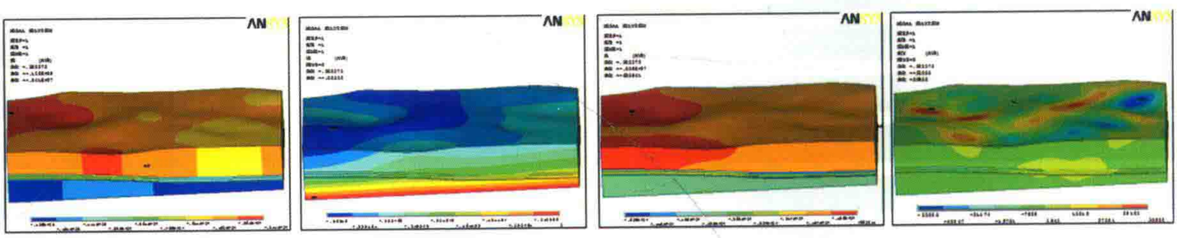
普通高等院校规划教材

工程地质数值法

李晓军 / 主编

Gongcheng Dizhi Shuzhifa



中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

普通高等院校规划教材

工程地质数值法

李晓军　主　编

中国矿业大学出版社

内容提要

工程地质数值方法是将工程地质学与计算机科学、数学、力学交叉并应用于地质工程、岩土工程、地下工程、水利工程、采矿工程、铁道工程、公路工程、石油工程等诸多学科的专业基础课。

本书涵盖了利用数值方法求解主要工程地质问题的相关内容。全书共七章，第一章介绍了工程地质问题的数值分析方法及实施步骤，数值分析方法包括有限单元法、有限差分法、离散单元法、边界单元法和拉格朗日元法；第二章利用有限单元法分析平面问题，具体介绍了平面三节点问题的理论解与数值解的求解过程；第三章为基于 Suffer 软件的三维地质模型构建过程；第四章利用有限元软件 ANSYS 模拟介绍了隧道开挖施工及支护的过程；第五章利用 ANSYS 软件模拟了双联拱隧道全断面开挖过程；第六章为岩土材料扫描电镜图像二维数值重建与仿真；第七章介绍了工程地质数值法中数据读入和写出的具体思路并给出了范例。

本书理论简明扼要，注重于工程地质数值方法在地质工程及相关领域的发展和应用。满足地质工程及相关专业“工程地质数值法”课程的教学要求，既可作为地质工程或相关专业的本科生教材，也可作为从事地质工程或相关领域科研人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程地质数值法/李晓军主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2018.9

ISBN 978-7-5646-4071-2

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①工程地质—数值计算 Ⅳ. ①P642

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 178874 号

书　　名　工程地质数值法
主　　编　李晓军
责任编辑　黄本斌
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　　(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885763　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　江苏凤凰数码印务有限公司
开　　本　787×1092　1/16　**印张** 10.75　**字数** 268 千字
版次印次　2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷
定　　价　20.00 元

前　言

目前，国内外的仿真分析方面已经出现了许多主流通用的有限元分析软件平台，如ABAQUS、MSC、COMSOL Multiphysics、FLAC、ADINA、ANSYS等，这些软件平台均具有其自身特点和优势。本书主要运用有限元软件ANSYS对部分典型地质工程问题进行模拟分析，可作为广大读者的操作指南和实用参考。本书可作为地质工程或相关专业的本科生教材，也可作为从事地质或相关领域科研人员的参考用书。

全书共分为七章，第一章介绍了工程地质问题的数值分析方法及实施步骤，数值分析方法包括有限单元法、有限差分法、离散单元法、边界单元法和拉格朗日元法；第二章利用有限单元法分析平面问题，具体介绍了平面三节点问题的理论解与数值解的求解过程；第三章为基于Suffer软件的三维地质模型构建过程；第四章利用有限元软件ANSYS模拟介绍了隧道开挖施工及支护的过程；第五章利用ANSYS软件模拟了双联拱隧道全断面开挖过程；第六章为岩土材料扫描电镜图像二维数值重建与仿真；第七章介绍了工程地质数值法中数据读入和写出的具体思路并给出了范例。

本书编写分工如下：第1章由西安科技大学李晓军编写，第2～4章由长安大学博士研究生袁高昂、西安科技大学李晓军编写，第5～7章由西安科技大学李晓军及硕士研究生谢晓婷、史秦源、李昊编写。最后全书由李晓军统稿。

本书在编写过程中，吸收了部分已经毕业及在读硕士研究生科研工作的部分成果，参考了国内外大量相关文献，在此向各位学者致以诚挚谢意。教材编写过程中得到了中国矿业大学出版社的支持，感谢相关编辑对本书的校正，在此表示衷心感谢。

