应用型本科规划教材

主编 陆宜清

概率论与数理统计

Gailülun yu shulitongji

上海科学技术出版社

应用型本科规划教材

概率论与数理统计

主　编　陆宜清
副主编　林大志　徐香勤
参　编　薛春明　张思胜　王　茜　袁伯园

上海科学技术出版社

内容提要

本书主要介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论与方法. 全书共10章,内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、Excel在数理统计中的应用等. 每章均附有习题,附录部分还附有部分历届研究生入学考试概率统计试题.

本书简明易懂,概念引入自然实用,便于学生理解和掌握,适宜作为应用型本科院校理工类和经济类专业学生概率论与数理统计课程的教材,也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 陆宜清主编. —上海:上海科学技术出版社,2019.2

应用型本科规划教材

ISBN 978-7-5478-4278-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①陆… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第299885号

概率论与数理统计

主编 陆宜清

上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行

(上海钦州南路71号 邮政编码200235 www.sstp.cn)

上海展强印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 19

字数:450千字

2019年2月第1版 2019年2月第1次印刷

ISBN 978-7-5478-4278-2/O·67

定价:48.00元

前言 Preface

概率论与数理统计是高等院校理工类、经管类的重要课程之一，在考研数学试题中的比例大约占22%. 本书是依据高等学校工科数学课程教学指导委员会修订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》，为适应新时代理工科应用型本科人才培养的要求而编写的，教材定位为培养理工科应用型本科人才，以必需且够用为度，兼顾学生考研的需求. 全书介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本理论与方法，包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、Excel在数理统计中的应用十章内容. 其中，前五章内容属于概率论部分，后五章内容属于数理统计部分.

本书具有以下特点：

(1) 概念引入自然直观. 如在建立概率公理化定义时，以频率为先导，由频率的性质自然引入概率的公理化定义，使学生能较早地、自然地接受公理化的概率定义.

(2) 内容组织科学系统. 作为一本面向应用型本科的规划教材，本书特别注重内容组织的科学性和系统性. 概率论之所以能形成一门科学的理论，其核心就在于它的公理化体系. 本书把这一核心安排在引入概率概念的开始，不但使概率论作为一门数学理论科学化、系统化，而且使学生通过对各种具体概率的反复计算而加深对概率公理化体系的理解. 也正是由于概率公理化定义的较早建立，避免了各种概率定义的重复出现，实现了所有概率定义的统一化，降低了学生的理解难度，同时也优化了课程体系.

(3) 叙述简明易懂，易于教学. 作为一本培养应用型本科人才的高等院校规划教材，本书回避了概率空间的抽象概念和某些理论性较强的推导，但这并不影响概率概念的建立和概率理论的系统性，这样处理反而使教师易于教学. 又由于理论的减弱和计算的加强，更利于学生学习和动手能力的培养.

(4) 注意渗透现代数学的概念和术语，以拓宽学生的知识面和视野. 例如，在讲述随机变量的密度概念和大数定律等内容时，顺便引入“几乎处处相等”和“依概率收敛”等概念. 这样不但使问题描述更加准确，而且使学生在不增加任何负担的情况下了解更多的现代数学术语.

(5) 结合计算机的发展，适当添加与计算机有关的内容. 本书在第十章介绍了Excel在统计中的一些应用，以使学生的实际动手能力得到锻炼.

(6) 突出工科院校的特点，重视理论和实际的结合，注重学生能力的培养. 本书在选材和叙述上尽量做到突出工科院校的特点，注意选取那些既具有实际意义，又具有启发性和应用性的例子作为例题与习题，使学生通过课程的学习能学到更丰富、更有用的数学知识，能提高运用数学工具的能力. 同时本书涵盖了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的所有知识点.

(7) 教材与学习指导融为一体，基本要求与拓宽知识相结合. 每一章开始有学习目标，结束有本章小结，还有阅读材料，适应不同要求、不同层次的教学，易于教，便于学.

本书由教学名师陆宜清教授任主编，林大志、徐香勤任副主编. 参加本书编写的还有薛春明、张思胜、王茜、袁伯园. 这些编写者都在应用型本科院校任教多年，有着丰富的教学经验. 全书框架结构安排、统稿、修改和定稿工作由陆宜清教授承担.

