初等组合最优化论

（下册）

秦裕瑗　邓旭东　著

科学出版社

初等组合最优化论

（下册）

秦裕瑗　邓旭东　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书以生物进化为自然原型，模仿导数概念与牛顿切线法，通过建立基本变换公式与一般邻点法，形成了研究组合最优化论的核心思想和方法.本书分上、下两册共三篇(12 章)展开学术探讨，上册(上篇)建立了本学科的公理系统和科学研究纲领——发现算法的方法，指出组合型与连续型最优化理论的并行关系. 在此基础上，下册(中、下两篇)对多个经典问题的各自实例进行了探讨，整理出它们的常用求解算法，并探讨了它们之间的相互关系.

本书的读者对象主要是数学相关专业的研究人员与专家学者，也可作为数学、管理科学与工程等专业研究生的教材或科学研究工作者的参考书籍.

图书在版编目(CIP)数据

初等组合最优化论(下册)/秦裕瑗，邓旭东著. —北京：科学出版社，2018. 8

ISBN 978-7-03-052830-8

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①秦… ②邓… Ⅲ. ①组合-最优化 Ⅳ. ①O122.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 107952 号

责任编辑：李静科 / 责任校对：彭　涛
责任印制：张　伟 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2018 年 8 月第一次印刷　印张：19 1/4
字数：372 000

定价：118.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

撰写本书的中心意图是为数学分支——组合最优化建立基础理论系统. 本书首先给出了组合最优化问题的定义和一般最优化原理, 这是建设基础理论工作的第一层.

一个数学对象的优化问题由诸多实例组成, 每个实例涉及四个集合: 论域、可行解 (最优解)、可行域以及所赋实数值 (权) 所在集合. 在论述实例时, 总会涉及集合与其子集合之间, 或集合与元素之间的关系. 本书把一般原理应用于论域和可行域, 建立了论域型和可行域型的最优化原理. 对于最基本的实例, 例如, 规定可行解的值是诸元素的值之和, 所求最小值就是一种优化的提法, 记作 (min, +) 实例. 在以后的计算过程中, 这样的实数集必须构成一个半群. 遵从一些前辈学者的见解, 本书在两个可行解 a, b 之间建立了基本变换公式: $a\Delta\tau(U,W) \in \pi^{(2)}$, 其中 $U = a_b = a\backslash b, W = b_a = b\backslash a$, 符号 Δ 表示求集合间的对称差运算, 变换规则是 $\tau(U,W) = U \cup W$. 在演算基本变换公式的过程中, (min, +) 型实例所赋的实数之间是一个加法交换群. 在此基础上, 本书引入了邻域概念, 建立了拓扑结构. 像布尔巴基学派那样, 我们识别出组合最优化的三个基本结构, 即序结构、代数结构和拓扑结构方面应有的条件, 这是建设基础理论工作的第二层.

而采取什么技术, 添加什么辅助公理, 让所得结构成为人们较为熟悉或者有望开展研究工作的数学结构, 并有效地表现出来, 为以后所用, 不同学者所得的结果无须一致.

本书以基本变换公式为核心, 直接把所得的序结构与交换群合并, 在实数集上建立了互相同构的四个具体的 (max / min, +/×) 准域, 建立了强优选准域, 提出了极优代数方法, 加上从邻域概念所得的拓扑结构, 成为建设组合最优化论基础理论的最终表现形式.

本书还用基本变换公式建立了邻点型和碎片型的最优化原理, 把一般原理和所建立的这四个原理依次称为第 0, 1, 2, 3, 4 最优化原理, 这是建设基础理论工作的第三层.

最后, 基于上述数学结构系统, 建立了拉卡托斯型的研究组合最优化问题实例的纲领, 成为发现精确方法的方法. 还论述了它们不仅是组合最优化论的基础理论系统, 也能为组合数学、普通大学教育的运筹学课程所用.

上述所论组成本书上篇, 共六章. 由于没有涉及计算复杂性问题, 称之为初等组合最优化论的基础理论.