限于作者水平，书中不足之处在所难免，敬请各位读者批评指正。

作　者

2018年6月

目　　录

第一章　概　　论

工程地质学是一门应用地质学的原理为工程应用服务的学科，主要研究内容涉及地质灾害、岩石与第四纪沉积物、岩体稳定性、地震等。工程地质学广泛应用于工程规划、勘察、设计、施工与维护等各个阶段。工程地质是调查、研究、解决与人类活动及各类工程建筑有关的地质问题的科学。

工程地质研究的主要内容有：确定岩土组分、组织结构（微观结构）、物理、化学与力学性质（特别是强度及应变）及其对建筑工程稳定性的影响，进行岩土工程地质分类，提出改良岩土的建筑性能的方法；研究由于人类工程活动的影响而破坏的自然环境的平衡，以及自然发生的崩塌、滑坡、泥石流及地震等物理地质作用对工程建筑的危害及其预测、评价和防治措施；研究解决各类工程建筑中的地基稳定性，如边坡、路基、坝基、桥墩、硐室，以及黄土的湿陷、岩石的裂隙破坏等，制定一套科学的勘察程序、方法和手段，直接为各类工程的设计、施工提供地质依据；研究建筑场区地下水运动规律及其对工程建筑的影响，制订必要的利用和防护方案；研究区域工程地质条件的特征，预报人类工程活动对其影响而产生的变化，作出区域稳定性评价，进行工程地质分区和编图。随着工程建设大规模的发展，其研究领域日益扩大。除了岩土学和工程动力地质学、专门工程地质学和区域工程地质学外，一些新的分支学科正在逐渐形成，如矿山工程地质学、海洋工程地质学、城市工程地质及环境工程地质学、工程地震学等。

工程地质研究的目的是为了查明各类工程场区的地质条件，对场区及其有关的各种地质问题进行综合评价，分析、预测在工程建筑作用下，地质条件可能出现的变化和作用，选择最优场地，并提出解决不良地质问题的工程措施，为保证工程的合理设计、顺利施工及正常使用提供可靠的科学依据。

工程地质学的应用性很强，各种工程的规划、设计、施工和运行都要做工程地质研究，才能使工程与地质相互协调，既保证工程的安全可靠、经济合理、正常运行，又保证地质环境不因工程建设而恶化，造成对工程本身或地质环境的危害。

第一节　工程地质问题

工程地质问题是指与人类工程活动有关的地质问题。它影响建筑物建设的技术可能性、经济合理性和安全可靠性。如建筑物所处地质环境的区域构造稳定问题、地基岩体稳定问题、地下洞室围岩稳定问题和边坡岩体稳定问题、水库渗漏问题、淤积问题、浸没问题、边岸再造及坝下游冲刷问题，以及与上述问题相联系的建筑场地的规划、设计和施工条件等方面的问题。工程地质工作的基本任务在于对人类工程活动可能遇到或引起的各种工程地质问题作出预测和确切评价，从地质方面保证工程建设的技术可行性、经济合理性和安全可

靠性。

工程地质问题是指已有的工程地质条件在工程建筑和运行期间会产生一些新的变化和发展,构成威胁影响工程建筑安全的地质问题。由于工程地质条件复杂多变,不同类型的工程对工程地质条件的要求又不尽相同,所以工程地质问题是多种多样的。就岩土工程而言,主要的工程地质问题包括以下几个方面。

一、洞室围岩稳定性

地下洞室开挖之前,岩体处于一定的应力平衡状态,开挖使洞室周围岩体发生卸荷回弹和应力重新分布。如果围岩足够坚固,不会因卸荷回弹和应力状态的变化而发生显著变形和破坏,开挖出的洞室就将是稳定的。相反,如果围岩适应不了回弹应力和重分布应力的作用,随着时间的推移,开挖出的洞室就会逐渐丧失其稳定性。此时,如果不加固或加固而未保证质量,都会引起破坏事故,对地下洞室的施工和运营造成危害。在国内外地下建筑史中,由于围岩失稳而造成的事故是屡见不鲜的。此外,由于对围岩应力估计过高或对岩体强度估计不足,也常使地下洞室的设计过于保守,提高工程造价,造成不必要的浪费。可见,为了保证地下建筑既安全又经济,工程地质工作者必须了解和掌握有关围岩应力重分布、围岩变形破坏机制以及分析和评价围岩稳定性的基本原理,以便能够在工程地质勘查过程中,为正确解决地下建筑的设计和施工中的各类问题提供充分而可靠的地质依据。一般在工程建设规划和选址时要进行区域稳定性评价,研究地质体在地质历史中受力状况和变形过程,研究岩体结构特性,预测岩体变形破坏规律,进行岩体稳定性评价以及考虑建筑物和岩体结构的相互作用。这些都是防止工程失误和事故,保证洞室围岩稳定所必需的工作。