本书的组织编写和出版得到了有关学校领导和相关专家的大力支持和帮助，他们为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此一并表示诚挚的谢意！

本书篇幅少、内容全，教师可根据不同专业特点进行取舍. 课内教学需 48～64 学时，建议可在课外再安排 8～16 学时上机操作. 本书各章配有精选的习题，其数量、难度适中，书后附有习题参考答案.

本书的编排是为了适应新时代理工科应用型本科人才培养的一种改革尝试. 由于编者水平有限，书中一定会有不少的不足和错误，恳请读者批评指正.

编 者

目录 Contents

第一章

随机事件与概率

【学习目标】

1. 了解随机现象与随机试验的概念.
2. 理解样本空间与事件的含义,熟练掌握事件的关系与运算.
3. 了解频率的概念及性质.
4. 掌握概率的定义,熟练掌握概率的基本性质.
5. 掌握古典概型、几何概型的概率计算公式.
6. 理解条件概率的概念,熟练掌握乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式,并能应用这些公式进行概率计算.
7. 理解事件独立性的概念,掌握事件独立性的性质,能应用事件的独立性进行概率计算.

近几十年来随着科技的蓬勃发展,概率论大量应用在国民经济、工农业生产及各学科领域. 许多兴起的应用数学如信息论、对策论、排队论、控制论等都是以概率论作为基础.

概率论和数理统计是一门随机数学分支,它们是密切联系的同类学科. 但是应该指出,概率论、数理统计、统计方法又都各有它们自己所包含的不同内容.

概率论是根据大量同类随机现象的统计规律,对随机现象出现某一结果的可能性做出一种客观的科学判断,对这种出现的可能性大小做出数量上的描述;比较这些可能性的大小、研究它们之间的联系,从而形成一整套数学理论和方法.

在自然界和现实生活中,一些事物都是相互联系和不断发展的. 在它们彼此间的联系和发展中,根据它们是否有必然的因果联系,可以分成截然不同的两大类. 一类是**确定性的现象**. 这类现象是在一定条件下,必定会导致某种确定的结果. 例如,在标准大气压下,水加热到 100 ℃,就必然会沸腾. 事物间的这种联系是属于必然性的. 通常的自然科学就是专门研究和认识这种必然性的,寻求这类必然现象的因果关系,把握它们之间的数量规律. 另一类是**不确定性的现象**. 这类现象是在一定条件下,它的结果是不确定的. 例如,同一个工人在同一台机床上加工同一种零件若干个,它们的尺寸总会有一点差异;又如,在同样条件下进行小麦品种的人工催芽试验,各个种子的发芽情况也不尽相同,有强弱和早晚的分别等. 为什么在相同情况下会出现这种不确定的结果呢? 这是因为这里的"相同条件"是指一些主要条件,除了这些主要条件外,还会有许多次要条件和偶然因素又是人们无法事先一一能够掌握的. 因此在这一类现象中就无法用必然性的因果关系对个别现象的结果事先做出确定的答案. 事物间的这种关系是属于偶然性的,这种现象叫作**偶然现象**,或者叫作**随机现象**.

在自然界、在生产生活中,随机现象十分普遍,也就是说随机现象是大量存在的. 比如每期彩票的中奖号码、同一条生产线上生产的灯泡寿命等都是随机现象. 因此说:随机现象就是在同样条件下,多次进行同一试验或调查同一现象,所得结果不完全一样,而且无法准确地预测下一次所得结果的现象. 随机现象这种结果的不确定性是由于一些次要的、偶然的因素影响所造成的.

随机现象从表面上看似乎是杂乱无章、没有什么规律的现象,但实践证明,如果同类的随机现象大量重复出现,它的总体就呈现出一定的规律性. 大量同类随机现象所呈现的这种规律性,随着观察次数的增多而愈加明显. 比如掷硬币,每一次投掷很难判断是哪一面朝上,但是如果多次重复地投掷这枚硬币,就会越来越清楚地发现它们朝上的次数大体相同.

这种由大量同类随机现象所呈现出来的集体规律性叫作**统计规律性**. 概率论和数理统计就是研究大量同类随机现象的统计规律性的数学学科.

