悖论、逻辑与非 Cantor 集合论

PARADOX，LOGIC AND NON-CANTOR SET THEORY

张金成 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

悖论、逻辑与非 Cantor 集合论

PARADOX, LOGIC AND NON-CANTOR SET THEORY

张金成 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书从分析悖论的数学结构以及无穷问题入手，证明了悖论是逻辑思维领域的不封闭演算(域外项)，发现了 Cantor 集合论的一些矛盾.从而在经典逻辑的基础上，建立了新的超协调逻辑系统 $S-L$，$S-K$，与新的集合论 $S-ZF$ 系统，修正了经典集合论、递归论、证明论领域的很多错误.

本书适合大学生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

悖论、逻辑与非 Cantor 集合论/张金成著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 7153 - 5

Ⅰ.①悖… Ⅱ.①张… Ⅲ.①悖论-研究 ②数理逻辑-研究 ③Cantor 集-研究 Ⅳ.①O144.2 ②O14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 299381 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 邵长玲
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451 - 86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨圣铂印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 9.75 字数 228 千字
版　　次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 7153 - 5
定　　价 78.00 元

内容提要

这是一部反传统思维方法的数学著作.

长期以来,有一个统治数学界的"对角线证明方法",Russel 用它发现了集合论悖论;Cantor 用它证明"自然数幂集合是不可数集合""实数集合不可数";Gödel 用它证明"自然数系统 PA 是不完全的",Turing 用它证明"停机问题"是不可判定的;还有递归论里用它证明"自然数集合上存在非递归集合",等等.这些重要命题的证明使用了同一的数学方法,被誉为"一条金色的对角线".

本书证明使用"对角线方法"证明的命题都是错误的.数学演算的不封闭性是一个广泛而深刻的数学现象,它是矛盾与悖论产生的根源,"对角线证明方法"正是一个不封闭的证明方法.因此,发现逻辑思维演算的不封闭性,并以此建立了超协调逻辑系统 $S\text{-}L$,$S\text{-}K$.以超协调逻辑为基础,发现集合论、递归论、数理逻辑领域一大批错误的数学命题.可以证明:Gödel 不完全定理的证明不成立,Cantor 对角线方法证明是错误的,Turing 机停机问题的证明也是错误的.

在发现"对角线证明方法"错误的基础上,进一步发现:不存在不可数集合,"Cantor 的连续统假设"是错误无穷概念,经典集合论中的无穷概念也是错误的,等等.本书重新定义了序数、基数、无穷等概念.抛弃了经典公理集合论 ZF 系统的错误,重新建立了公理集合论 $S\text{-}ZF$ 系统,修正了超限归纳法,建立了超自然数归纳法.解释了"奇异集合 $x\in x$"的成因,把"奇异集合 $x\in x$"融入新集合论中,解释了数学悖论,使集合论中的无穷与分析中的无穷统一成一个整体.

进一步可以证明"自然数幂集合是可数集合""实数集合也是可数集合" Cantor 关于区间[0,1]上全体实数集合的对角线数,是鲁滨孙(A. Robinson)创立的"非标准分析"中的超实数.自然数的幂集是递归集合,自然数的子集都是递归集,Turing 机"停机问题"是可判定的.实数集合、自然数幂集合都是可构造集合,可以给出它的构造性定义.在自然数集合上不存在非递归的可枚举集合.进一步证明显示:自然数系统不光是可以完备的,而且皮亚诺自然数公理(Peano Axioms)系统的 7 条公理本身就是一个完备系统.

"对角线证明方法"错误,是方法的错误,这将导致一个命题群的错误.所以,"对角线证明方法"与"反证法"还会波及到具体数学领域,这将涉及哲学、数理逻辑、计算机、函数论、测度论,具体数学等众多科学领域.清理和重建这些理论,将是一场新的科学革命.

本书可供大学数学系、计算机系、哲学系的硕士、博士,以及相关专业专家、教授研究参考.

作者简介

张金成，原安徽省委党校函授学院数学、哲学教师，后离职创办民办奥数培训学校，业余从事数学研究.

主要研究方向：

悖论、数理逻辑、数学基础，出版专著一本，发表学术论文16篇.

