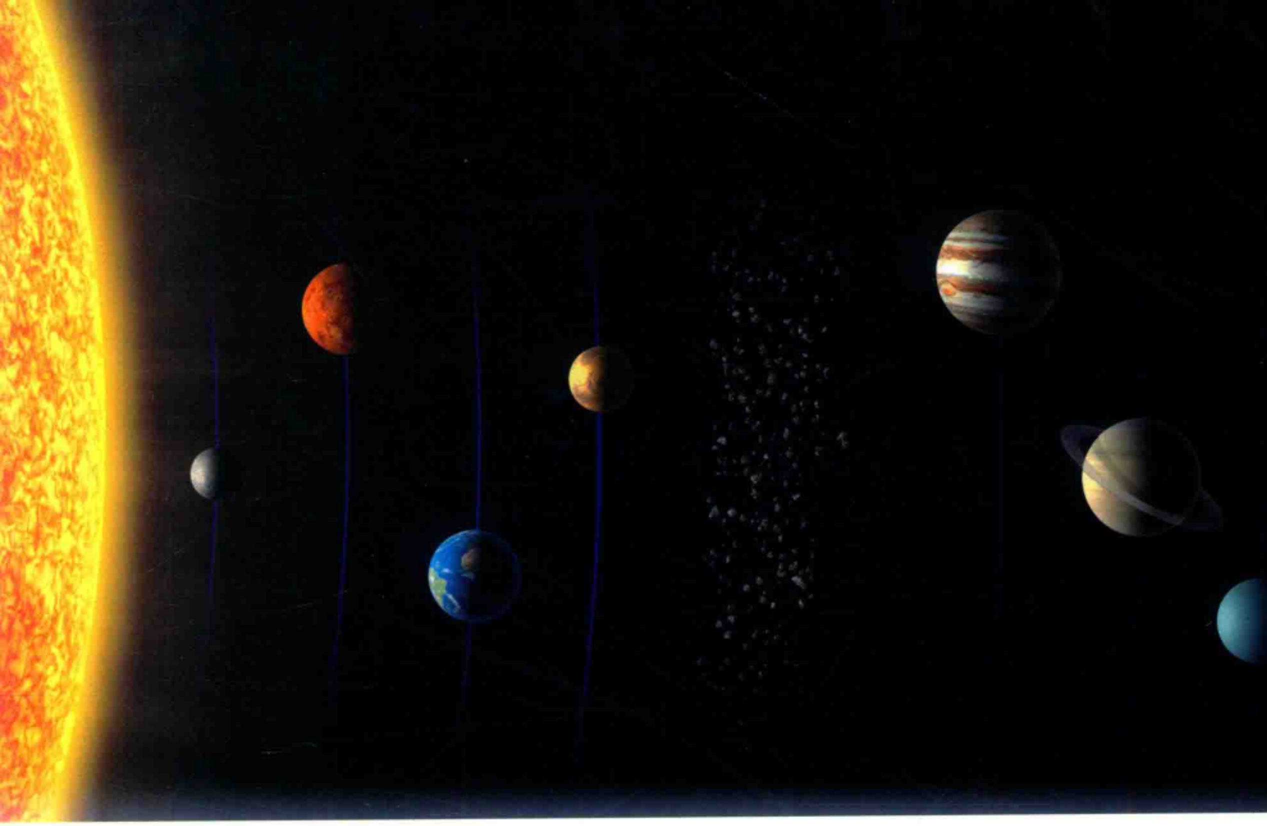

大学物理

DAXUE WULI

主编　梁麦林　李凤敏

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大 学 物 理

主编　梁麦林　李凤敏
编者　（按音序排列）
邓晓冉　冯列峰　郭建军　金　朝
李卫青　姚东升　张慧娟

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是大学物理基础教材，是参照教育部物理基础课程教学指导分委员会编制的《理工科类大学物理教学基本要求》编写的，指导思想是概念清楚准确、叙述简练、易教易学。书中对传统教材的内容进行了必要的调整和整合。

本书共14章，包括质点力学、刚体力学、气体动理论、热力学基础、真空中的静电场、静电场中的导体和电介质、恒定磁场、电磁感应、麦克斯韦方程组、振动、波动、波动光学、狭义相对论基础、量子力学基础。

本书可作为高等学校非物理专业的大学物理教材，也可供其他读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理 / 梁麦林，李凤敏主编. —天津：天津大学出版社，2018.2

ISBN 978-7-5618-6083-0

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①梁… ②李… Ⅲ. ①物理学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第025863号