第一节 随机事件及其运算

一、随机试验与样本空间

为了研究随机现象,需要对自然现象或社会现象进行观察或进行科学试验. 把对某种自

然现象做一次观察或进行一次科学试验统称为一个试验，这是一个含义广泛的术语. 例如，投掷一枚均匀的六面体骰子来观察出现的点数、观察早上 7:00—8:00 通过黄河大桥收费站的车流量、考察某班概率统计课程考试的平均成绩等，这些都是试验. 通过仔细分析，可以看到这些试验都有如下特点：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个，而且所有可能结果在试验前就明确知道.

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**，一般用字母 E 表示. 下面是一些试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况.

E_2：将一枚硬币连抛两次，观察正面、反面出现的情况.

E_3：将一枚硬币连抛两次，观察正面出现的次数.

E_4：在一批产品中任选一件，检验其是否合格.

E_5：记录一天内进入某超市的顾客人数.

E_6：在一批某种型号电视机中任意抽取一台，测试其寿命.

E_7：观察某地明天的天气是下雨还是晴天.

再仔细分析一下，发现试验 E_7 不具备特点(1)，这是因为除非时间倒转，否则都不可能对它进行重复试验. 以后把不满足条件(1)的随机试验称为**不可重复的随机试验**，而把同时满足条件(1)、(2)、(3)的随机试验称为**可重复的随机试验**. 可重复的随机试验已经得到广泛深入的研究，有一套成熟的理论和方法. 但随着社会经济的发展，特别是现代经营管理和决策分析的需要，不可重复的随机试验的研究已引起人们的关注. 本书除了个别地方，所讨论的大多是可重复的随机试验. 在不引起混淆的情况下，以后把可重复的随机试验也简称为**随机试验**或**试验**.

对于任一个随机试验 E，试验的所有可能结果是已知的. 将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω. Ω 中的元素，即 E 中的每个结果，称为**样本点**，用 ω 表示. 于是可记 $\Omega=\{\omega\}$.

前面提到的试验 $E_1, E_2, \cdots, E_7$ 所对应的样本空间 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_7$ 为

$$\Omega_1=\{H, T\}; \qquad \Omega_2=\{HH, HT, TH, TT\};$$
$$\Omega_3=\{0, 1, 2\}; \qquad \Omega_4=\{\text{合格}, \text{不合格}\};$$
$$\Omega_5=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}; \qquad \Omega_6=\{t \mid t \geqslant 0\};$$
$$\Omega_7=\{\text{雨天}, \text{晴天}\}.$$

应该注意的是，试验 E_2，E_3 都是将一枚硬币连抛两次，但由于试验的目的不一样，所以样本空间 Ω_2，Ω_3 截然不同，这说明试验的目的决定试验所对应的样本空间.

二、随机事件

进行随机试验时，人们关心的往往是满足某种条件的样本点所组成的集合. 例如，若规定电视机的寿命超过 10 000 h 为合格品，则在试验 E_6 中关心的是电视机的寿命是否大于 10 000 h，满足这一条件的样本点组成 Ω_6 的一个子集 $A=\{t \mid t>10\,000\}$. 称 A 为试验 E_6 的一个随机事件.

一般地，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**，用大写字母 A, B, C 等来表示. 事件是概率论中最基本的概念，是随机试验的某些样本点组成的集合，在一次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时称这一事件发生.

由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**. 例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$，试验 E_3 有三个基本事件 $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$.

样本空间 Ω 有两个特殊子集，一个是 Ω 本身，由于它包含了试验的所有可能结果，所以在每次试验中它总是发生，称为**必然事件**；另一个子集是空集 $\varnothing$，它不包含任何样本点，因此在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

必然事件和不可能事件是随机事件的特例，尽管它们已无随机性可言，但在概率论中起着重要的作用.

三、事件的关系与运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件，希望通过对简单事件的了解去掌握较复杂的事件，为此需要研究事件间的关系与运算.

事件是一个集合，因此事件间的关系与运算应该按照集合之间的关系与运算来规定. 下面给出这些关系与运算在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 A, B, $A_i (i=1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 若 $A \subset B$，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A 是事件 B 的**子事件**，这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

(2) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A = B$.

