都必定含有各种惯性元件,也正是这些惯性元件影响着系统的动态过程。因此常是选择反映这些惯性元件性质的物理量组成系统的状态变量,如通过电感的电流,电容两端的电压,弹簧的位移,运动物体的速度等等。这里还应指出的是,状态变量的选择不唯一,也包含状态变量的维数,即它是由多少个变量构成的也不是唯一的。当然,维数越大,系统的阶次也就越高。因此就存在如何选择状态变量使系统的阶次最低的问题,这实际就是所谓最小实现问题,本书将在第三章讨论。

最后,由状态空间模型式 (1-1-6) 及式 (1-1-7) 的结构可以看出,当 $\mathbf{x}(t) \in X^n$,

$u(t) \in U^m$, $y(t) \in Y^p$ 时, 其中 X^n , U^m , Y^p 分别表示 n 维状态空间, m 维控制向量空间和 p 维输出向量空间。则状态方程(1-1-6)是一阶向量 (n 维) 微分方程, 或说是由 n 个一阶微分方程构成的方程组。如果将其中的每一个一阶微分方程看做是一个子系统, 那么就可以将整个系统看做是由 n 个子系统的总和所构成的。从这个意义上讲, 状态方程不仅反映了系统的外部作用 (也包括外部干扰), 即系统输入对状态变量变化 (即动态过程) 的影响, 而且也给出了这些子系统之间的关连 (即耦合)。输出方程是一个代数方程, 它表现为线性映射, 或称为线性变换的关系。它给出了系统输出与状态变量以及系统输入之间的关系, 即系统输出是系统输入及其状态变量的线性组合。当系统的初始状态 $x(t_0)$ 和输入 $u(t)$ 为已知时, 可以求得状态方程 (1-1-6) 的解 $x(t)$ (通常称为状态轨线), 并由此利用输出方程 (1-1-7) 就可以求出系统在给定条件下的输出。

第二节 拉格朗日运动方程式

从前一节讨论建立状态方程的举例中可以看到各类工程系统之间存在着相似性。为进一步考查这个问题, 图 1-6 给出了 4 种不同类型的物理系统。

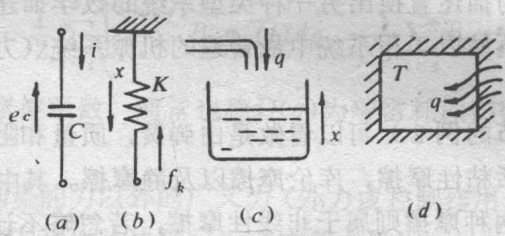


图 1-6 工程系统的相似性

图 1-6a 给出一个电容 C 。若以其电流 $i(t)$ 为输入, 以其两端的电压 $e_c(t)$ 为输出, 则它们之间的关系式为

$$e_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + e_{c0} \quad (1-2-1)$$

式中 C ——电容量;
 e_{c0} ——电容两端的初始电压。

图 b 所给出的是一个弹簧, $x(t)$ 是它的位移, K 是弹性系数 (刚度), 则弹簧的恢复力 $f_k(t)$ 为

$$f_k(t) = Kx(t) + f_{k0}$$

式中 f_{k0} ——恢复力的初始值。

若用位移的变化率 $\frac{dx}{dt}$ 来表示, 则上式可写成

$$f_k(t) = K \int \left(\frac{dx}{dt} \right) dt + f_{k0} \quad (1-2-2)$$

图 c 是一个水槽。设其截面积为 A , 则输入量 $q(t)$ 与水位 $x(t)$ 之间的关系式为

$$x(t) = \frac{1}{A} \int q(t) dt + x_0 \quad (1-2-3)$$

式中 x_0 ——水槽中水位的初始值;

q ——单位时间流入量的体积。

图 d 是室温加热的示意图。设 C_a 是空气的热容量, m 是空气的比重, 房间的体积为 V , 且设房间是绝热的, 加热过程是均匀的。则室温 $T(t)$ 与加热的输入热量 $q(t)$ 之间的关系为

$$T(t) = \frac{1}{mC_a V} \int q(t) dt + T_0 \quad (1-2-4)$$

式中 T_0 ——室温的初始值。

显然, 在这 4 种不同类型的系统中, 若分别将它们的电流 $i(t)$, 位移速度 $\frac{dx}{dt}$, 输入流量 $q(t)$ 和输入热量 $q(t)$ 作为各自系统的输入 $u(t)$, 而将电容电压 $e_c(t)$, 弹簧恢复力 $f_k(t)$, 水位 $x(t)$ 以及室温 $T(t)$ 看做相应系统的输出 $y(t)$, 那么就可以将它们写成统一的形式

$$y(t) = P \int u(t) dt + y_0 \quad (1-2-5)$$

其中的系数 P 相当于 $1/C$, K , $1/A$, $1/mC_a V$ 。

这种物理系统的相似性使我们能对不同的系统给出共同的描述, 从而可以利用这种相似性由一种已知物理系统的描述置换出另一种类型系统的数学描述。为了加深对各种工程系统这种相似性的理解, 不妨以工程系统中最普遍的机械系统(力学系统)和电气系统为例做进一步的讨论。

