LINEAR ALGEBRA

# 线性代数

主 编 唐 烁 朱士信
副主编 钱泽平 时 军



高等教育出版社

# 线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　唐　烁　朱士信

副主编　钱泽平　时　军

高等教育出版社·北京

**内容提要**

本书是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《大学数学课程教学基本要求》(2014 年版)和教育部考试中心制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”以及各学科专业对线性代数的基本要求，并结合作者多年的教学经验编写的。

本书分为行列式、矩阵及其运算、向量组、线性方程组、相似矩阵与二次型等五章。每章配有应用实例和用 MATLAB 进行计算的简单例子。本书结构严谨、条理清楚、语言通俗易懂、论述简明扼要、例题与习题难度适中且题型丰富。本书纸质内容与数字化资源一体化设计，紧密配合。数字课程涵盖微视频、电子教案、概念解析、典型例题解析、归纳总结、背景阅读、自测题等栏目，在提升课程教学效果的同时，为学生学习提供思维与探索的空间，便于学生自主学习。

本书可作为高等学校非数学类专业的线性代数教材，也可作为科技工作者学习线性代数知识的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数 / 唐烁，朱士信主编. -- 北京：高等教育出版社，2018.8

ISBN 978-7-04-049900-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①唐… ②朱… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 117527 号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 杨　帆　封面设计 张雨微　版式设计 于　婕
插图绘制 于　博　责任校对 刘丽娴　责任印制 田　甜

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | | http://www.hep.com.cn |
| 邮政编码 | 100120 | 网上订购 | http://www.hepmall.com.cn |
| 印　　刷 | 三河市吉祥印务有限公司 | | http://www.hepmall.com |
| 开　　本 | 787 mm×1092 mm　1/16 | | http://www.hepmall.cn |
| 印　　张 | 11 | | |
| 字　　数 | 260 千字 | 版　　次 | 2018 年 8 月第 1 版 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 印　　次 | 2018 年 8 月第 1 次印刷 |
| 咨询电话 | 400-810-0598 | 定　　价 | 24.00 元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

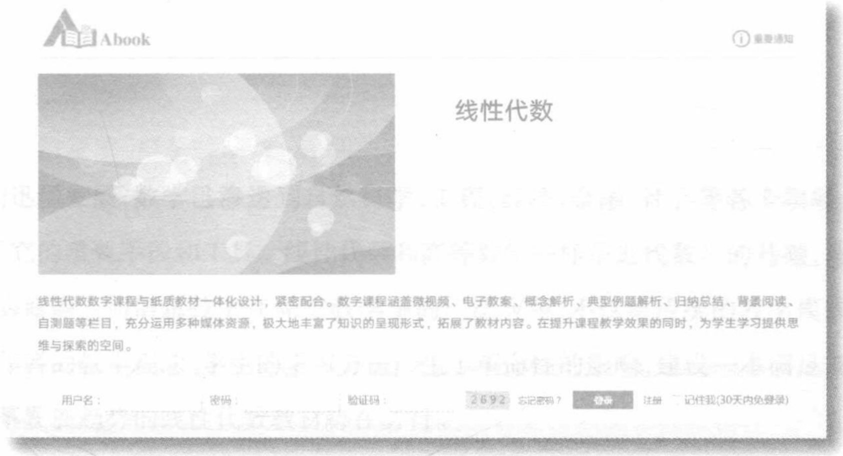


物 料 号　49900-00

# 线性代数

唐　烁
朱士信

1 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1247986，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2 注册并登录，进入"我的课程"。
3 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4 单击"进入课程"按钮，开始本数字课程的学习。




课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

微视频　　概念解析　　典型例题解析　　归纳总结

http://abook.hep.com.cn/1247986

# 前 言

随着社会的进步和科技的迅猛发展，数学已渗透到自然科学、工程、经济、金融、社会等各个领域，正日益成为各学科进行科学研究的重要手段和工具。线性代数和高等数学一样是近代数学的基础，是理工类、经济管理类等专业的必修课。而信息技术在课堂教学中的广泛应用，不仅给传统的教学模式带来了一场革命，也对教育工作者的教学理念、学生的学习方法产生了革命性的影响，建设一本满足高等教育教学需求、适应课程改革发展趋势的线性代数教材势在必行。

在本书的编写过程中，编者结合多年的教学经验，吸收了国内外优秀教材的特点，结合学生学习方式改变的新趋势，与数字化媒体进行有机的结合，以“纸质教材+数字课程”的方式对教材的内容和形式进行了整体设计。在教材的整体设计方面，主要体现以下思想：

1. 采用“纸质教材+数字课程”的出版方式。纸质教材与丰富的数字教学资源一体化设计，纸质内容精炼适当，通过正文设置旁白的方式，对教材内容进行补充说明、拓展讨论和归纳总结，以新颖的版式设计和内容编排，方便学生学习和使用。数字课程对纸质内容起到巩固、补充和拓展作用，形成以纸质教材为核心，数字教学资源相配合的综合知识体系。