二、地基稳定性

任何工业与民用建筑物的承力结构系统都是由上部结构、基础结构和地基三部分组成的。上部结构是工程的主体,是根据使用的要求设计的,它本身要能承受自己的重力及外加荷载(包括动力荷载),并通过基础结构将这些荷载安全地传递给地基。地基是工程的支承体,接受由基础传递来的全部荷载,在保证地基本身不破坏的同时,要求地基的变形或沉降不致危及上部结构的安全与使用。然而,地基本身又是地质体,从属于建设地点自然环境条件下的表层地质构成。建设场地可能选定在大地上人类能够生存的任何地方,如山陵地带、平原地带、滨海地带、沼泽地带或冻土地带等,因此其地表地质的构成是千变万化的,地基也可能是岩体,但更广泛的是土体。它们的工程地质性质很不相同,对建筑工程的支承能力也有很大差别。因此,研究各类工程地基的可能性、适宜性和稳定性是一门十分重要的学科。地基失去稳定就意味着工程的破坏。地基的主要问题在于弄清地基的工程地质特性,由此选择最经济合理的基础方案,使得上部结构的荷载能合理地分布在地基中,也使得地基能稳妥地支承上部工程结构。

三、斜坡稳定性

自然界的天然斜坡是经受长期地表地质作用达到相对协调平衡的产物,人类工程活动尤其是道路工程需开挖和填筑人工边坡(路堑、路堤、堤坝、基坑等),斜坡稳定对防止地质灾害发生及保证地基稳定十分重要。斜坡稳定问题工程地质分析包含了两个相互联系的基本

任务：一方面要对与人类工程活动有关的天然斜坡或已建成的人工边坡的稳定状况、演化趋势及成灾可能性作出评价和预测；另一方面为设计合理的边坡及制定有效的整治措施提供依据。斜坡的失稳和成灾总是与它的变形破坏相联系，因而要对斜坡稳定性作出确切的评价和预测，必须阐明斜坡是否具有发生危害性变形与破坏的可能，以及变形破坏的方式和规模。要设计一个稳定而又经济合理的边坡，也应以保证边坡在使用运营期间不发生危害性变形和破坏为基本准则。所以斜坡稳定问题的工程地质分析，都要从研究斜坡变形和破坏的规律入手。

四、区域稳定性

区域稳定性首先要研究工程建设地区的地壳稳定性；其次研究以内动力为主引起的区域地壳稳定问题；最后还应强调研究自然外动力和人为活动引起的区域地壳稳定性问题，如外力引起的物理地质作用，人为引起的水库诱发地震、抽取地下水和开发地下矿产引起的大面积地面沉降与塌陷等。对于大型水电工程、地下工程以及建筑群密布的城市地区，区域稳定性问题应是首要论证的问题。

第二节 工程地质数值分析方法

近年来，随着电子计算机的广泛使用，解决工程地质问题的数值分析方法有了突飞猛进的发展，工程地质数值方法的不断成熟和完善，得以解决的工程地质问题更加广泛，研究的课题更加深入。一方面，飞速发展的工程地质学不断地提出新的难题，用现成的数学力学理论对其无法作出确切的描述，工程地质数值方法为解决这类问题提供了可能的手段；另一方面，各种数值方法的不断成功应用，深化了人们对许多工程地质现象的理解，并有力地推动了工程地质学科的定量化进程。

长期以来，工程地质学被当作为经验的学科，对大多数复杂工程地质问题只能作出定性的分析。现代工程建设的规模越来越大，场地条件也越来越复杂，因而产生的工程地质问题也越来越复杂。对这些问题进行分析评价时，采用传统的解析法求解偏微分方程是不可能的，因而数值分析方法得到了广泛的应用。

数值方法的突出优点是能够较好地考虑诸如介质的各向异性、非均质特性及其随时间的变化、复杂边界条件和介质不连续性等复杂地质条件。高速电子计算机的广泛使用，解决了冗繁的数值运算问题，因而数值方法日益广泛地应用在工程地质问题分析的各个方面。

在工程地质问题分析中，最常用的数值方法包括有限单元法、离散单元法和边界单元法，此外，除较早的有限差分法外，新近还发展了半解析元法和无界元法。这些数值方法都有各自的长处和短处及适用条件，不能笼统地说哪种方法更好，应当根据具体工程地质问题的特点及其边界条件加以选用。