出版发行	天津大学出版社
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647
网　　址	publish. tju. edu. cn
印　　刷	廊坊市海涛印刷有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185mm×260mm
印　　张	25.5
字　　数	638千
版　　次	2018年2月第1版
印　　次	2018年2月第1次
定　　价	58.00元

前　言

“天地有大美而不言,四时有明法而不议,万物有成理而不说。”自然界中有各种各样的物质存在,它们都有各自的结构,物质之间还有不同形式的相互作用,结构和相互作用决定了变化万千的自然现象,美丽而神秘。物理学(physics)就是研究自然界的物质结构、物体间的相互作用和物体运动规律的自然科学。它与人类社会的发展、现代物质文明的建立有着极其密切的关系。很多新兴学科和技术的诞生都是以物理学的发展为基础的。原子能的研究和应用,激光技术的出现,半导体材料的发现,电子计算机的飞速发展都与20世纪物理学中的两个伟大发现——相对论和量子理论的建立有着极其紧密的联系。物理学取得的成果极大地丰富了人们对物质世界的认识,有力地促进了人类文明的进步。

物理学的研究范围极广,小到微观粒子,大到整个宇宙。按照学科划分为力学、热学、电磁学、光学、相对论以及量子物理等。本书的编写任务分工如下:李卫青,第1章质点力学;邓晓冉,第2章刚体力学和第8章电磁感应;郭建军,第3章和第4章热学部分;冯列峰,第5章和第6章静电场部分;姚东升,第7章恒定磁场;梁麦林,第9章麦克斯韦方程组和第14章量子力学基础;金朝,第10章振动和第11章波动;张慧娟,第12章波动光学;李凤敏,各章习题和第13章狭义相对论基础。

本书由天津大学(冯列峰、金朝、李卫青、姚东升、张慧娟、梁麦林)和天津职业技术师范大学(邓晓冉、郭建军、李凤敏)合作共同编写。欢迎广大师生就本书中可能存在的各种问题提出意见和建议。

编者

2018年1月

○ 目 录

第1章　质点力学

世界上的万物都在不停地运动,不存在任何绝对静止的物体。例如我们面前的树木和房屋,它们看起来相对于地面是静止的,但是它们随着地球的自转在绕地轴转动,同时它们随着地球在绕太阳公转,太阳又带着包括地球在内的太阳系在银河系中运动,银河系作为宇宙的一部分也在不停地运动。小到组成物质的原子以及原子内部的粒子,大到整个宇宙中的星体都在不停地运动。运动是物质的基本存在形式,是物质的固有属性。物质的运动是绝对的,静止是相对的。

我们知道,任何物体都具有一定的大小和形状。当物体作机械运动的时候,物体上每个点的运动状态也不尽相同。但在某些情况下,根据物体运动的状况及性质,物体的大小和形状对讨论它的运动状态无关紧要,我们就可以把运动的物体抽象成一个只有质量的点,而在研究物体运动状态的过程中忽略运动物体的大小和形状。人们把这样抽象出来的有质量的点叫作质点。那研究什么样的物体运动时可以把物体抽象成质点呢?大致分为三种情况。①当刚性物体作平动时,运动物体上每一个点的运动状态都时刻保持完全相同,这时就可以忽略运动物体的形状和大小,把物体看成质点对待。如平动的汽车、飞机等,在研究它们的运动状态时,就可以抽象成质点而忽略其形状和大小。②当研究物体的运动路程远大于物体本身的大小时,就可以把物体抽象成质点。如研究从北京到广州的火车的运动状态时,由于北京和广州的距离远远大于火车的长度,这时就可以把火车抽象成质点而忽略其本身的长度。③当研究的运动物体之间的距离远远大于物体本身的大小时,也可以把物体抽象成质点来研究。如研究地球绕太阳转动时,由于地球直径(约为 1.27×10^{7} m)比地球与太阳之间的距离(约为 1.50×10^{11} m)小得多,地球上各点的运动相对于太阳来讲可视为相同,此时可以忽略地球的形状和大小,把地球看作质点(但当研究地球绕自身轴转动时则不能忽略)。

为了便于研究物体的运动规律,人们忽略了次要因素,把运动物体从纷繁复杂的运动表象中抽象成了质点,这个抽象质点的运动规律就反映了物体的运动规律,因此,质点只是运动物体的一种理想模型。在复杂的表象中,能抓住所研究问题的关键所在,忽略一些次要因素,抽象出简单的理想模型来代替复杂的事物,由此反映问题本质的规律性,这是物理学中研究问题常用的一种科学方法。如后面要学的刚体、理想气体分子、点电荷、静电场等都是根据研究问题的关键而从复杂的现实中抽象出的理想模型,建议读者在今后的学习和工作中认真体会和掌握。

