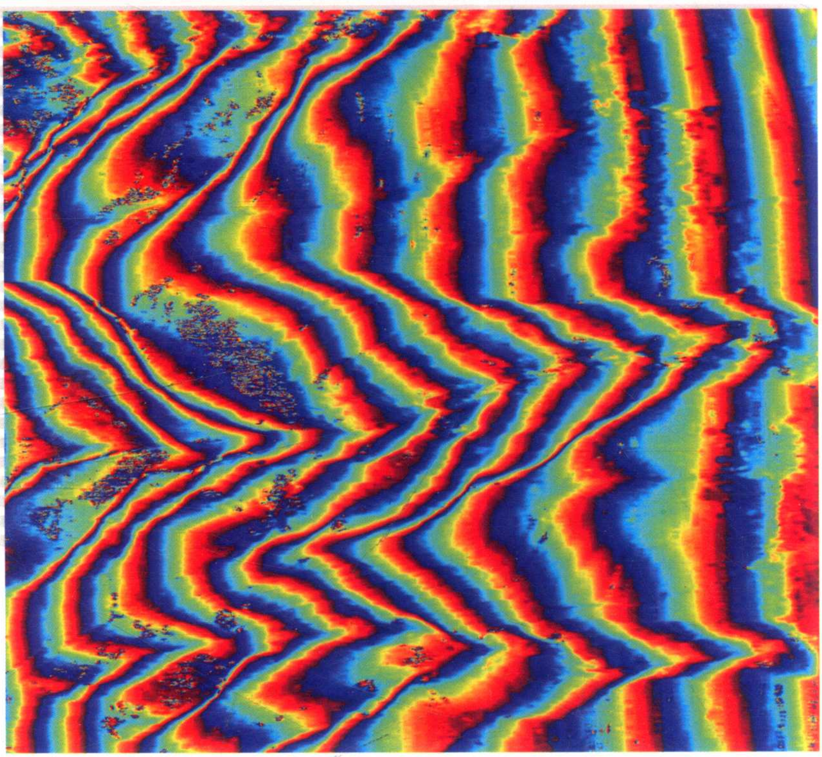
微波成像雷达信号统计特性

——随机过程理论的应用

徐华平 李春升 张家伟 编著



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

微波成像雷达信号统计特性
——随机过程理论的应用

徐华平　李春升　张家伟　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书在介绍随机过程理论基本概念和微波成像雷达系统模型的基础上，通过分析微波成像雷达回波中频、视频信号以及图像和干涉相位等信号的统计特性，着重阐述了白噪声过程、高斯过程、窄带过程以及随机过程线性变换等概念和方法在工程中的应用。全书共6章，各章均配有适量思考题，并有配套软件，供读者深入理解本书的内容。

本书深入浅出、表述简洁、概念清楚、内容新颖，既可作为高等院校相关专业的本科生、研究生的教材或教学参考用书，也可作为通信、雷达、控制等相关领域的科研人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

微波成像雷达信号统计特性：随机过程理论的应用／徐华平，李春升，张家伟编著. -- 北京：北京航空航天大学出版社，2018.9

ISBN 978-7-5124-2807-2

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①徐… ②李… ③张… Ⅲ. ①随机过程－应用－微波雷达－成象雷达－雷达信号处理－高等学校－教材 Ⅳ. ①TN958②TN957.51

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第194997号

微波成像雷达信号统计特性——随机过程理论的应用

徐华平　李春升　张家伟　编著

责任编辑　杨　昕

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编 100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026

读者信箱：goodtextbook@126.com　邮购电话：(010)82316936

艺堂印刷（天津）有限公司印装　各地书店经销

*

开本：710×1 000　1/16　印张：8.75　字数：186千字

2018年10月第1版　2018年10月第1次印刷　印数：2 000册

ISBN 978-7-5124-2807-2　定价：39.00元

前　言

20世纪50年代提出的合成孔径雷达(Synthetic Aperture Radar, SAR)是一种能够全天时、全天候工作的主动微波成像雷达。它通过距离向脉冲压缩和方位向孔径合成实现二维高分辨率成像,分辨率可达厘米级。随着微波成像雷达载荷和平台技术的迅速发展,大量的SAR图像数据被获取,微波成像雷达技术也已成为一项比较成熟的技术。目前,高分辨率SAR图像已被广泛应用于军事侦察、地形测绘、灾害监测、环境监控、国土勘测、资源普查、海况监视、海岸监测、大气探测、空间探测、星球探测等,以及军事、陆地、海洋和空间的各个方面。