(3) 事件 $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{或} \omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 当且仅当 A, B 中至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生. 事件 $A \cup B$ 也是“或仅 A 发生或仅 B 发生或 A 与 B 都发生”.

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的和事件，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$ 的和事件.

(4) 事件 $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{且} \omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 当且仅当 A, B 都发生时，事件 $A \cap B$ 发生. 积事件 $A \cap B$ 也可简记为 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的积事件，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$ 的积事件.

(5) 事件 $A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{且} \omega \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 当且仅当 A 发生且 B 不发生时，事件 $A - B$ 发生.

(6) 若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或**互斥**的. 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

(7) 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或称事件 A 与事件 B 为**互逆事件**. 这指的是，对每一次试验而言，事件 A, B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$. $\overline{A} = \Omega - A$, $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

下面用图 1-1 来表示上述事件间的关系与运算，长方形表示样本空间，椭圆 A 与 B 分别表示事件 A 与 B，事件 B 包含事件 A.

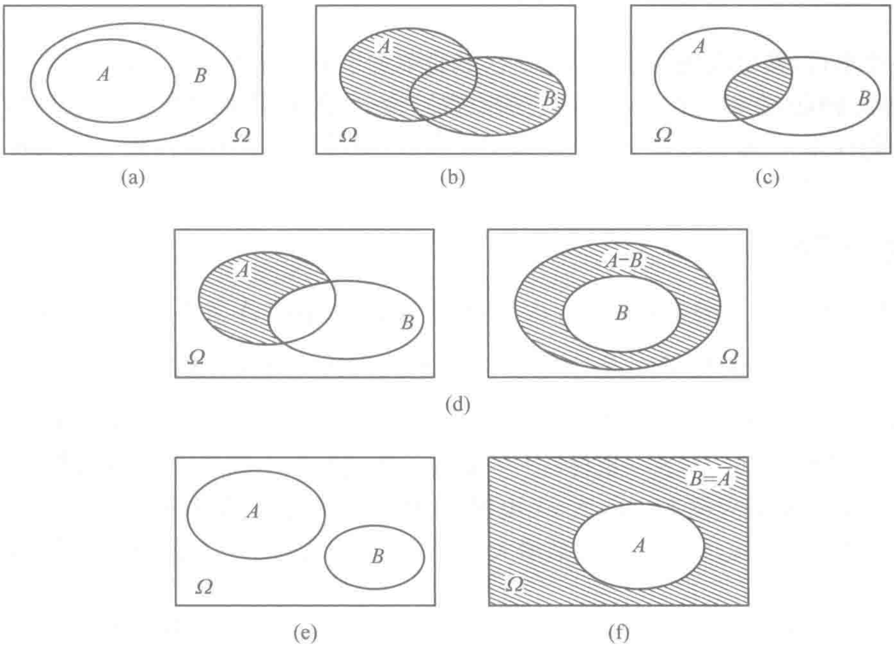

图 1-1

与集合运算一样，事件之间的运算满足下述运算规律：

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(4) 对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

这些运算律可以推广到任意多个事件上去.

例 1.1　设 A, B, C 是随机事件，则事件

“A, B 发生，C 不发生”可以表示为 $AB\overline{C}$；

“A, B, C 至少有两个发生”可以表示为 $AB \cup AC \cup BC$；

“A, B, C 恰好有两个发生”可以表示为 $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$；

“A, B, C 中有不多于一个发生”可以表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$.

例 1.2　试验为观察抛一枚骰子出现的点数，样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 设事件 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{4, 6\}$, $C = \{1, 4\}$，求 $A \cap B$, $B \cup C$, $A \cup (B \cap C)$, $\overline{A \cup B}$, $C - A$.

解　$A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{4, 6\} = \varnothing$, $B \cup C = \{4, 6\} \cup \{1, 4\} = \{1, 4, 6\}$；

$A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5\} \cup (\{4, 6\} \cap \{1, 4\}) = \{1, 3, 5\} \cup \{4\} = \{1, 3, 4, 5\}$；

$\overline{A \cup B} = \overline{\{1, 3, 5\} \cup \{4, 6\}} = \overline{\{1, 3, 4, 5, 6\}} = \{2\}$；

$C - A = \{1, 4\} - \{1, 3, 5\} = \{4\}$.