主要学术成果：

现行经典逻辑系统、经典集合论 ZF 系统有缺陷，建立了新的超协调逻辑系统$S\text{-}K$、超协调集合论系统 $S\text{-}ZF$，并以此为基础证明了"Gödel 不完全定理，Cantor 实数不可数定理，Turing 机停机问题不可判定定理"都是错误的.

不存在不可数集合，"Cantor 的连续统假设"是错误无穷概念，经典集合论中的无穷概念都是错误的. 重新定义了序数、基数、无穷的概念，重新建立了公理集合论系统，修正了经典集合论中的无穷概念与超穷归纳法. 进一步证明了："自然数幂集合是可数集合""实数集合也是可数集合""自然数公理系统 PA 的完全性"等. 解释了数学悖论，使集合论与标准分析、非标准分析融为一体.

作者联系方式：

微信：ZJC671

E-mail：656790205@qq. com

序　言

这是一个石破天惊的理论，有人说其中任何一个结论果真成立，都将震惊世界！

这是一个我和作者自己也不敢相信的理论，它否定了一大批伟大数学家、逻辑学家的著名结论！

这是一个被某些学者骂为“白痴逻辑”的理论，因为它是那么“离经叛道”！

然而，这又是一个严密求证的理论，它的结论都是按照正常的逻辑推理得到的！

这就是读者即将了解的 S 型超协调逻辑系统！

S 型超协调逻辑是我国学者张金成自主创立的一种非标准逻辑，与国外已有的次协调逻辑、不协调逻辑和 R 型超协调逻辑相比，差别在于这些逻辑都是通过直接约束矛盾律的使用范围来包含所谓的“无害的矛盾”，而张金成的逻辑是把矛盾详细区分为逻辑矛盾和辩证矛盾两大类，在坚持排斥逻辑矛盾的同时，直接把辩证矛盾作为逻辑系统的研究对象，其数理辩证逻辑的属性更加清晰. 它是对经典逻辑系统的合理拓展，正如没有任何矛盾的数理形式逻辑(简称为数理逻辑、经典逻辑、标准逻辑)是各种协调理论的逻辑基础一样，允许辩证矛盾出现的 S 型超协调逻辑可以作为某些超协调理论的逻辑基础，所以，S 型超协调逻辑有其特殊的存在意义和应用价值.

本书包含了作者在 S 型超协调逻辑基础上取得的一系列重大研究成果，颠覆了现代数学中业已被公认的许多著名论断. 如证伪了哥德尔(Gödel)不完全定理、实数不可数定理和无穷集合的幂集是不可数集合定理、图灵机停机问题的不可判定性定理，等等，从根本上推翻了名噪一时的所谓对角线证明方法. 作者根据逻辑演算本身存在的开放性，建立了 S 型超协调逻辑. 基于 S 型超协调逻辑可方便地证明自然数集合的幂集可数、实数集可数、区间 $[0,1]$ 上全体实数集合的对角线数是鲁滨孙非标准分析中的超实数、图灵机停机问题是可判定的、在自然数集合上不存在非递归的可枚举集合、自然数系统不仅是可完备的，而且皮亚诺自然数公理系统的 7 条公理是一个完备系统，等等. 现代数学之所以会出现如此严重的问题群，是因为它忽略了在封闭论域上定义的数学演算本身具有的开放性，这是产生许多错误证明和悖论的根源，而所谓对角线证明方法正是不承认有这种演算开放性存在的错误证明方法. 一百多年来正是基于这个错误的证明方法，数学家们才先后证明了自然数幂集合是不可数集合和实数集合不可数(康托尔)、自然数系统 N 是不完全的(哥德尔)、停机问题是不可判定的(图灵)、自然数集合上存在非递归集合(递归论)等错误结论，在现代数学中成为所谓百年经典论断.

显然，作者的这些开创性研究成果只有承认在数学中同时存在“论域的封闭性假设和演算的开放性事实”这一对辩证矛盾存在的背景中去解读，才能显示其非凡的理论意义和思想光芒. 如果读者硬要把它拉回到“封闭论域中的封闭演算”假设(数学发展史早已反复证明这个假设并不符合数学发展的客观实际)中去理解，其所有的理论意义和思

想光芒必将全部湮灭，这是形式逻辑和辩证逻辑的立论基础和研究范畴不同所决定的，无法避免.