为了更好地实现SAR图像的应用,必须深入研究SAR图像噪声抑制、目标检测、分类与识别等处理方法,而SAR图像的统计特性又是SAR图像处理和应用的基础。SAR图像是SAR对目标场景的一次观测,或者视为观测量的一个样本。因此,必须利用"随机过程理论"等课程给出的随机信号分析工具对SAR图像的统计特性进行分析。而SAR图像是目标散射特性通过微波成像雷达系统的获取和成像处理之后的输出,其统计特性归根结底取决于目标场景、微波成像雷达系统和成像处理器的共同作用。因此,为了更逼真、更精确地得到微波成像雷达图像的统计特性,必须从分析目标回波信号统计特性及通过微波成像雷达获取和成像处理后的统计特性变化入手。

与确定性信号分析不同,随机信号只能分析其在样本空间上表现出来的有规律的群体特性,即统计特性。由于随机信号的许多统计特性不能像确定性信号的取值那样被直接观察和形象描述,因此通常难以理解。另外,研究统计特性的数学工具也比较有限,从而导致SAR图像统计特性虽然被广泛应用,但是关于其如何被分析和推导的研究却相对较少。

本书作者长期从事微波成像雷达系统的性能分析、成像处理、图像处理和应用等方面的研究工作以及"概率论""随机过程理论"等随机信号分析相关课程的教学工作。本书是作者将多年来的科研成果与教学经验相融合编写而成的,结合微波成像雷达系统获取、处理和应用3个环节,分析了中频回波信号、视频回波信号、图像信号、干涉信号等信号的统计特

性；利用随机过程对信号进行建模，应用窄带过程、高斯过程、白噪声过程等概念以及随机过程通过线性系统等理论，深入浅出地推导了这 4 种信号的统计特性，并且给出了统计特性在实际图像处理中的应用。

本书以“学习与思考相结合、知识与情景相结合、理论与实际相结合”为理念，注重问题的分析、知识的应用和概念的理解。具体来说，就是在本书的编写过程中力求做到：精准、简练、新颖和系统。

(1) 精准。本书给出的微波成像雷达机理和模型均来源于最经典的描述，并且已经在实际工程项目中得到了验证。微波成像雷达系统的数学模型真实地反映了实际工程中的物理工作机理和过程，微波成像雷达信号统计特性的推导结果也利用真实数据进行了验证。同时，第 3～6 章后面都给出了相应的仿真结果，验证了理论分析的正确性。

(2) 简练。本书在微波成像雷达系统的建模过程中，通过集中解决主要问题和问题的主要矛盾，给出了简化而又准确的系统模型。应用随机过程理论知识进行分析的过程中，也采用通俗易懂的最简模型。第 1 章高度凝练地给出了随机过程的基本概念，第 2 章给出了微波成像雷达最基本的系统模型，每一章的开始都给出了本章统计特性分析所需的随机过程理论基础知识，力求深入浅出。

(3) 新颖。本书的内容主要来自微波成像雷达技术领域中的前沿课题，有些内容来源于作者近年来取得的研究成果。同时，在内容的编排上，从随机过程的基本知识出发，到微波成像雷达信号统计特性的推导，再到雷达信号统计特性在图像处理中的应用，不仅有助于读者掌握信号统计特性的推导过程，而且也便于读者理解随机过程理论的基本概念，明确统计特性在实际中的应用。

(4)系统。本书利用随机过程理论对微波成像雷达从获取、成像处理到图像应用完整链条上的每一步信号的统计特性进行了分析。第 2 章给出了微波成像雷达的系统模型，第 3～6 章针对微波雷达地面场景、回波获取、成像处理、干涉处理等各环节的信号统计特性进行了分析，所有章节内容结合在一起构成了微波成像雷达图像统计特性的完整分析过程。

本书可供通信、雷达等相关领域的专业技术人员参考，作为其在微波成像雷达获取、处理和应用等各阶段中的信号统计特性的学习资料；同时也可作为普通高等院校相关专业的本科生、研究生学习随机过程理论的教学参考用书，或者作为专业研讨课的教材和教学参考用书，还可供相关专业的教师阅读参考。

随书所附的"《微波成像雷达信号统计特性》配套软件"中主要包括软件的 MATLAB 封装代码和使用说明。配套软件包括"随机过程""数字图像处理""雷达仿真"三个模块，本书中的仿真结果均是采用"雷达仿真"模块得到的。配套软件的运行需要本地安装 MATLAB。