第二节　随机事件的概率

在一次试验中，一个事件(除不可能事件与必然事件外)可能发生也可能不发生. 观察试

验中的各个事件，常会发现有些事件在一次试验中发生的可能性较大，而另一些事件发生的可能性较小. 例如，在抛一枚骰子观察它的点数试验中，事件“出现偶数点”比事件“出现 1 点”发生的可能性要大. 希望对每个事件能指定一个数，能用它来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小. 下面先从“频率”讲起.

一、事件的频率

在相同条件下将试验重复进行 n 次，在 n 次试验中，事件 A 发生了 m 次，m 称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频数**，而比值 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**.

历史上，曾有许多学者做过大量的试验，例如蒲丰、皮尔逊等人先后做过掷一枚均匀的硬币试验，观察“正面朝上”这一事件(记为 A)在 n 次试验中出现的次数. 前者投掷 4 040 次，A 出现 2 048 次；后者投掷 24 000 次，A 出现 12 012 次. 因此 A 出现的频率分别为 0. 506 9 和 0. 500 5. 而且他们发现，随着试验次数增大，事件 A 出现的频率总是围绕 0. 5 上下波动，且越来越接近 0. 5.

大量试验证实，随机事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 当重复试验的次数 n 增大时，总呈现出稳定性，稳定在某一个常数附近. 这是随机事件固有的性质. “频率的稳定性”就是通常所说的**统计规律性**. 这也是下面定义事件概率的客观基础.

频率具有以下三条性质：

(1) 非负性：$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2) 规范性：$f_n(\Omega)=1$.

(3) 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是一组两两互不相容的事件，则 $f_n\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}f_n(A_i)$.

二、事件的概率

事件 A 的频率 $f_n(A)$ 表示事件 A 在多次试验中发生的频繁程度. 当试验次数 n 增大时，频率稳定于某一个常数. 如这个常数较大，就意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性较大；这个常数较小，就意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性较小. 在实际中，常用频率的稳定值来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小，不可能对每一个事件都做大量的试验，从中得到频率的稳定值. 为了理论研究的需要，从频率的稳定性以及频率的性质得到启发，给出以下表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小的概率定义.

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对 Ω 的每一个事件 A，对应于一个实数 $P(A)$，如果满足下列三个条件：

(1) 非负性：对任一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性：对必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$.

(3) 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$, $A_iA_j=\varnothing$, $i, j=1, 2, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

概率的这个公理化定义是苏联数学家柯尔莫哥夫(Kolmogorov，1903—1987)在1933年给出的.

三、概率的性质

由概率的公理化定义，可以得到概率的一些基本性质.

性质 1.1 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2 (有限可加性)设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 1.3 若事件 A, B 满足 $A \subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\ P(B) \geqslant P(A).$$

性质 1.4 对任一个事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 1.5 (加法公式)对任意两个事件 A, B，有 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

性质 1.5 可以推广到任意有限多个事件的情形，对于任意多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

特别地，对于三个事件 A_1, A_2, A_3，有

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)- \\ &P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

例 1.3 设 $P(A)=0.4,\ P(B)=0.3,\ P(A \cup B)=0.6$，求 $P(A-B)$.

解 因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，所以先求 $P(AB)$.

由加法公式得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)=0.4+0.3-0.6=0.1$，所以 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$.

例 1.4 设 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4,\ P(AB)=0,\ P(AC)=P(BC)=1/6$，求 A, B, C 都不出现的概率.

解 A, B, C 都不出现的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=1-P(A \cup B \cup C) \\ &=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC) \\ &=1-1/4-1/4-1/4+0+1/6+1/6-0=1-5/12=7/12.\end{aligned}$$

例 1.5 (配对问题)在一个有 n 个人参加的晚会上，每个人带了一件礼物，且假定各人带的礼物都不相同. 晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件，问至少有一个人抽到自己礼物的概率是多少?

解 记事件 $A_i=\{$第 i 个人自己抽到了自己的礼物$\}$，$i=1, 2, \cdots, n$，所求概率即为 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$. 因为

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=\frac{1}{n};$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=\cdots=P(A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n(n-1)};$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2A_4)=\cdots=P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n(n-1)(n-3)};$$

……

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}.$$

所以由加法公式得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!}.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!}=-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i}\frac{1}{i!}=-(\mathrm{e}^{-1}-1)=1-\mathrm{e}^{-1}$，故当 $n\geqslant 10$ 时，此概率近似为 $1-\mathrm{e}^{-1}\approx 0.632\,1$.