张金成是一个初露锋芒的自学成才的年轻学者，他没有显赫的教育背景和学位，没有在官方科研机构中任职的社会地位，他自主研究获得的这些开创性成果尽管难能可贵，理论意义特别重大，但也很容易被人误判为“民科”之流的低劣之作打入“冷宫”而无人理睬. 基于这些原因，我愿意具名向读者慎重地推荐本书，并希望大家在阅读中重点关注以下几点：

(1)科学的可持续发展需要超协调逻辑. 1962 年，美国科学哲学家库恩(T. S. Kuhn)出版了科学哲学历史学派的奠基著作《科学革命的结构》，他既反对把科学的发展单纯看成是逻辑演绎的线性积累过程，也不赞成把科学的发展单纯看成是新理论不断推翻老理论的重来过程. 他提出了科学发展的动态结构理论，首创了这个理论的核心概念——范式. 库恩认为科学的发展过程是由受范式制约的常规科学时期和突破老范式探索新范式的反常科学时期(包括反常真命题的发现、理论危机和科学革命)交替进行的辩证发展过程. 常规科学的范式遵循公理化基础上的形式演绎模式，是一个线性积累过程. 反常科学是一个突破老范式探索，建立新范式的跨越式发展过程，它无法在老公理系统中通过形式演绎来完成.

(2)数学是一种源于现实世界并为现实世界服务的学科，而不是可以任意塑造专供学者把玩的玄学，它必然满足科学的正、反常发展模式交替变化的一般规律. 历史上出现的数学形成时期、常量数学时期、变量数学时期及以公理集合论为基础理论的现代数学时期，都是数学具有常规发展模式的铁证. 而引起这四个不同时期发生质的跨越的三次理论危机，则证明数学同样具有反常发展模式，在这个时期发现了异常的数学对象和规律，不能用当前的范式进行解释，也不能通过形式演绎发现解释它们的新范式. 目前存在的对角线证明方法问题群，就标志着当前的数学已经进入一个新的反常发展时期. 可见，如果仅仅依靠公理化基础上的形式演绎模式，数学将永远停留在某一个已有范式之下，从而失去可持续发展的能力. 而在信息时代，智能机已具有了自动演绎出隐含在知识库(公理系统)中的各种潜在知识的能力，数学家有条件把主要精力集中于处理反常问题，发现新的处理范式(公理系统)上，没有必要成天陷入机械地形式演绎之中. 本书为我们提供了研究和描述数学反常发展时期逻辑规律的一般原理和方法，是对统治数学两千年的公理化基础上的形式演绎模式的重要补充，意义十分重大. 有人无法接受这一重大研究成果，欲彻底排斥而后快，其根源是他们习惯于把整个数学的发展过程看成是一系列常规发展时期(即一系列范式)的线性叠加，根本忽略了在两个不同的常规发展时期之间事实上存在的反常发展时期(即新老范式之间的跨越)，这是与数学发展史实严重不符的片面数学发展观和数学方法论.

(3)科学思维需要综合运用形式逻辑和辩证逻辑. 科学理论的内部组织离不开标准逻辑，于是有人认为标准逻辑是科学思维的准绳. 这个论断没错，但不够全面. 因为科学知识的发现、积累、归纳和综合首先需要在辩证逻辑的规范下进行，直到人们对一个确定领域的认识足够丰富之后，才有可能通过某些学者由浅入深，由表及里地进行深加工，根据这个确定领域的基本属性抽象出一个公理系统，假设它们都是不证自明的真命

题,并要求在这个公理系统的基础上单纯运用形式逻辑就能够演绎出这个领域内的全部(包括已知的和逻辑上已隐含在公理系统之中的)真命题来,形成一个线性的认知链条.这时一个发展成熟的科学理论体系已经变成了一个用公理系统和形式逻辑构筑起来的认识论,它把这个确定领域的内外环境双向隔离开来,不再需要辩证逻辑的参与.但随着被观察的领域的转移或扩大,领域的基本属性必然改变,原来反映老领域基本属性的公理系统和认知链条必然失效,其中的各种真命题在新领域中不一定继续为真,所以上述认识过程又会重新再来一遍,在前面劈山开路的仍然是辩证逻辑.由此可见,一个完整的科学思维全过程需要形式逻辑和辩证逻辑的共同参与,各司其职,反复不断地交替登台表演,缺一不可.