有限差分法是最早出现的数值解法，在计算机出现以前就有了，它至今在解决一些工程地质问题中仍然有效。有限单元法从 20 世纪 50 年代开始盛行，现已非常成熟，应用领域较广泛。边界单元法是 20 世纪 70 年代兴起的一种数值方法，由于它有降维作用，且计算精度高，对于解决无限域或半无限域问题尤为理想，所以也很适用于岩（土）体工程地质问题分析。半解析元法的基本思想是张佑启（Y. K. Cheung）在 1968 年提出来的，即有限条法，它

是数理方程的解析方法与数值方法相结合的求解方法，借用部分解析解以减少纯数值方法的计算工作量，适用于解决高维、无限域及动力场问题。离散单元法最早是康德（Cundall）在 1971 年提出来的，之后发展极快，是一种很有发展前途的数值方法。无界元法是为了解决有限元法所遇到的“计算范围和边界条件不易确定”而提出来的，是解决岩石力学问题的另一类有效方法。

为了解决复杂的工程地质问题，对各种数值分析方法要扬长避短，集中各种数值方法的优点，近年来数值方法的耦合分析有了长足的进步。如有限单元法与边界单元法耦合，有限单元法与离散单元法耦合及边界单元法与离散单元法耦合等都有了不少应用，解决了不少复杂条件的数值模拟问题。

一般而言，数值方法可分为区域型和边界型两大类：区域型数值方法主要包括有限单元法、有限差分法和离散单元法等；边界型数值方法主要是边界单元法。

采用有限差分法时，将所考虑的区域分割成网格，用差分近似代替微分，把微分方程变换成差分方程。也就是通过数学上的近似，把求解微分方程的问题变换成求解关于节点未知量的代数方程组的问题。

采用有限单元法时，将所考虑的区域分割成有限大小的小区域（单元），这些单元仅在有限个节点上相连接。根据变分原理把微分方程变换成变分方程。它是通过物理上的近似，把求解微分方程问题变换成求解关于节点未知量的代数方程组的问题。

离散单元法与有限单元法类似，它假定单元块体是刚体，块体单元通过角和边相接触，其力学行为由物理方程和运动方程控制。与有限单元法不同的是，它可以允许单元间相互脱离，单元可以产生较大的非弹性变形。因此，离散单元法更适用于断裂控制的岩体稳定问题。

采用边界单元法时，根据积分定理，将区域内的微分方程变换成边界上的积分方程。然后将边界分割成有限大小的边界单元，把边界积分方程离散成代数方程。同样把求解微分方程变换成求解边界节点未知量的代数方程组，然后由边界节点上的值求出区域内任一点的函数值。

近年来，计算机系统的迅速发展使得计算成本日益降低，各种系统软件得到了快速的发展和应用，大大地促进了数值计算方法在工程地质中的应用。目前，常用的比较成熟且应用较广泛的计算软件列于表 1-1。

表 1-1　　常用的岩土工程计算软件列表

方法	缩写	代表软件
有限单元法 Finite Element Method	FEM	ANSYS MIDAS/GTS ABAQUS
有限差分法 Finite Difference Method	FDM	GMS WHI Visual Modflow
离散单元法 Discrete Element Method	DEM	UDEC 3DEC

续表 1-1

方法	缩写	代表软件
边界单元法 Boundary Element Method	BEM	Phase
拉格朗日元法 Fast Lagrangian Analysis of Continua	FLAC	FLAC2D FLAC3D FLAC/Slope

第三节 工程地质数值方法的应用与实施步骤

一、工程地质数值方法的应用范围

1. 工程地质现象机制的研究

工程地质数值模拟对于分析工程动力地质现象的机制具有特殊的意义。过去通过工程地质定性研究，揭示了工程岩(土)体的许多机制问题，但对于一些特殊的机制问题爱莫能助。数值方法可以从新的角度对许多以前一直不能很好解释的问题作出分析，并揭示出许多新的规律，从而为工程地质问题的分析提供了一种新的手段。近年来，工程地质实践已经在这方面积累了越来越多的经验。

数值方法对工程地质现象与过程的模拟，主要是根据岩(土)体现有的变形破坏特征或发展阶段，在建立工程地质或岩体力学模型的基础上，再现工程岩(土)体过去的变形破坏发展演化历史，从而从整体上分析岩(土)体变形破坏内部作用过程及其全过程演化机制。一般讲，这种数值模拟的意义并不在于具体数值的"准确性"，而在于对规律的探索。

2. 工程区岩体应力边界条件或区域构造应力的反演

通过实测获得某些点的应力值资料，推测一定范围内应力场的状况是工程地质研究中的一个很重要的内容，是工程岩体稳定性分析必不可少的资料。通过应力的反演，不仅可得到工程区地应力场的总体认识，而且可以获得工程岩体应力边界条件。