一个力学系统(如上节的例 2)可以看做是由弹簧, 质量和阻尼等 3 个基本部分(要素)所组成。其中阻尼包括粘性摩擦, 库伦摩擦以及静摩擦。其中粘性摩擦是与运动速度成正比的线性摩擦, 而后两种摩擦则属于非线性摩擦, 若忽略不计, 则当系统受外力 $f(t)$ 作用而产生位移 $x(t)$ 时, 系统中 3 个组成部分的反作用力将分别是

$$\left. \begin{array}{l} \text{弹簧: } r(t) = Kx(t) \\ \text{质量: } r(t) = m\ddot{x}(t) \\ \text{阻尼: } r(t) = B\dot{x}(t) \end{array} \right\} \quad (1-2-6)$$

其中 K , m , B 分别是弹性系数(刚度), 质量和粘性摩擦系数。

对旋转系统, 反作用力用阻力矩 $M(t)$ 表示, 而位移用 $\theta(t)$ 表示, 则有

$$\left. \begin{array}{l} \text{弹簧: } M(t) = K\theta(t) \\ \text{质量: } M(t) = J\ddot{\theta}(t) \\ \text{阻尼: } M(t) = B\dot{\theta}(t) \end{array} \right\} \quad (1-2-7)$$

其中 J 是转动惯量。此时 $K\theta(t)$ 和 $B\dot{\theta}(t)$ 分别是由转轴的扭转和轴承的摩擦产生的。

再考虑电气系统。它是由电感 L , 电容 C 和电阻 R 作为基本部分组成的。设 $v(t)$ 和 $i(t)$ 分别是这些部件两端的电压和通过的电流, $q(t)$ 是电荷, 则有

$$\left. \begin{array}{l} \text{电容: } v(t) = \frac{1}{C} q(t) \\ \text{电感: } v(t) = L\ddot{q}(t) \\ \text{电阻: } v(t) = R\dot{q}(t) \end{array} \right\} \quad (1-2-8)$$

将以上两种系统加以比较就不难看出力学系统的力(或力矩)与电气系统的电压存在一

一对应的相似关系。而电荷 $q(t)$ 与位移 $x(t)$, 电容的倒数 $\frac{1}{C}$ 与弹性系统 K , 电感 L 与质量 m (或 J), 电阻 R 与粘性摩擦系数 B 都是相互对应的。显然, 利用这种相似性就可以从一种系统的状态方程置换为另一种系统的状态方程。应指出, 在上面 (包括上一节) 所给出的对力学及电气系统建立状态方程的思路是从系统的作用与反作用的平衡这一观点为依据的。但是, 当这种关系比较复杂时, 再用这种方法来建立状态方程就不甚方便了。本节将提供利用拉格朗日运动方程式(Lagrange's equation of motion)来建立状态方程的方法。拉格朗日运动方程是以系统内部的能量为依据构成的, 它给出了对力学系统和电气系统都适用的统一方法。下面以力学系统为例给出这种方法。

在三维空间中有一些质点或刚体, 它们在受约束的条件下运动。设运动的自由度为 p , 与这 p 个自由度相对应的位移 (或角位移) 为 $q_1(t), q_2(t), \dots, q_p(t)$, 它们的时间导数为 $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_p(t)$ 。称 $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_p(t)\}$ 为广义坐标, 称 $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_p(t)\}$ 为广义速度。记系统内动能的总和为 $T(q, \dot{q})$, 并称为动能函数, 记系统内势能的总和为 $U(q, t)$, 并称为势能函数, 定义能量耗损函数为

$$D(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \int_0^{\dot{q}_i(t)} B_i \dot{q}_i(t) d\dot{q}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p B_i \dot{q}_i^2(t) \tag{1-2-9}$$

其中 B_i 为 q_i 方向的粘性摩擦系数。通常也称 $D(\dot{q})$ 为瑞雷耗散函数 (Rayleigh dissipation function)。

若系统沿 q_i 方向受到势能力以外的广义力 (外力或控制作用) $u_i(t)$ 的作用而运动时, 系统的运动方程式可以由下面的拉格朗日运动方程式给出,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = u_i(t), \quad i = 1, \dots, p, \tag{1-2-10}$$

若取广义坐标和广义速度为状态变量, 即

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= q_1(t), \quad x_2(t) = q_2(t), \quad \dots, \quad x_p(t) = q_p(t) \\ x_{p+1}(t) &= \dot{q}_1(t), \quad x_{p+2}(t) = \dot{q}_2(t), \quad \dots, \quad x_{2p}(t) = \dot{q}_p(t) \end{aligned} \right\} \tag{1-2-11}$$

则系统的状态方程就是由式 (1-2-10) 及

$$\dot{x}_1(t) = x_{p+1}(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_{p+2}(t), \quad \dots, \quad \dot{x}_p(t) = x_{2p}(t) \tag{1-2-12}$$

所组成。有关拉格朗日运动方程式 (1-2-10) 的推导请参看动力学或机械振动学方面的书籍[7]。

表1-2-1

系 统 类 别	广 义 坐 标	广 义 速 度	广 义 力	动能函数	势能函数
机械(直线运动)	位 移 x	速 度 $\dot{x}$	力 f	$\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$\frac{1}{2} K x^2$
机械(旋转运动)	角位移 θ	角速度 $\dot{\theta}$	力矩 M	$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$	$\frac{1}{2} K \theta^2$
电 气 力-电压对应	电 荷 q	电 流 $\dot{q}$	电压 v	$\frac{1}{2} L \dot{q}^2$	$\frac{1}{2 C} q^2$
电 气 力-电流对应	磁 密 ϕ	电 压 $v = \dot{\phi}$	电流 i	$\frac{1}{2} C \dot{\phi}^2$	$\frac{1}{2 L} \phi^2$