(4)一个新提出的理论,一下子否定了一大批著名的数学论断,这是一个十分严重的事态变化.我不是职业数学家,数学鉴赏力有限,之所以敢大胆地向读者推荐这个理论,有一个重要的原因是作者通过他的理论已经完美地解释了数学中业已发生过的大大小小的理论危机(如在正整数之内通过开放的演算发现0、负数和分数时的处理全过程,在有理数之内通过开放的演算发现无理数时的处理全过程,在实数之内通过开放的演算发现虚数时的处理全过程,等等)的成因和解决结果,与历史事实完全相符,这些已客观地证明了这个理论的有效性.根据我多年从事计算机科学、人工智能和泛逻辑学研究的经验,根据他的理论和我的统一无穷理论的高度契合,我有充分的理由相信作者对现有的对角线证明方法问题群的评估和解决结果的预测是正确的,尽管这些评估和预测看起来是那样的匪夷所思和难以置信——难道这么多的数学名人都集体犯了同样一种错误?难道一个自学成才的年轻人竟然有能力破解其中的玄机?我相信未来的数学史将回答这两个尖锐的问题,因为过去的数学史并不乏类似的实例.我相信,任何一个具有深刻意义的创新理论的提出和完善,不是一个人、一段时期可以完成的,它需要众多科学家的共同参与和检验,并假以足够的时日持续地投入,才有可能逐步走向成熟.我有充分的耐心等待这一天的到来!

我不能向读者保证本书的每一个定义都已十分精准,每一个证明都已无懈可击,书中的一切技术细节都是可以质疑和讨论的.但是,我能够负责地向读者肯定:本书研究的方向和路线完全正确,它揭示出的许多规律符合客观实际和信息时代新的人机分工的需要,对人们全面深入地认识数学和逻辑的本质及其演化发展规律有重要价值.作者的研究工作处在起步阶段,他的理论尚需不断地丰富和完善,我的推荐意见也不一定准确全面,个别疏漏在所难免,欢迎大家批评指正.

西北工业大学教授
何华灿
2015 年 4 月

目　　录

上篇　悖论与经典逻辑重建

上　篇

悖论与经典逻辑重建

第1章　正集与反集

自从罗素悖论在数学中出现，围绕着悖论问题，一个多世纪以来，出现了众多的解决方案. 然而，这些解决方案，并不能令人完全满意，悖论的数学本质并没有解释清楚，矛盾仍然没有解决.

一个通俗的例子是：设在整数集中，全集 $J=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，$f(x)=1-x$，构造自指代方程 $x=1-x$；

设 $F(x)$ 表示命题"x 是偶数"，则 $\neg F(x)$ 表示命题"x 是奇数".

如果 $F(n)$："n 是偶数"⇒"$1-n$ 是奇数"⇒$n=1-n$，"n 是奇数"⇒$\neg F(n)$；

如果 $\neg F(n)$："n 是奇数"⇒"$1-n$ 是偶数"⇒$n=1-n$，"n 是偶数"⇒$F(n)$；

所以 $F(n)\leftrightarrow\neg F(n)$.

我们已经知道：$n=1-n$，$n=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\notin J$，$\frac{1}{2}$ 是整数集合上的一个不封闭项(域外项).

以上例子具有以下特征：

(1) 在这个例子中，矛盾等价关系

$$F(n)\leftrightarrow\neg F(n)$$

即

"n 是偶数"↔"n 不是偶数"

$\frac{1}{2}$ 根本就不再是整数，这是一个悖论，这个矛盾是演算的不封闭引起的.

本书要告诉你：所有的悖论都是逻辑演算中一个不封闭项.

(2) 在这个例子中，"n 是偶数""n 不是偶数"，即 $F(n)$，$\neg F(n)$ 都是不可判定命题，这个不可判定命题是正常的，$\frac{1}{2}$ 根本就不再是整数，是一个域外项；

本书要告诉你：系统 PA(自然数公理系统，下同)中的"Gödel 不可判定命题"，和以上"$F(\frac{1}{2})$ 在整数集中的不可判定性"是相同的道理，是一个域外不可判定命题，域外不可判定命题与系统的完全性无关，这意味着 Gödel 不完全定理的证明是错误的.