3. 工程岩(土)体位移场和应力场的模拟

在已知工程区岩土体边界条件和外荷载的情况下，通过数值分析方法可以得到位移场和应力场分布的细节及其与外界条件的关系，这是数值方法的基本功能。此外，还可以计算应力场间接参数(如应力强度因子、断裂扩展力等)的空间分布特征。

4. 岩(土)体稳定性模拟

通过对岩(土)体变形破坏规律的模拟，可以分析其变形破坏的过程，评价其稳定性性状，并预测其未来变化。具体而言，可以解决两类问题：一是在已知边界条件和地质模型条件下的模拟再现，即通过模拟再现过去的发展历史，从而评价工程岩(土)体的稳定性现状，并在此基础上，通过对模型的时间延伸，预测其稳定性未来发展变化的趋势或失稳破坏方式；二是在边界条件及主导因素尚不甚清楚的条件下的模拟验证，即以不同的边界条件和主导因素建立力学模型，进行数值模拟，确定出对地质体变形破坏现状特征或演化阶段拟合的最好模型，从而确定岩体变形破坏的边界条件和主导因素，进而评价其稳定性。

工程地质数值模拟不是一个简单的“运算”过程，而是包含着从野外工程地质调查到室内试验研究、地质力学模型抽取、计算模拟和野外验证的全过程，它的可靠性和准确性在很大程度上取决于对地质原型认识的正确性。

二、工程地质数值模拟的工作步骤和研究内容

1. 工程地质条件的调研

工程地质条件的查明是工程地质工作也是数值分析的基础和前提。对于工程地质条件的调研，不仅限于地面测绘，野外坑槽探、钻探、物探、试验和长期观测也是常用的手段。各具体的工程地质问题所侧重的调研内容不尽相同，如对区域稳定性问题，着重研究的是地壳现代应力场特征、断裂的现代活动与地震以及与此相关的水文地质条件等。值得注意的是：岩土体物理力学参数的测试，与地质体本构关系相关的地质条件的查明是本阶段不可忽视的工作。

2. 地质模型的抽取

地质模型是在工程地质条件综合分析的基础上，对工程地质体的概括或简化，也就是通常所说的定性研究结论的归纳，故也可称为“概念模型”。如对水库诱发地震控制性断裂的认识、地质边界条件、水文地质条件的组合特征、断层危险性分区分带及可能震中的判断等，即可看作为水库诱发地震的地质模型。应当看到，这种对地质体的认识必须是全面的、总体的，否则只能看作为模型的某一片断。可以认为，工程地质工作的主要任务就是在查明工程地质条件的基础上，论证地质模型，解决工程地质问题。

3. 力学模型的建立

在地质模型的基础上，通过合理的抽象、简化和概括，便可建立工程地质数值分析的力学模型。力学模型是直接用作数值计算的，因此它必须突出控制工程地质问题的主导因素，既能准确地反映地质体的客观实际，同时又具有力学分析的可能性和计算机条件保障的可行性。与力学模型建立直接相关的几个问题包括：① 具有相对独立的力学结构范围的选取；② 地质体条件（包括诸如断裂的选取）的确定；③ 计算边界条件（位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件）的选用等。

4. 数值计算结果的检验

数值计算应当满足一定的精度和可靠度。除通过适当的数学手段可进行检验外，最根本的方法是将计算结果与实际工程地质条件对比。有时需要进行必要的理论分析和模型试验。检验时如果只挑选少数的数据核对，可能由于机会上的巧合，结论仍是错误的。只有针对具体的问题，采用整套的数据，才能取得真正符合实际的检验效果。如果数值计算结果存在较大的误差，应当着手改善输入数据，修改力学模型和数值计算方法，有时需要对计算模型进行调整。

第二章　平面问题的有限单元法

实际工程问题，在进行适当简化后，可看成平面问题。平面问题比较简单，容易理解。因此，本章以平面问题为研究对象，阐明有限单元法的基本概念、理论和求解的一般步骤。

有限单元法，是一种有效解决数学问题的解题方法。其基础是变分原理和加权余量法，其基本求解思想是把计算域划分为有限个互不重叠的单元，在每个单元内，选择一些合适的节点作为求解函数的插值点，将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的节点值与所选用的插值函数组成的线性表达式，借助于变分原理或加权余量法，将微分方程离散求解。

第一节　平面问题简介

严格地说，任何实际问题都是空间问题，应该考虑所有的应力、应变和位移分量。但是，如果所研究的结构或构件具有特殊的几何形状，承受某种特殊的外力和几何约束，就可以对其进行简化。在平面问题中，忽略一些应力或应变分量，其余的则只是坐标 x、y 的函数。这样，可以使分析计算工作量大为减少。根据弹性体的几何形状和受力状态，平面问题包括平面应变问题和平面应力问题。