按数学对象的代数结构, 把问题分类为集合型、向量集型和方阵集型等. 中篇有三章, 第 7 章主要用极优代数方法讨论策略优化问题 (动态规划) 实例的求解方法, 并研究诸实例之间的元型–衍生关系和方法, 我们还重建了吴学谋的首 N 阶优化原理和吴沧浦的多目标优化原理; 第 8 章用基本变换公式直接得到线性规划的改进单纯形算法; 第 9 章用极优代数方法主要讨论同顺序流水作业排序问题.

下篇分三章. 第 10 章按科学研究纲领整理树的优化实例的诸种算法; 第 11 章以极优代数的摹矩阵为工具, 系统地讨论路的优化问题; 第 12 章建立了匹配优化原理, 像求解不定积分的方法那样, 在 Q 类图形上求解诸多匹配优化数字例.

论述过程中, 本书: ① 直接从问题的定义与一般原理得到了五种八个求解实例的初等方法 (合称为第 0 类方法), 再在上述四个新建的最优化原理上代数地导出各自 4 类求解实例的方法; ② 提出了一般优化扩充方法, 统一地求解了数列 (首 N 阶) 型、向量集 (多目标) 型与多项式型提法的广义策略优化实例; ③ 证明了策略优化问题与网络中两点间路的优化实例的同构性; ④ 用极优代数方法求解了策略优化问题的诸实例.

在高等数学中, 求解连续型最优化问题的基本方法是导数概念与牛顿切线法的组合, 记作〖(导数)+(牛顿切线法)〗. 在组合最优化论中, 我们用基本变换公式把可行解 a 的改变度簇 $\mathbf{C}(a)$ 理解为导函数, 则求解诸多实例的迭代法是〖(基本变换公式)+(一般邻点法)〗. 这不仅是对前者的一种摹写, 而且当人们把生物两性交配而得到的种子 (胎儿) 作为生物繁衍后代的基本手段时, 它们都是对达尔文的生物进化过程〖(种子 (胎儿))+(世代传承)〗的摹写. 这样, 我们在连续型与离散型最优化两套理论之间尝试实现数学形式上的统一性方面做出了进一步的工作.

第一作者从 20 世纪 70 年代中期开始接触动态规划至今, 40 年来学术方向一直没有改变, 1994 年 70 岁退休, 以此把学术工作分为前、后两期. 原本有从 1993 年开始花五年时间写成组合最优化基础理论的计划, 出乎意料地工作至今才告一段落. 期间有三年时间因病接受治疗, 感谢武汉同济医院章咏裳、周四维、庄乾元三位教授精心反复的治疗. 在审读清样阶段, 又因肺癌放疗术后体力下降, 终于用 20 天时间完成了审读, 使得本书的撰写和出版在艰难曲折的过程中完成. 庆幸本书最终出版面世.

在构思、撰写本书的过程中, 第二作者邓旭东同本人讨论了大量的相关学术问题, 并且对书中实例进行了演算, 共同完成了本书的撰写和编审工作.

在本书即将脱稿之际, 眼前不时地浮现出一位位学者慈祥友善的容貌, 亲切的叮嘱、讨论和询问的情景. 四十年来, 许多同行学者关注我们在学术上的摸索与进展, 在此深深地感谢他们.

我要特别感谢林诒勋教授, 自我们从 1978 年在烟台学术会议上结识起, 他一直是我工作的见证人. 他先后五六次评审我的 (包括本书) 专著和教材, 我们经常

书信来往, 在参加的多个学术会议上, 我们当面交谈, 他给了我很多的支持、指点和鼓励, 几乎在本书各章中都有他的见解, 本书所采用的基本术语“基本变换公式”也是遵从他的建议.

学术交流非常重要, 几乎每次参加会议, 我总是先准备好将要请教的问题, 这样得益会更多. 我深切感谢湖北省数学学会和运筹学会的同仁们, 还要感谢唐国春教授, 自 1990 年成立中国运筹学会排序专业委员会至今, 他每次都为我安排学术交流等事项.

40 年来, 武汉科技大学的领导, 几任党委书记和校长尤泽贵、丁永昌、任德麟、孔建益教授, 管理学院两任院长潘开灵与邓旭东教授, 都给予了我很多的帮助和支持, 在此表示衷心的感谢.