2. 创新教学理念，引导混合式教学和个性化自主学习。通过适当教学设计，鼓励教师将课堂教学和数字课程教学进行有机融合，鼓励学生拓展知识面和针对某些重要问题进行深入探讨，增加其独立获取知识的意识和能力，为教师创新教学方法和满足学生自主学习提供支持。

3. 恰当地处理归纳法与演绎法、数学发现与知识传授、加强实际应用与理论发现能力的培养之间的关系，以提高学生综合分析能力和创新能力。

纸质教材的主要内容是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《大学数学课程教学基本要求》，并参照近年来教育部考试中心制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”中线

性代数部分进行编写的。纸质教材遵循创新、实用、通俗和满足不同层次学生需要的原则，具有以下特点：

1. 尽可能按照概念产生的原始思路来介绍相关概念，同时也突出重要且抽象概念产生的实际背景，以便学生在学习新概念的过程中比较自然地接受并加以深刻理解。

2. 突出线性代数在各学科领域的应用，列举相关实例，培养学生利用线性代数知识解决实际问题的意识和能力。

3. 加强线性代数与已学高等数学的联系，如利用矩阵来处理多元函数极值问题等。

4. 突出几何与代数的联系，如方程组和面面、线面、线线的关系等。

5. 将数学软件 MATLAB 融入线性代数，让学生在理解线性代数基本理论的基础上，用 MATLAB 进行数学计算，提高学生运用数学工具去解决实际问题的能力。

6. 语言通俗易懂、由浅入深、富于启发，便于学生理解与自学。

数字课程的教学资源以知识点为基础，紧密结合纸质教材，按照“重基础、强练习、拓视野”的原则，设置了微视频、电子教案、概念解析、典型例题解析、归纳总结、背景阅读、自测题等栏目。与正文相关知识点对应的数字资源类型及编号用标出，期望通过以上资源的设计与支持，帮助学生夯实代数基础，提高学习效率和能力、拓宽视野，同时帮助教师创新教学方法和教学活动。具体表现为：

1. 通过微视频、概念解析、典型例题解析、归纳总结等栏目，不断加强学生对基本概念、基本理论、基本方法的理解，提高学生解决问题的能力，引导学生对知识进行独立的思考和总结。

2. 自测题包含选择与填空两种题型，具有自动判解功能。通过在线自测，帮助学生实时了解自己对知识的掌握情况，并进行针对性的攻关学习，提高学习的效率。

需要说明的是，在编写教材的过程中，特别注重继承与改革的关系。我们参考了国内外大量的线性代数教材、参考书和网上资料，渴望将这些优秀教材长期形成的传统发扬光大，同时也将一些教学改革成果吸收进来。在此谨向相关参考文献的作者表示深深的谢意！

本书是在合肥工业大学全体数学教师的支持下编写完成的，其中的数字资源由唐烁、钱泽平、任蓓、赵征权、孙晓莉、张莉、刘植、时军、常山等建设完成。宁荣健、刘丽两位老师认真审阅了本书并提出了宝贵的意见，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免有一些不足甚至错误之处，渴望得到广大专家、同行和读者的批评与指正。

编　者

2017. 8

# 目录

# 第1章 行列式

行列式是一个非常重要的数学工具，它不仅在代数，而且在其他诸多领域都有着极其重要的作用.本章从引入行列式的实际背景入手，介绍了行列式的递归性定义，探讨了它的一系列性质，给出了计算行列式的若干方法和应用实例；其次，介绍了求解 $n$ 个方程 $n$ 个未知数的线性方程组的克拉默（Cramer）法则；最后还介绍了用 MATLAB 计算行列式.

## 1.1 行列式的概念

### 1. 行列式的引入

设有二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,通过消元法可求得该方程组唯一的解,为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了记忆方便,引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

注 关于行列式概念产生、发展的历史背景可参看数字课程中的背景阅读.

这样求解公式(1.2) 可以写成下列形式

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

由此可见,采用记号后,方程组(1.1)求解公式记起来就简单了.为此有下列定义:

定义 1.1 已知实数 $a,b,c,d$,将 $a,b,c,d$ 排成两行两列,记为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$$

称$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$为二阶行列式，$a,b,c,d$为行列式的元素.

由定义1.1可以看出，二阶行列式为一个算式，它是$a,d$所在的对角线（称为行列式的主对角线）上的元素的乘积$ad$与$b,c$所在的对角线（称为行列式的次对角线）上的元素的乘积$bc$之差.