这表明即使参加晚会的人很多(比如 100 人以上)，事件“至少有一个人抽到自己礼物”的概率也不是必然事件.

第三节　等可能概型

本节介绍在概率论发展早期受到关注的两类试验模型，其一是古典概型，其二是几何概型.

一、古典概型

在前面所讨论的随机试验的例子中，有一些试验具有如下两个特征：

(1) 试验的样本空间只包含有限个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$.

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同，即 $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$.

具有以上两个特点的随机试验称为**等可能概型**，也称为**古典概型**. 古典概型由拉普拉斯(Laplace，1749—1827)首先归纳提出，是概率论发展初期的主要研究对象.

设试验 E 是古典概型，由于基本事件两两互不相容，因此

$$1=P(\Omega)=P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(\{\omega_i\})=nP(\{\omega_i\}),$$

从而 $P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}$, $i=1,2,\cdots,n$.

若事件 A 包含 k 个样本点，即 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}$，这里 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中某 k 个不同的数，则有

$$P(A)=P\Big(\bigcup_{j=1}^{k}\{\omega_{i_j}\}\Big)=\sum_{j=1}^{k}P(\{\omega_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}.$$

上式给出了等可能概型中事件 A 的概率计算公式. 在使用该公式计算概率时，应注意选取适

当的随机试验以及样本空间，使其符合古典概型的两个特点.

例 1.6　将一枚硬币抛两次：

(1) 设事件 A_1 为“恰好有一次出现正面”，求 $P(A_1)$.

(2) 设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”，求 $P(A_2)$.

解　(1) 设随机试验 E 为将一枚硬币抛两次，观察正反面出现的情况，则其样本空间为 $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$. 它包含四个基本事件，且每个基本事件发生的可能性相同，因此为古典概型. 又 $A_1=\{HT, TH\}$ 包含两个基本事件，故 $P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $\overline{A_2}=\{TT\}$，于是 $P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

本题中若试验 E 为将一枚硬币抛两次，观察正反面出现的次数，这时样本空间 $\Omega=\{0, 1, 2\}$ 中的每个基本事件发生的可能性是不一样的，因此就不能用古典概型的概率计算公式来计算 $P(A_1)$, $P(A_2)$.

使用古典概型的概率计算公式来计算概率，涉及计数的运算. 当样本空间中的元素较多而不能一一列出时，只需要根据有关计数的原理和方法(排列组合)计算出 Ω 及 A 中所包含的基本事件的个数，即可求出 A 的概率.

例 1.7　某城市电话号码升级后为八位数，且第一位为 6 或 8，求：

(1) 随机抽取的一个电话号码为不重复的八位数的概率.

(2) 随机抽取的电话号码末位数是 8 的概率.

解　(1) 设 A 表示事件“随机抽取的一个电话号码为不重复的八位数”，注意到除第一位外，其余位数可取自 0 到 9 这十个数中任意一个，因此有十种可能结果. 又第一位数只能为 6 或 8，因此只有两种可能结果. 样本点总数 $n=2\times10^7$.

事件 A 中的号码要求不重复，因此事件 A 中的样本点数为 $2\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3$. 于是 $P(A)=\frac{2\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{2\times10^7}=0.01814$.

(2) 设 B 表示事件“随机抽取的电话号码末位数是 8”，则事件 A 中的样本点数为 2×10^6. 于是 $P(B)=\frac{2\times10^6}{2\times10^7}=0.1$.

例 1.8　将 n 个球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中去，设盒子的容量不限，试求：

(1) 每个盒子至多有一个球的概率.

(2) n 个盒子中各有一个球的概率.

解　将 n 个球随机地放入 N 个盒子中去，每一种放法是一个基本事件，显然这是古典概型问题. 因每个球都可以放入 N 个盒子中的任一个盒子，每个球有 N 种放法，故 n 个球共有 N^n 种不同的放法.