为了一件跨时几年甚至几十年才能完成的学术研究工作, 没有和睦的家庭是不可想象的, 一个学者能够得到家庭成员如此的理解和支持是幸福的, 我真诚地感谢妻子傅赛珍老师在生活上的关心和学术上对我的全面支持. 感谢长女明建、次女明复和女婿杨磊.

再次感谢所有关心本书出版的学者们, 也欢迎大家对本书提出宝贵意见和建议.

秦裕瑗

2016 年 11 月于武汉科技大学

下册摘要

本书以组合最优化问题的定义、一般最优化原理以及所建立的基本变换公式为基础, 建立初等组合最优化论, 分上、中、下三篇依次讨论基础理论、代数型与网络型优化问题.

上册 (上篇) 建立了组合最优化学科的公理系统和科学研究纲领——发现算法的方法, 指出组合型与连续型最优化理论的并行关系. 在此基础上, 下册 (中、下两篇) 对多个经典问题的各自实例进行了探讨, 整理出它们的常用求解算法, 并探讨了它们之间的相互关系.

中篇为代数对象型的优化问题, 共三章. 按代数对象所组成的优化问题进行分类, 依次在三章中讨论集合型、向量集型、方阵集型全排列优化问题, 包括拟阵、动态规划、线性规划以及全排列优化问题.

第 7 章是集合型三个优化问题. 简单讨论了初等子集优化问题和拟阵优化问题后, 在 Bellman 最优化原理的基础上, 用极优代数方法, 系统地讨论求解离散型动态规划问题的诸种实例. 不仅如此, 让基本变换公式中的一个可行解设为第 N 阶优化解, 建立了首 N 阶优化原理 (吴学谋); 让一个可行解改为多目标有效解, 从公式上建立了广义策略优化实例和原理, 得到了多目标型有效解原理 (吴沧浦).

在广义优选半环上建立了〖(广义优化原理)+(一般求解方法)〗, 统一地解决了数列 (首 N 阶) 型、向量集 (多目标) 型与多项式型的广义策略优化实例.

以求解和值最小型策略优化实例为元型实例, 设它有一个算法 ALGO, 所列的另一个提法所组成的实例有它自己的一个算法, 如果这只是有规则地反复调用算法 ALGO, 我们称这是元型实例的一个衍生实例.

第 8 章是向量集型优化问题. 直接用基本变换公式, 得到线性规划的改进单纯形法, 讨论了元型–衍生实例的关系, 得到相应求解问题的各自实例的方法和算法.

这样, 在基本变换公式的作用下, 归属于离散动态规划与线性 (整数) 规划的问题, 或者说, 几乎所有初等组合最优化问题并不像似 “离散数学最好不要太离散” 的范围之内, 它们有可能 “让组合最优化的诸问题组合到一个合理的理论系统中来”.

以和值极小型策略优化实例为元型实例, 第 1.5.2 节所列诸个提法所组成的实例全都是前者的衍生实例. 这样, 属于离散型策略优化问题的各种具体问题, 它们各自的实例之间, 一个元型实例与所列其他实例有着亲缘的元型–衍生关系. 把元型实例理解为一颗葡萄, 这个问题的诸实例成为一串葡萄, 属于离散动态规划诸多

问题的数字例展现出初秋时节的一个大型的繁茂的葡萄园.

第 9 章是方阵集型全排列优化问题. 作为排序论的一个简编, 本章先讨论了单机的基本排序问题, 对于同顺序 $m \times n$ 流水作业优化问题, 用 BLB 模型与极优代数方法按 $m = 2, 3$ 的情形, 讨论了多个实例, 得到了精确算法和启发式算法.

下篇为网络对象型的优化问题, 共三章, 主要讨论三个具体的网络对象 (如树、路及匹配等) 的优化问题. 它们都是已经获得丰富成果的问题, 本书基于研究问题实例的纲领, 整理它们各自的熟知算法, 甚至发现了新算法.

第 10 章是树的优化问题. 把和值最小型支撑树实例作为元型实例, 以树的基本性质为基础, 有序地把 9 个熟知算法归属于诸最优化原理之中, 还讨论元型实例的几种衍生实例, 因为所有上述求解算法都较容易, 本章没有讨论分支定界法.