我们再来解三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.3}$$

当$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$时，用消元法解得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+a_{23}b_1a_{31}+a_{13}b_3a_{21}-a_{11}b_3a_{23}-a_{21}b_1a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}a_{31}b_2+a_{21}a_{32}b_1-a_{11}a_{32}b_2-a_{12}a_{21}b_3-a_{22}a_{31}b_1}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}. \end{cases} \tag{1.4}$$

如果采用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

则上述三元一次线性方程组的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}.$$

由数的运算规律,我们进一步发现:

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为三阶行列式. $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是三阶行列式 $D$ 划去元素 $a_{11}$ 所在行及所在列的元素后,余下的元素按原来的位置次序所构成的二阶行列式,称它为元素 $a_{11}$ 的余子式,记为 $M_{11}$,即 $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,类似有,$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$,$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

微视频 1-1
余子式和代数余子式

采用这样的记号后,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}.$$

我们再记 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 $A_{ij}$,并称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式,从而 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$.

从这里的演算可以看出,三阶行列式可以转化为二阶行列式来计算.

微视频 1-2
$n$ 阶行列式的定义

概念解析 1-1
行列式

概念解析 1-2
代数余子式

注 关于行列式的定义，本教材是用递推方法来定义的，此外，还有几种等价的定义，如采用逆序数方法、线性映射的方法等，有兴趣的读者可参看相关的参考书.

2. $n$ 阶行列式的定义

由前面二阶行列式、三阶行列式及其关系，我们可以利用递推的方法给出 $n$ 阶行列式的定义.

定义 1.2 由 $n^2$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 $n$ 行 $n$ 列的 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式，可简记为 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$.

当 $n=1$ 时，规定 $D_1=a_{11}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}$，其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，$M_{ij}$ 是在 $n$ 阶行列式 $D_n$ 中划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列元素，余下的元素按原来的位置次序所构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 $a_{ij}$ 的余子式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $D=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$=2\times(4-1)+(-2-4)+3\times(-1-8)=-27.$

例 2 若行列式的元素满足：当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，则称该行列式为下三角形行列式. 计算 $n$ 阶下三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 $$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2,n-2}\begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注 下三角形行列式是常见的行列式之一，解题时，可以直接利用其结论.

例 3 计算 $$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注 例 3 中行列式也是常见行列式之一，解题时，可以直接利用其结论.

解 $$D_n=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}a_{1n}(-1)^{1+(n-1)}a_{2,n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(n+1)+n+(n-1)}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{4,n-3} \\ 0 & \cdots & a_{5,n-4} & a_{5,n-3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-4} & a_{n,n-3} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(n+1)+n+\cdots+3+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1}.$$

微视频 1-3
行列式的性质（1）

## 1.2 行列式的性质

为了进一步简化 $n$ 阶行列式的计算，需要研究行列式的性质.

定义 1.3 将 $n$ 阶行列式 $D$ 的第 $i(i=1,\cdots,n)$ 行(或列)元素作为新行列式的第 $i$ 列(或行)元素，则所得的新行列式称为 $D$ 的转置行列式，记为 $D^{\mathrm{T}}$.即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad 则\ D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以下不加证明地给出行列式的性质.

性质 1.1 说明行列式的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

例 1 若行列式的元素满足：当 $i>j$ 时有 $a_{ij}=0$，则称该行列式为上三角形行列式.计算 $n$ 阶上三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 将 $n$ 阶上三角形行列式进行转置，由性质 1.1 知

$$D_n=D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

而 $D_n^{\mathrm{T}}$ 是下三角形行列式，由 1.1 节中例 2 知

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注 上三角形行列式、对角行列式亦是常用的行列式，解题时，可直接利用结论.

特别地，若当 $i\neq j$ 时有 $a_{ij}=0$，则称此行列式为 $n$ 阶对角行列式，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 1.2 互换行列式任意两行（或列）元素，行列式变号.

如当 $i\neq j$ 时，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.1 如果行列式 $D$ 中有两行（或列）元素相同，则 $D=0$.

如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0$.

性质 1.3 行列式的某一行（或列）的所有元素都乘以同一数 $k$，等于用数 $k$ 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.2 行列式中某一行(或列)元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 1.3 如果行列式 $D$ 中有一行(或列)元素全为零,则 $D=0$.

推论 1.4 如果行列式 $D$ 中有两行(或列)元素对应成比例,则 $D=0$.

微视频 1-4
行列式的性质(2)

性质 1.4 如果行列式的某一行(或列)元素都是两项的和,则可以把该行列式拆成两个行列式之和.

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.5 把行列式某一行(或列)元素都乘以同一个数 $k$ 后,加到另一行(或列)对应元素上去,则行列式值不变.

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以数 $k$ 乘行列式的第 $j$ 行再加到第 $i$ 行上,记作 $r_i+kr_j$,以数 $k$ 乘行列式的第 $j$ 列再加到第 $i$ 列上,记作 $c_i+kc_j$.

微视频 1-5
行列式的性质(3)

性质 1.6 行列式等于它的任一行(或列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$