一、平面应力问题

属于平面应力问题的弹性体，其几何形状是等厚度薄板，受到平行于板面且沿板厚 t 均匀分布的外力作用，前、后板面为自由表面。研究这种薄板时，坐标面 xoy 总是取在平分板厚的中间面内，z 轴垂直于板面，如图 2-1(a)所示。

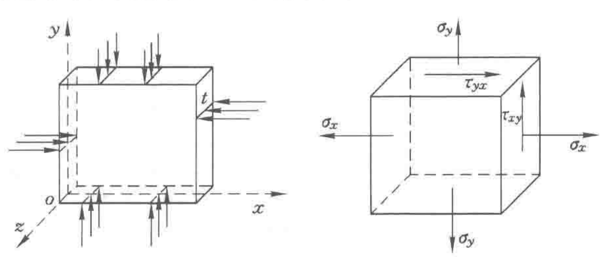


图 2-1　平面应力示意图

由于板面是自由表面，故在 $z=\pm t/2$ 的前、后表面处，有 $\sigma_z=\tau_{zy}=\tau_{zx}=0$。又由于板很薄，外力不沿厚度 t 变化，因此可认为板内所有各点处都有 $\sigma_z=\tau_{zy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau_{xz}=0$。

在板内垂直于 x 轴和 y 轴的平面上，只剩下平行于 xoy 平面的三个应力分量，σ_x，σ_y，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，板内的点处于图 2-1(b)所示的平面应力状态。而且，这三个应力分量沿板厚 t 不

变，即与点的 z 坐标无关，只是坐标 x、y 的函数。

平面应力问题的应力列阵简化为：

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{2-1}$$

由 $\sigma_z=\tau_{zy}=\tau_{zx}=0$ 可得：$\gamma_{zy}=\gamma_{zx}=0$。

$\varepsilon_z=-\mu(\sigma_x+\sigma_y)/E\neq 0$，它不是独立的，取决于 σ_x 和 σ_y。

平面应力问题中所考虑的应变分量只有 ε_x、ε_y 和 γ_{xy}，它的应变列阵简化为：

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{2-2}$$

从而可以解得用应变分量表达应力分量的物理方程为：

$$[\sigma]=[D]\{\varepsilon\} \tag{2-3}$$

平面应力问题的弹性矩阵 $[D]$ 为：

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{2-4}$$

几何方程简化为：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{2-5}$$

归纳起来，平面应力问题的特点是：物体沿某一坐标方向（如 z 方向）的尺寸远小于其他两个坐标方向的尺寸；外力沿周边作用且与 xoy 平面平行，且体积力也垂直于 z 轴；由于物体在 z 方向厚度很小，故外载的表面力和体积力都可看成是沿 z 方向不变化的。约束条件在 xoy 平面内。在这种情况下，所有应力都发生在 xoy 平面内，沿 z 方向无应力，即 $\sigma_z=0$。故平面应力状态的应力分量为 σ_x、σ_y、τ_x 和 τ_y，且都是 x、y 的函数。

在工程实际中，许多机械零件都可作为平面应力问题处理。例如，发动机连杆、直齿圆柱齿轮、平面凸轮等。

二、平面应变问题

设想有无限长的截面柱体，受到平行于横截面且不沿轴线变化的外力作用，如图 2-2 所示。显然，任一横截面的情况都相同，都是一个对称面，所以柱内的应力、应变、位移分量都不沿 z 轴变化，只是 x、y 的函数；而且不存在垂直于对称面的位移，即 $w=0$，每个横截面内只有沿 x 和 y 方向的位移分量 u、v 存在，因而这种问题称为平面位移问题。

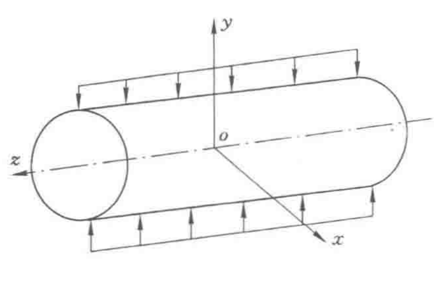


图 2-2 平面应变示意图

根据上述位移的特点，由几何方程可知：$\varepsilon_z=\gamma_{zy}=\gamma_{zx}=0$。因而在 6 个应变分量中，只剩下平行于 xoy 平面的 3 个应变分量 ε_x、ε_y 和 γ_{xy}，故称为平面应变问题。

在物理方程中，由 $\gamma_{zy}=\gamma_{zx}=0$，可知 $\tau_{zy}=\tau_{zx}=0$。

由 $\varepsilon_z = 0$，可知 $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$，但不是独立的。