第 11 章是路的优化问题, 这是组合最优化中最为基本、最为重要的问题之一. 在第 5, 7 章中已经用极优代数方法讨论了 $1 \times 1, 1 \times n$ 两类路的优化子问题, 在第 7 章证明了离散动态规划与网络图中路的优化问题同构, 再在第 8 章中讨论了离散动态规划总能用线性规划方法得到答案. 本章以网络的邻接摹矩阵的 n 次幂 Γ^n 为基础, 在第 11.5 节引入 "改进子" "迭代一次" 及 "迭代一轮" 的概念, 建立了一般改进算法. 先前代数地讨论 $1 \times 1, 1 \times n$ 两型子问题的实例, 得到 Ford 算法、Gauss-Seidel 算法、三个 Yen 算法. 它们只是从邻接摹矩阵直接调优改进, 迭代的轮数是小于 n 的某个数. 而后主要讨论 $n \times n$ 型实例的 Floyd 算法, 它是一个转折点, 它只需改进一轮就完成求解任务. 1985 年, 秦裕瑗 [秦8,9] 对 Floyd 算法作了代数证明, 并推广到块状结构的邻接摹矩阵中, 建立了凝结图的一般改进算法, 代数地得到了 Dantzig 算法、Dijkstra 算法、统筹方法以及二阶可分网络的 Hu 算法及其推广等, 它们全都具有确定迭代轮数的性质.

第 12 章是匹配优化问题. 按照第 6 章制定的研究纲领, 讨论匹配的基本概念、性质和算法, 还强调了分支法的有用性. 然后, 从第 3 (邻域型) 最优化原理得到本学科中广为人知的交错路方法. 而在第 4 (碎片型) 最优化原理下引入赋态匹配概念, 以匹配优化原理和极优代数为工具, 对一些结构十分简单的图 (称为图元) 建立各自的 "匹配–值矩阵", 再建立图元之间的串联、并联等的计算公式, 用它们代数地求解了不少具体而有趣的数字例, 称之为 Q 类图的匹配优化数字例. 这个系统的结构和论述思路与积分学中求解不定积分的系统十分类似.

让我们重复强调一点: 除了第 1, 2 章外, 应用基本变换公式, 贯穿地论述了全书各章内容; 表明了任何一个可以归结为离散动态规划或者线性规划的优化实例都各自具有代数的求解算法. 我们期盼, 有一天几乎所有组合最优化问题的实例都具有代数的求解方法.

我们期盼基本变换公式在组合最优化内部继续更好地发挥作用, 在组合数学其他分支中发挥同样的作用, 让运筹学教学大纲范围内各种问题有一个共同的理论基

础, 让连续型与组合型最优化的理论和方法成为并行不悖的系统, 让数学统一性的梦想能够再清晰一步.

随着中国梦的召唤, 面对组合最优化美妙的梦景蓝图, 真正需要的是人们同心不懈地努力工作. 本书作者愿意真诚地追随同行学者们, 一起努力, 厚望于梦想成真.

目　　录

(下　册)

下篇　网络对象型的优化问题

中篇　代数对象型的优化问题

按照组合最优化问题的定义, 在第 1.6 节把代数对象型的优化问题 PP 分类为 5 层 12 个子问题类, 依次标记为 PPjk.

本书中篇只讨论其中 8 个子问题. 第 7 章中主要讨论三个集合型优化问题, 它们是: PP11 初等子集优化问题, PP12 和值最小型拟阵的基集优化问题, PP13 策略优化问题 (离散动态规划问题); 第 8 章讨论向量集型优化问题, 每个元素表示实代数中的 m 维列向量, 有下列问题: PP21 非负组合基集优化问题 (线性规划问题), PP22 整数型组合向量子集优化问题 (纯整数线性规划问题), PP23 混合型整数线性规划问题, PP24 $\{0, 1\}$ 型规划问题; 第 9 章讨论方阵集型全排列优化问题, 特别是: PP31 幕方阵 $\{\Gamma^{(i)} : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 全排列优化问题, PP41 满足性问题, 以及应用它讨论排序论中的流水作业优化问题.

至于 PP15 巡回商问题, 在第 4 章末已经简单提及, 它与 PP41 满足性问题都是非常重要的问题. 由于求解此类问题的艰难性以及本书的任务限制, 就不展开讨论了.