人们看到飞机在飞行、汽车在前进,也看到车轮在转动、各种星体在转动,还看到天

上的飞机在作花样表演、地上的蜗牛在缓慢爬行，可见物体的运动形式是多种多样的，是复杂的。运动一般可分为平动、转动和振动，本章只研究质点平动问题。对于质点平动问题的讨论又分为两个方面：单纯描述质点在空间的运动情况称为质点运动学，而讨论运动状态改变的原因即说明运动的因果关系称为质点动力学。

1.1 参考系与坐标系

1.1.1 参考系

物体的机械运动是指运动物体的位置随时间的变化。如前所述，物体的运动是绝对的，但物体相对于不同物体系的位置及位置改变却是相对的，因此运动具有相对性，我们要确定一个物体的位置总是要相对于其他物体或者物体系来确定。这个**被选作参照的确定运动物体位置的物体或者物体系称为参考系（或参照系）**。例如：坐在运动着的火车上的乘客看同车厢的乘客是“静止”的，看车外地面上的人或物却向后运动；反过来，在车外路面上的人看车内乘客随车前进，而路边一同站着的人却静止不动；这是因为车内乘客是以“车厢”为参照来确定车内乘客的静止和车外人及物的运动状态的，而地面上的人是以地面为参照来确定车内乘客的静止和地面上人及物的运动状态的。可见，当选取不同的参照物对同一物体的运动状态进行描述时，所得结论完全不同。因此，物体的运动是绝对的，但对物体运动状态的描述却具有相对性。

在运动学中，参考系的选择具有人为的任意性，但具体如何选择，要根据研究问题的性质及解决问题的方便来确定。通常，习惯选择以地面作为参考系。在描述具体物体的运动时，必须明确说明运动是相对于哪一个参考系而言的。

1.1.2 坐标系

在选定参考系后，为了定量地描述物体的位置随时间的变化，还必须在参考系上建立合适的坐标系。如何选择合适的坐标系？原则上以求解问题的简捷方便为标准，在研究地面上物体的运动时，通常选用**直角坐标系**(x,y,z)、**球坐标系**(r,θ,φ)及**柱坐标系**(r,θ,z)，研究曲线运动时通常选用**自然坐标系**。

1.2 位置矢量、位移

1.2.1 位置矢量

如图 1.2.1 所示，直角坐标系的原点 O 选在参考系上，t 时刻运动质点在空间的位置用 P 表示，从 O 点向 P 点引一条有向线段，用矢量 $\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}$来定量表示质点 t 时刻所在

的空间位置，称为 t 时刻质点的**位置矢量**，简称**位矢**。位置矢量是用来定量描述运动质点在某一时刻所在空间位置的物理量。质点在运动过程中，每一时刻均有一对应的位置矢量（或一组对应的位置坐标 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$），换言之，质点的位矢是时间的函数（因此很多教材称位矢与时间关系的表达式为质点的运动方程，本书称之为位置矢量，不再定义新的名称），即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.2.1}$$

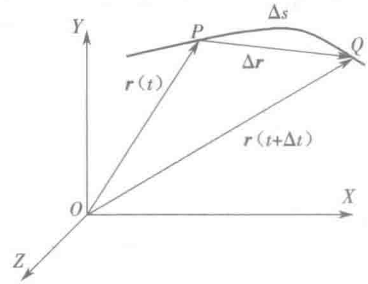

图 1.2.1　质点位置的表示及位移

其投影式为

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\\ z&=z(t)\end{aligned}\right\} \tag{1.2.2}$$

位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 X,Y,Z 轴上的投影（或位置坐标）分别为 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$。于是，位矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 在直角坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.2.3}$$

式中，$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 分别为 X,Y,Z 轴上的单位矢量（大小为 1，方向沿各轴正向的矢量）。显然，t 时刻位置矢量的大小为

$$r(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2}$$

其方向由它的坐标轴的三个方向余弦来确定。位矢的单位为米（m）。如果消去式（1.2.2）中的参变量 t，则得质点运动的轨迹方程。

1.2.2　位移

如图 1.2.1 所示，质点作曲线运动，t 时刻质点运动到 P 处，位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$，经过时间 Δt，在 $t+\Delta t$ 时刻质点运动到 Q 处，此时位矢为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$。可见，在时间 Δt 内，质点位置的变化