配套软件可通过扫描本页的二维码→关注"北航理工图书"公众号→回复"2807"获得下载地址。如有疑问请发送邮件至 goodtextbook@126.com 或拨打 010－82317036 联系图书编辑。

本书的第 1 章、第 4 章、第 5 章和第 6 章由徐华平教授编写，第 2 章由王鹏波副教授编写，第 3 章由杨威副教授编写，最后由李春升教授统稿。博士生张家伟参与了第 3 章和第 4 章部分内容的编写工作，博士生杨波和李硕参与了第 5 章和第 6 章的部分仿真工作，硕士生高帅、本科生乔舒浩参与了本书配套软件的开发工作。感谢周荫清教授在本书编写过程中给予的帮助，感谢北京航空航天大学星载 SAR 课题组对本书编写工作的支持。

由于作者水平有限，书中难免存在不妥甚至错误之处，恳请各位读者批评指正。

作　者
2018 年 7 月

北航理工图书

目　　录

第 1 章　随机过程简介

1.1　随机过程的起源与发展

美国著名心理学家 M・斯考特・派克在他的著作《少有人走的路》一书中指出，"生活本身就是不确定的"。正是生活的这种不确定性，使得早在有文字记载的人类文明之初，就开始了对不确定性的研究，这被认为是概率研究的最早阶段。受到数学工具和人们认知的限制，经过近 5 000 年的发展之后，现代概率论中使用的概率的公理化体系才被建立。

一般地，概率论的发展被分为 4 个阶段，如表 1.1 所列，它给出了这 4 个阶段的时间、时代背景、主要代表人物和代表著作，以及所使用的数学分析工具和当时所研究的概率论的内容。

表 1.1　概率论的发展阶段

阶　段	背　景	分析工具	代表人物和代表著作	概率论的主要研究内容
1. 起始萌芽（远古—1653 年）	研究赌博和占卜	骰子、赌板	古希腊学者亚里士多德认为：随机性客观存在	概率的古典定义
2. 早期创立（1654—1811 年）	赌博盛行、保险业兴起、彩票发行	组合与代数	(1) 荷兰数学家惠更斯的《论赌博中的推理》，是概率论史上的第一部著作； (2) 瑞士数学家雅各布・伯努利的著作《猜度术》； (3) 法国数学家棣莫弗的《机遇论》； (4) 英国数学家贝叶斯的贝叶斯假设和贝叶斯公式	古典概率、离散型随机变量
3. 分析概率论（1812—1932 年）	统计物理领域开始使用概率论	特征函数、微分、差分方程	(1) 法国数学家拉普拉斯的《分析概率论》，标志着古典概率的成熟； (2) 法国数学家莱维的《概率计算》； (3) 法国数学家庞加莱、博雷尔，苏联数学家伯恩斯坦，奥地利数学家米泽斯等对公理化体系的研究	公理化体系探讨、连续型随机变量

续表 1.1

阶段	背景	分析工具	代表人物和代表著作	概率论的主要研究内容
4. 现代概率论（1933—今）	集合论、勒贝格测度等现代数学的发展	实变函数论、集合论和测度论	(1) 苏联数学家科尔莫格罗夫的《概率论基础》完成了概率公理化体系的构建；(2) 日本数学家伊藤清建立了随机分析学	公理化体系的构建、数理统计、随机过程、随机分析学

区分这 4 个阶段的 3 个里程碑式的事件如下：

(1) 1654 年夏天，法国数学家、物理学家帕斯卡和数学家费马之间互通了 7 封信件，即著名的"帕-费通信"。在这之后，概率真正地从游戏中解脱出来，成为一门数学学科。

(2) 1812 年，拉普拉斯的《分析概率论》出版，给出了古典概率的定义，将差分方程等数学工具引入到概率论的分析中。之后，17—18 世纪发展起来的数学解析分析方法被用于概率的研究中，促使概率向公式化方向发展。

(3) 1933 年，科尔莫格罗夫的著作《概率论基础》出版，给出了概率论的公理化定义，开启了公理化体系框架下的研究。之后的现代概率论阶段，概率被广泛应用于诸多领域，数理统计和随机过程逐渐成熟并发展为新的数学分支。