(1) 每个盒子至多有一个球，第一个球有 N 种放法，第二个球有 $N-1$ 种放法(因第一个球已占去一个盒子)……第 n 个球有 $N-(n-1)$ 种放法(因前 $n-1$ 个球已占去 $n-1$ 个盒子)，共有 $A_N^n=N(N-1)\cdots[N-(n-1)]$ 种不同的放法，因此所求的概率为

$$p=\frac{A_N^n}{N^n}=\frac{N(N-1)\cdots[N-(n-1)]}{N^n}.$$

(2) n 个盒子可以有 C_N^n 种不同的选法. 对选定的 n 个盒子，每个盒子各有一个球的放法

有 $n!$ 种. 由乘法原理,共有 $n!\ C_N^n$ 种放法,因此所求的概率为

$$p=\frac{n!C_N^n}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

(1)与(2)的结果是一样的,其实(1)与(2)中的两个事件是相等的. 由(1)的结果可推出:某个盒子中至少有两个球的概率为 $1-\frac{A_N^n}{N^n}$;当 $n=N$ 时,每个盒子中恰好有一个球的概率为$\frac{n!}{n^n}$.

此抽象模型对应许多实际问题. 例如,掷骰子 6 次,每次出现不同点数的概率为 $\frac{6!}{6^6}=0.015\ 43$,这意味着若将一枚骰子掷 6 次,要得到各次出现的点数各不相同是多么不容易. 又如,设每个人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的,即都等于$\frac{1}{365}$,那么随机选取 $n(n\leqslant 365)$ 个人,他们的生日各不相同的概率为$\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}$,$n$ 个人中至少有两人生日相同的概率为 $p=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}$. 如果 $n=50$,可算出 $p=0.970$,即在一个 50 人的班级里,"至少有两人生日相同"这一事件发生的概率与 1 的差别就不大了;如果 $n=100$,可算出 $p=0.999\ 999\ 7$,这一概率几乎就是 1 了.

例 1.9 袋中有 a 只白球、b 只红球,k 个人依次在袋中取一只球:

(1) 做放回抽样(即前一人取一只球观察其颜色后放回袋中,后一人再取一只球).

(2) 做不放回抽样(即前一人取一只球观察其颜色后不放回袋中,后一人再取一只球).

求第 $i(i=1, 2, \cdots, k)$ 人取到白球(记为事件 B) 的概率(设 $k\leqslant a+b$).

解 本题是古典概型.

(1) 放回抽样的情况. 第 1 人取到白球的概率为$\frac{a}{a+b}$,因是放回抽样,第 2 人、第 3 人……第 i 人取到白球的概率均为 $\frac{a}{a+b}$,即 $P(B)=\frac{a}{a+b}$.

(2) 不放回抽样的情况. k 个人各取一只球,每种取法是一个基本事件. 第 1 人有 $a+b$ 种取法,第 2 人有 $a+b-1$ 种取法 …… 第 k 人有 $a+b-(k-1)$ 种取法,由乘法原理知 k 个人各取一只球有$(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)=A_{a+b}^k$ 种取法. 当事件 B 发生时,第 i 人取的应是白球,它可以是 a 只白球中的任一只,有 a 种取法. 其余被取的 $k-1$ 只球可以是其余 $a+b-1$ 只球中的任意 $k-1$ 只,共有$(a+b-1)(a+b-2)\cdots[a+b-1-(k-1)+1]=A_{a+b-1}^{k-1}$ 种取法. 于是事件 B 中包含 aA_{a+b-1}^{k-1} 个基本事件.

故 $P(B)=\frac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k}=\frac{a(a+b-1)(a+b-2)\cdots[a+b-1-(k-1)+1]}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}$

$=\frac{a}{a+b}.$

注意 $P(B)$与 i 无关,即 k 个人取球,尽管取球的先后次序不同,各人取到白球的概率是一样的,大家机会均等(例如在购买福利彩票时,各人得奖的机会是一样的). 这正好和我们日常生活经验相符. 比如 10 个人分 7 张电影票,若采用抓阄决定谁去看电影,无论先抓还是后抓,每人得到票的概率相等,都是 0.7. 另外还要注意的是,放回抽样的情况与不放回抽样的情况下 $P(B)$是一样的.