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1.2.4}$$

它是从 P 点向 Q 点所引的有向线段，叫作质点在 Δt 时间内的**位移**，用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示。**位移**是表示质点在 Δt 时间内位置变化的物理量。由 P 点到 Q 点质点经历过的曲线长度 Δs，叫

作质点在 Δt 时间内的路程。必须指出,位移和路程是两个截然不同的物理量,位移是矢量,是描述质点在一段时间内位置变化的物理量,位移的大小为有向线段 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的长度,其方向由运动质点的始位置指向末位置;而路程是描述质点所经历的实际路径的物理量,为标量,是指该段时间内质点所经历的实际路径的长度,以 Δs 表示(如图 1.2.1 中的弧长)。位移和路程除了矢量、标量不同外,总有 $\Delta s \geqslant |\Delta \boldsymbol{r}|$,而且只有质点在作单向直线运动时才有 $\Delta s = |\Delta \boldsymbol{r}|$;但是在 $\Delta t \to 0$ 的极限情况下,$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$。另外,还要注意 Δr 与 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 的区别,一般以 Δr 表示 $|\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1|$,因此总有 $|\Delta \boldsymbol{r}| \geqslant \Delta r$,只有在 $\boldsymbol{r}_2$ 与 $\boldsymbol{r}_1$ 方向相同的情况下 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr 才相等。

1.3 速度、加速度

1.3.1 速度

在 PQ 这段曲线上,质点在各点的运动方向和快慢各不相同。将用质点的位移与完成该位移所需时间的比值称为质点在该段时间内的**平均速度**,用 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示。平均速度是粗略地描述质点在 Δt 时间内位置变化快慢和运动方向的物理量,即

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{1.3.1}$$

平均速度是矢量,其方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向相同。注意平均速度的大小不叫平均速率。

质点所经历的路程与完成这段路程所需时间之比称为质点在该段时间内的平均速率,以 $\bar{v}$ 表示

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.3.2}$$

平均速率是标量。

在一般情况下,平均速度的大小并不等于平均速率。平均速度只能粗略描述一段时间内(或者一段位移上)质点位置的变化情况,而不能精确描述质点在某一时刻(或某一位置)的瞬时运动的快慢和方向,然而,平均速度的极限值却能精确地反映质点在某一时刻(或某一位置)的运动快慢及方向。这一极限值称为质点在该时刻的**瞬时速度**,简称**速度**,以 $\boldsymbol{v}$ 表示,即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.3.3}$$

速度是矢量,其方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限方向一致,即为运动轨迹上该点的切线方向。速度是位置矢量对时间的变化率,单位是米/秒(m/s)。

当 $\Delta t \to 0$ 时,平均速率的极限值称为**瞬时速率**(简称**速率**),即

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.3.4}$$

速率描述质点在该时刻运动的快慢，是路程对时间的变化率。由于 $\Delta t \to 0$ 时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$，所以速度的大小就是速率，故

$$|\boldsymbol{v}| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.3.5}$$

在直角坐标系中，速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1.3.6}$$

速度沿三个坐标轴的速度分量

$$\left.\begin{aligned} v_X &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_Y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_Z &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.7}$$

速度的大小

$$v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2} \tag{1.3.8}$$

位矢和速度是描述质点运动状态的物理量。在物体宏观低速运动的世界里，在某一时刻，运动物体具有唯一的位矢和速度，即具有唯一的运动状态，所以宏观运动的物体都具有一定的运动轨道。

1.3.2 加速度

质点在运动过程中，不仅位置时刻在变，质点运动的快慢和方向都随时间而变化，即运动质点的速度也在变化。加速度就是描述质点的运动速度如何随时间变化的物理量。

如图 1.3.1 所示，质点在时刻 t 位于 P 点，速度是 $\boldsymbol{v}(t)$，$t+\Delta t$ 时刻运动到 Q 点，速度是 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$，在 Δt 时间内速度的增量

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t) \tag{1.3.9}$$

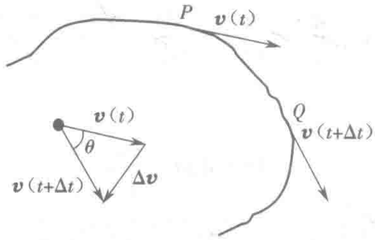

图 1.3.1 质点的速度与速度增量

$\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$称为 Δt 时间内质点的平均加速度，用来粗略地描述质点在 Δt 时间内速度的变化，用 $\bar{\boldsymbol{a}}$