柱体内任一点的应力状态已不是平面应力状态了，但仍然只需考虑平行于 xoy 平面的三个应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 和三个应变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy}。

由应变分量可得应力分量的物理方程为：

$$[\sigma] = [D]\{\varepsilon\}$$

其中，平面应变问题的弹性矩阵为：

$$[D] = \frac{E}{(1-2\mu)(1+\mu)}\begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{2-7}$$

对比平面应力的弹性矩阵和平面应变的弹性矩阵可知，只需把平面应力问题的弹性矩阵中的 E 换成 $E/(1-\mu^2)$，把 μ 换成 $\mu/(1-\mu)$，就可得出平面应变问题的弹性矩阵。

归纳平面应变问题的特点：物体沿某一坐标方向（如 z 方向）的尺寸远大于沿其他两个坐标轴的尺寸；垂直于 z 轴各截面的形状和尺寸均相同；所有外力与 z 轴垂直，且不随 z 坐标变化；物体的约束条件不随 z 坐标而改变。在这种情况下，物体远离两端的各截面，可认为没有沿 z 方向位移，而沿 x 和 y 方向的位移对各截面均相同，与 z 坐标无关，各截面内将产生平面应变。z 方向的应变 $\varepsilon_z = 0$，三维应力状态下，只包含有 σ_x，σ_y，τ_{xy}，$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$，$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$，而且应力分量均为 x、y 的函数。

上述两种平面状态的平衡方程、几何方程、边界条件和变形连续方程都是相同的，唯有物理方程有差别。如果把平面应力问题中的 E 换成 $E/(1-\mu^2)$，把 μ 换成 $\mu/(1-\mu)$，则两种问题的求解就相同了。

第二节　有限单元法的基本原理

在有限单元法中，把计算域离散剖分为有限个互不重叠且相互连接的单元，在每个单元内选择基函数，用单元基函数的线形组合来逼近单元中的真解，整个计算域上总体的基函数可以看成由每个单元基函数组成的，则整个计算域内的解可以看作是由所有单元上的近似解构成。

在数值计算中，常见的有限元计算方法是由变分法和加权余量法发展而来的里兹法和伽辽金法、最小二乘法等。根据所采用的权函数和插值函数的不同，有限单元法也分为多种计算格式。从权函数的选择来说，有配置法、矩量法、最小二乘法和伽辽金法；从计算单元网格的形状来划分，有三角形网格、四边形网格和多边形网格；从插值函数的精度来划分，又分为线性插值函数和高次插值函数等。不同的组合，同样构成不同的有限单元计算格式。对于权函数，伽辽金法是将权函数取为逼近函数中的基函数；最小二乘法是令权函数等于余量本身，而内积的极小值则为对代求系数的平方误差最小；在配置法中，先在计算域内选取 N 个配置点，令近似解在选定的 N 个配置点上严格满足微分方程，即在配置点上令方程余量为 0。插值函数一般由不同次幂的多项式组成，但也有采用三角函数或指数函数组成的乘积表示，但最常用的是多项式插值函数。有限元插值函数分为两大类：一类只要求插值多项式本身在插值点取已知值，称为拉格朗日(Lagrange)多项式插值；另一类不仅要求插值多项

式本身，还要求它的导数值在插值点取已知值，称为哈密特(Hermite)多项式插值。单元坐标有笛卡尔直角坐标系和无因次自然坐标，有对称和不对称等。常采用的无因次坐标是一种局部坐标系，它的定义取决于单元的几何形状，一维看作长度比，二维看作面积比，三维看作体积比。在二维有限元中，三角形单元应用最早，近年来四边形等单元的应用也越来越广。对于二维三角形和四边形典型单元，常采用的插值函数有拉格朗日插值直角坐标系中的线性插值函数及二阶或更高阶插值函数、面积坐标系中的线性插值函数及二阶或更高阶插值函数等。

有限单元法是一种求取微分方程近似解的有效方法，它是基于多组简单函数的组合来代替复杂函数，进而求得近似解。有限单元法的最基本单位为单元，单元与单元之间以节点联系起来，采用单元实现物体之间的应力、应变和位移关系；以有限的已知量逼近求解无限的未知量；通过有限元分析，能够实现任意形状的结构体在外力作用下的三类力学信息(位移、应变、应力)。有限单元法采用变分原理进行分析，通过结构体内部的单元节点实现函数值的求解。

有限元模型是真实系统理想化的数学抽象，由一些简单形状的单元组成，单元之间通过节点连接，并承受一定载荷。

有限元分析是把求解区域看作由许多小的在节点处相互连接的单元(子域)所构成，其模型给出基本方程的分片(子域)近似解，由于单元(子域)可以被分割成各种形状和大小不同的尺寸，所以它能很好地适应复杂的几何形状、复杂的材料特性和复杂的边界条件。