(3) 在这个例子中，以上推理关系中

$$\vdash F(n)\leftrightarrow\neg F(n)$$

以上反证法推理关系，可以轻松地看出，导致矛盾的是域外项，$n=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\notin J$.

本书要告诉你：Cantor 用对角线方法证明"实数不可数""自然数幂集合不可数".和这类似地，是一个错误的证明方法，对角线数是域外项.

以下我们在分析实数集不动点的基础上，可以证明：悖论、不可判定命题、对角线证明方法可以统一转化成逻辑思维领域中的不封闭项.

1.1　自指代与不动点

定义 1.1.1　自指代方程

一般地，函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，如果用 x 取代 y，得函数方程 $x=f(x)$，则我们把 $x=f(x)$ 叫作 $y=f(x)$ 的自指代方程.

定义 1.1.2　不动点

如果 U 是一个集合，$f:U\to U$ 是一个连续映射，且存在 $x\in U$，使得 $f(x)=x$，就称 x 是不动点.

例 1.1.1　函数自指代

函数 $f(x)=1-\frac{1}{3}x$，它的自指代方程是：$x=1-\frac{1}{3}x$，自指代方程，经过自身迭代，无数次进行，可以形成具有自相似结构的如下无穷级数

$$x=1-\frac{1}{3}x$$

$$x=1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}x\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}x$$

$$x=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}(1-\frac{1}{3}x)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}x$$

$$x=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^5}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^n}+\cdots$$

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{3^i}=\frac{3}{4}$$

函数 $f(x)=1-\frac{1}{3}x$ 的不动点是方程 $x=1-\frac{1}{3}x$ 的解，即$\frac{3}{4}$，从图 1.1.1 上看是直线 $y=1-\frac{1}{3}x$ 与 $y=x$ 的交点.

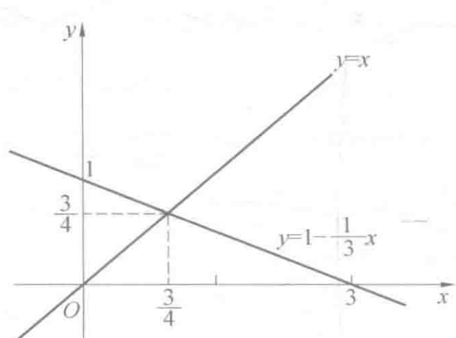

图 1.1.1　函数的不动点

关于函数不动点有以下 Brouwer 不动点定理.

注记 1.1.1　Brouwer 不动点定理

设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续映射，则必存在 $x_0\in[0,1]$，使 $f(x_0)=x_0$.

以上是 $\mathbf{R}^1$ 中，即 1 维的 Brouwer 不动点定理，不动点定理可以推广到 2 维以及 n 维欧氏空间中(即平面上的单位闭圆盘 B^2 具有不动点性质，即任一连续映射 $f:B^2\to B^2$ 具有不动点).

不动点的性质已经不仅仅局限于代数、函数领域，它已经延伸到集合论、离散数学、计算机、经济等其他各个领域.

1.2　二分集合与双射关系

从以上分析，我们可以看出，实数可以分成两个性质相反的集，满足性质 P 与不满足性质 P 的集合.

定义 1.2.1　二项划分

设 P 是 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots\}$ 上的一个性质，如果性质 P 把集合 U 划分成两个集合，满足

$$+\alpha=\{x\mid P(x)\wedge x\in U\}$$
$$-\alpha=\{x\mid \neg P(x)\wedge x\in U\}$$
$$U=+\alpha\cup-\alpha$$

则 $+\alpha$，$-\alpha$ 叫作集合 U 二项划分.

例 1.2.1　整数集的二项划分

设 $U=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，即全体整数集合.

设 $P(x)$：x 是偶数，则 $P(x)$ 对 U 是一个二项划分，即

$$+\alpha=\{x\mid x=2n,n\in J\}$$
$$-\alpha=\{x\mid x=1-2n,n\in J\}$$
$$U=+\alpha\cup-\alpha$$

我们知道，设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射，若 $y=f(x)$，$x\in A\to y\in B$，即 B 中任一元素 y 都是 A 中某元素 x 的象，则称 f 为 A 到 B 上的满射；若对 A 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，他们的象 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 A 到 B 的单射.