表示,即

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\bar{\boldsymbol{v}}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \tag{1.3.10}$$

为了精确描述任一时刻速度的瞬时变化情况,当 $\Delta t\to 0$ 时,平均加速度的极限值称为**瞬时加速度**(简称**加速度**),用 $\boldsymbol{a}$ 表示,即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{\boldsymbol{v}}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.3.11}$$

由式(1.3.11)可知,质点的加速度等于速度对时间的一阶导数,或等于位置矢量对时间的二阶导数。换句话说,可以通过对速度或位矢求导来计算加速度。加速度也是矢量,由于它是速度对时间的变化率,所以不管是速度的大小发生变化,还是速度的方向发生变化,都有加速度存在。

在直角坐标系中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_X}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_Y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_Z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=a_X\boldsymbol{i}+a_Y\boldsymbol{j}+a_Z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

在自然坐标系中,运动质点的速度(图 1.3.2)

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} \tag{1.3.13}$$

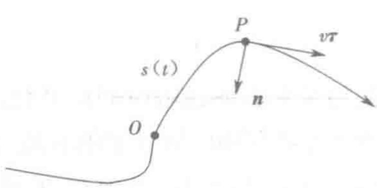

图 1.3.2 自然坐标系中质点的速度

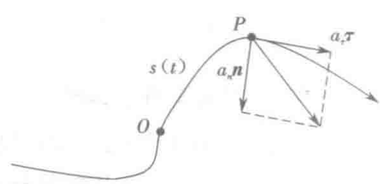

图 1.3.3 自然坐标系中质点的加速度

根据加速度的定义,运动质点在自然坐标系中的加速度(图 1.3.3)

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1.3.14}$$

这里

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\mathrm{d}\theta\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}s}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1.3.15}$$

式(1.3.14)中右方第一项描述质点运动快慢的改变,大小为质点在某一位置(某一时刻)速率的变化率,方向沿运动曲线的切线方向,称为**切向加速度**,用 $\boldsymbol{a}_\tau$ 表示,

$$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau} \tag{1.3.16}$$

式(1.3.14)中右方第二项描述质点速度方向的改变,方向沿法向,称为**法向加速度**,

用 $\boldsymbol{a}_n$ 表示，

$$\boldsymbol{a}_n = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1.3.17}$$

所以，在自然坐标系中，质点的加速度的表达式为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} = a_\tau\boldsymbol{\tau} + a_n\boldsymbol{n} \tag{1.3.18}$$

加速度的大小及方向与切线方向的夹角为

$$\left.\begin{aligned} &\text{大小}: a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \\ &\text{方向}: \alpha = \arctan\frac{a_n}{a_\tau} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.19}$$

例 1.3.1　已知质点的位置矢量 $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (2 - t^2)\boldsymbol{j}$，式中 r 的单位为 m，时间 t 的单位为 s。求：(1) 质点的运动轨迹；(2) $t = 0$ 及 $t = 2$ s 时，质点的位矢；(3) 在 $t = 0$ 到 $t = 2$ s 内质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和径向增量 $\Delta|\boldsymbol{r}|$；* (4) 2 s 内质点所走过的路程 s。

分析　质点的轨迹方程为 $y = f(x)$，运动方程的两个分量式 $x(t)$ 和 $y(t)$ 消去 t 即可得到。对于 r、$\Delta\boldsymbol{r}$、$\Delta|\boldsymbol{r}|$、Δs 来说，物理含义不同，可根据其定义计算。其中对 s 的求解用到积分方法，先在轨迹上任取一段微元 $\mathrm{d}s$，则 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$，最后用 $s = \int \mathrm{d}s$ 积分求 s。