有限元分析的目的：针对具有任意复杂几何形状变形体，完整获取在复杂外力作用下它内部的准确力学信息，即求取该变形体的三类力学信息(位移、应变、应力)。在准确进行力学分析的基础上，对设计对象进行强度、刚度等方面的评判，对不合理的设计参数进行修改，以得到较优化的设计方案；然后，再次进行方案修改后的有限元分析，以进行最后的力学评判和校核，确定出最后的设计方案。

二维的弹性方程运用有限元求解比较普遍，弹性问题采用位移表示成公式，且任意单元的节点有两个自由度，表示在两个坐标轴方向上的位移值。二维弹性问题中矢量位移具有两个分量，它的一阶导数对应各种应变，并且应变与应力呈线性关系，应力与应变是二阶张量，因此具有某些数学和几何上的性质。二维弹性理论中的应变-位移方程把 x 和 y 坐标方向上的位移 u 和 v 与相应的应变联系起来，如下式所列：

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y};\ \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2-8}$$

法向应变 ε_{xx} 和 ε_{yy} 定义了在 x 和 y 方向上每单位长度的挠度。切向应变 ε_{xy} 定义了一个质点的相对角变形。

守恒方程定义了一个质点上的力的平衡。求解分析过程中，必须定义法向应力、切向应力和体积力的关系，如下式所列：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+f_y=0\end{cases} \tag{2-9}$$

二维弹性问题的力学模型为胡克定律，它用来表示应力与应变的关系。基本假设材料为弹性均匀体且各向同性，那么由此得到的应力与应变是与杨氏模量 E 和泊松比 μ 有关的

函数。二维弹性问题主要分为平面应力和平面应变问题。

平面应力出现在厚度尺寸相比于长度和宽度尺寸很小时的情况，并简单地假设法向（z 轴）上的应力为 0。应力应变关系为：

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=\dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{xx}+\mu\varepsilon_{yy})\\ \sigma_{yy}=\dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{yy}+\mu\varepsilon_{xx})\\ \sigma_{xy}=G\varepsilon_{xy}=\dfrac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{xy}\end{cases}\tag{2-10}$$

当一物体的长度相比横截面很大时，一个适当的假设是位移和 $\partial/\partial z$ 在 z 方向上为 0。由此得到平面应变的应力-应变关系为：

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=\dfrac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_{xx}+\mu\varepsilon_{yy}]\\ \sigma_{yy}=\dfrac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_{yy}+\mu\varepsilon_{xx}]\\ \sigma_{zz}=\mu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\\ \sigma_{xy}=G\varepsilon_{xy}=\dfrac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{xy}\end{cases}\tag{2-11}$$

线弹性有限元是以理想弹性体为研究对象的，所考虑的变形建立在小变形假设的基础上。在这类问题中，材料的应力与应变呈线性关系，满足广义胡克定律；应力与应变也是线性关系，线弹性问题可归结为求解线性方程问题。

第三节　有限元分析的基本方法

在弹性力学的解析方法中，把弹性体划分成无限多个微单元体的组合体来研究。通过对其中任一微单元体的平衡、几何及物理关系的分析，建立起对弹性体内任一点都适用的一系列基本微分方程，然后，设法找出满足所有基本方程和边界条件的解析解。这些解是点的坐标的表达式，可给出弹性体内任一点处所要求的未知量。从实质上来说，这种分析方法可以称为“无限小单元法”。然而，在大多数工程实际问题中，由于结构几何形状不规则和载荷情况的复杂性，要求得完全满足边界条件的解析解，在数学上非常困难。与弹性力学解析法不同，有限单元法是把连续的弹性体划分成有限多个彼此只在有限个点相连接的、有限大小的单元组合体来研究的，也就是用一个离散结构来代替原结构，作为真实结构的近似力学模型，以后的数值计算就在这个离散结构上进行。

目前，最广泛应用的有限单元法实际上是有限单元位移法。它取节点位移作为基本未知量，把原来具有无限多自由度的连续弹性体简化为有限个单元组成的离散结构，从而避免了解微分方程的麻烦。从单元分析入手，找出单元内的位移、应变、应力以及节点作用力与单元节点位移的关系，建立每个单元的刚度方程。然后，进行结构的整体分析，即组集联系整个结构的节点位移和节点载荷的总刚度方程。总刚度方程是包含有限个未知节点位移分量的线性代数方程组。最后，根据所求得的各单元的节点位移，利用单元分析得到的关系，就可求出各单元内的应力。