定义 1.2.2　双射关系

若映射 f 既是单射，又是满射，则称映射 f 为 A 到 B 的“双射”(或“一一映射”)关系.

函数 $f(x):A\to B$ 为双射，当且仅当对任意 $y\in B$ 存在唯一 $x\in A$，满足 $y=f(x)$；映射 f 为 A 到 B 的“双射关系”，我们记为 $f:A\sim B$.

例 1.2.2　整数集合上的双射关系

在上例中 $U=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，即全体整数集合的一个二项划分，即

$+\alpha=\{x\mid x=2n,n\in J\}$ 是偶数集合；

$-\alpha=\{x\mid x=1-2n,n\in J\}$ 是奇数集合；

$f(x)=1-x$，$x\in+\alpha\leftrightarrow f(x)\in-\alpha$；

$f(x)=1-x$ 是二分集合 $+\alpha$，$-\alpha$ 上的双射关系，即 $f:+\alpha\sim-\alpha$.

1.3 正集、反集、不动项

定义 1.3.1 正集、反集

设性质 P 是对集合 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots\}$ 的一个二项划分，满足

$$+\alpha=\{x \mid P(x) \wedge x\in U\}$$
$$-\alpha=\{x \mid \neg P(x) \wedge x\in U\}$$
$$U=+\alpha \cup -\alpha$$

(1) 满足性质 P 的元素 x 组成的集合，叫作正集，即命题 $P(x)$ 成立，记为

$$+\alpha \doteq \{x \mid P(x) \wedge x\in U\}$$

正集中的元素叫正项；

(2) 不满足性质 P 的元素 x 组成的集合，叫作反集，即命题 $\neg P(x)$ 成立，记为

$$-\alpha=\{x \mid \neg P(x) \wedge x\in U\}$$

反集中的元素叫反项.

例 1.3.1 整数上的正、反集

设 $U=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，即全体整数集合，设 $P(x)$：x 是偶数，则 $P(x)$ 对 U 是一个二项划分.

正集：偶数集合，即 $+\alpha=\{x \mid x=2n,n\in J\}$；

反集：奇数集合，即 $-\alpha=\{x \mid x=1-2n,n\in J\}$；

例 1.3.2 有理数上的正、反集

设 $U=\mathbf{Q}^+$ 为全体正有理数集合，给定一个划分 $P(x)$：$x^2>2$.

正集：平方大于 2 的有理数集合，即 $+\alpha=\{x \mid x^2>2,x\in \mathbf{Q}^+\}$；

反集：平方小于 2 的有理数集合，即 $-\alpha=\{x \mid x^2<2,x\in \mathbf{Q}^+\}$.

例 1.3.3 实数上的正、反集

设 $U=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，不为 0 的全体实数集合，给定一个划分 $P(x)$：$x>0$.

正集：大于 0 的实数集合，即 $+\alpha=\{x \mid x>0,x\in U\}=(0,+\infty)$；

反集：小于 0 的实数集合，即 $-\alpha=\{x \mid x<0,x\in U\}=(-\infty,0)$.

例 1.3.4 二分集合上的双射关系

在上例中 $U=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，即全体整数集合的一个二项划分，即：

$+\alpha=\{x \mid x=2n,n\in J\}$ 是偶数集合；

$-\alpha=\{x \mid x=2n+1,x\in J\}$ 是奇数集合；

$f(x)=1-x,x\in+\alpha \leftrightarrow f(x)\in-\alpha$；

$f(x)=1-x$ 是二分集合 $+\alpha$，$-\alpha$ 上的双射关系，即 f：$+\alpha\sim-\alpha$.

自指代方程上的不动点的定义可以推广如下：

定义 1.3.2 正、反对称集合与不动项

设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots\}$ 为一个集合，如果 U 被性质 P 二项划分为 $+\alpha$，$-\alpha$.

(1) 存在映射 f，是二分集合 $+\alpha$，$-\alpha$ 上的双射关系，即 f：$+\alpha\sim-\alpha$，x 满足性质 P，$f(x)$ 满足性质 $\neg P$，那么，$+\alpha$，$-\alpha$ 叫作正、反对称集合；