解　(1) $x(t)$ 和 $y(t)$ 消去 t 后得质点轨迹方程为

$$y = 2 - \frac{1}{4}x^2$$

这是一个抛物线方程，轨迹如图 1.3.4(a) 所示。

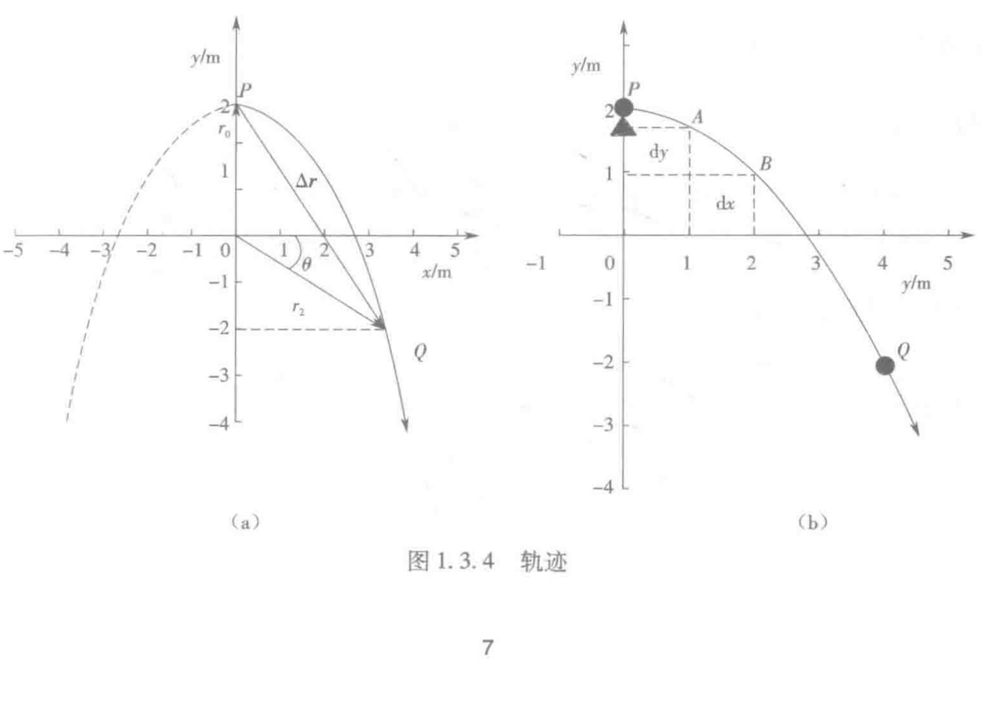

图 1.3.4　轨迹

(2)将 $t=0$ 和 $t=2$ s 分别代入运动方程,可得相应位矢

$$\boldsymbol{r}_0=2\boldsymbol{j}\ ,\ \boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$$

图 1.3.4(a)中的 P、Q 两点,即为 $t=0$ 和 $t=2$ s 时质点所在位置。

(3)由位移表达式,得

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0=(x_2-x_0)\boldsymbol{i}+(y_2-y_0)\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$$

其中位移大小 $$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=5.66\ \mathrm{m}$$

而径向增量 $$\Delta|\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_0|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}=2.47\ \mathrm{m}$$

*(4)如图 1.3.4(b)所示,所求 Δs 即为图中 PQ 段长度,先在其间任意处取 AB 微元 $\mathrm{d}s$,则 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$,由轨道方程可得 $\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2}x\mathrm{d}x$,代入 $\mathrm{d}s$,则 2 s 内路程

$$s=\int_P^Q\mathrm{d}s=\int_0^4\sqrt{4+x^2\mathrm{d}x}=5.91\ \mathrm{m}$$

例 1.3.2 一气球以速率 v_0 从地面上升,由于风的影响,随着高度的上升,气球的水平速度按 $v_X=by$ 增大,其中 b 是正的常量,Y 轴是从地面算起的高度,X 轴取水平向右的方向。

(1)计算气球的位置矢量;

(2)求气球水平飘移的距离与高度的关系;

(3)求气球沿轨道运动的切向加速度和轨道的曲率与高度的关系。

解 (1) 取平面直角坐标系 OXY,令 $t=0$ 时气球位于坐标原点(地面),则

$$y=v_0t$$

而 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=by=bv_0t\quad 或\quad \mathrm{d}x=bv_0t\mathrm{d}t$$

对上式两边取定积分得 $$x=\frac{bv_0t^2}{2}$$

气球的位置矢量 $$\boldsymbol{r}=\frac{bv_0t^2}{2}\boldsymbol{i}+v_0t\boldsymbol{j}$$

(2)从 x 和 y 坐标中消去 t 得到轨道方程

$$x=\frac{b}{2v_0}y^2$$

(3)气球的运动速率

$$v=\sqrt{v_X^2+v_Y^2}=\sqrt{b^2v_0^2t^2+v_0^2}=\sqrt{b^2y^2+v_0^2}$$

所以气球的切向加速度

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{b^2v_0y}{\sqrt{b^2y^2+v_0^2}}$$

而由 $$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}\ 和\ a^2=a_X^2+a_Y^2=\left(\frac{\mathrm{d}v_X}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_Y}{\mathrm{d}t}\right)^2=b^2v_0^2$$