1.1.1　随机试验与随机事件

在讨论概率论的具体概念发展之前，先给出有关其研究对象随机试验和随机事件的相关定义。

定义 1.1　随机试验：任何理论的应用都有其限定范围，随机试验 E 是概率论应用的限定对象，它是指满足以下限定条件的随机现象：

(1) 试验可重复性，在相同条件下可以重复进行；

(2) 结果不确定性，每次试验的结果事先不能知道；

(3) 样本可确定性，每次试验的所有可能结果事先确定。

利用概率来开展统计特性研究的随机现象都默认满足以上 3 个条件。

定义 1.2　随机事件：随机试验的每一个可能结果被称为随机事件，常用大写字母 A、B、C 等表示。

定义 1.3　样本点与样本空间：最简单的事件被称为基本事件或者样本点，所有样本点的集合被称为样本空间 Ω。

对于一个随机试验，必然有一个确定的样本空间存在，所有关于统计规律性的讨论都在其样本空间上进行。

考虑到 Ω 是所有基本事件的集合，所以它也被称为确定性事件。不包含任何可能结果的空集$\varnothing$被称为不可能事件。样本空间 Ω 上所有随机事件的集合被称为 Ω

的一个博雷尔事件体 $\mathfrak{F}$，即 $\mathfrak{F}=\{A,A\subseteq\Omega\}$。

和事件 $A+B$ 是指事件 A 或者事件 B 发生；积事件 $A\cdot B$ 是指事件 A 与事件 B 均发生；补事件 $\overline{A}$ 是指在样本空间上事件 A 不发生；互不相容事件 $A\cdot B=\varnothing$ 是指其中一个发生，另一个必然不发生；差事件 $A-B$ 是指事件 A 发生且事件 B 不发生。

1.1.2　概率公理化定义的提出

古典概率起源于赌博。17 世纪的欧洲，赌博盛行，但是在赌博过程中经常因为各种意外的事件使得赌局无法完成，这便存在着未完成赌局的“赌资分配”问题。法国贵族赌徒德·梅尔在一次旅行中遇到法国神童帕斯卡，便向他请教有关赌博的一些问题，其中包括著名的“赌资分配”问题。

“赌资分配”问题： 赌博双方甲和乙各出资 32 枚金币玩掷骰子的游戏，先掷出 3 个 6 点的为赢家，赢得 64 枚金币。但是当甲掷出 2 个 6 点，乙掷出 1 个 6 点时，游戏被迫终止。此时应如何分配这 64 枚金币？

帕斯卡对这个问题非常感兴趣，他就此写信给费马，讨论赌资如何分配才更加合理。他们两人将赌博问题转变为数学问题，用排列组合理论给出了正确的答案。

1657 年，惠更斯结合自己的独立思考和“帕-费”通信讨论的问题，出版了《论赌博中的推理》，该书是第一部关于概率论的著作，在欧洲作为概率论的教材 50 余年。在惠更斯该著作的基础上，1713 年雅各布·伯努利的《猜度术》对它进行了注解，并建立了第一个大数定理；1733 年棣莫弗的《机遇论》由二项分布的逼近推导出了正态分布的概率密度函数表达式；1812 年拉普拉斯在《分析概率论》中给出了古典概率的定义。

定义 1.4　古典概率： 若随机试验 E 只有有限的 n 个基本事件，且每个基本事件的发生是等可能的，若事件 A 由 k 个基本事件组成，则事件 A 的古典概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n} \tag{1.1.1}$$

拉普拉斯不仅给出了概率的古典定义，还在棣莫弗研究的基础上，证明了二项分布收敛于正态分布的棣莫弗-拉普拉斯极限定理，开创了连续型随机变量的概率问题研究。他研究了蒲丰投针问题，奠定了概率几何定义的基础。但是仍在假设等可能性的条件下，以随机事件的几何尺寸与样本空间的几何尺寸之比来定义概率。

蒲丰投针问题： 平面上布满了等间距的一些平行线，向此平面投一根一定长度的针，求此针与任一平行线相交的概率。

拉普拉斯给出了概率论的理论系统之后，很多学者都致力于概率论的研究。在拉普拉斯研究的基础上，人们进行投针试验，通过重复试验，以某事件发生频率的极限来定义概率，这便是概率的统计定义。

作为拉普拉斯的学生，法国数学家泊松致力于对拉普拉斯相关理论的解释、修正和推广，扩展了拉普拉斯的二项分布理论，证明了在一定情况下，二项分布的极限是

泊松分布。在伯努利大数定理之后，泊松、马尔可夫、切比雪夫等对大数定理都进行了研究。

此时期，人们发现很多随机现象都不具备古典概率和几何概率定义要求的等可能性，最为著名的便是法国数学教授贝特朗提出的贝特朗悖论。

贝特朗悖论：在半径为 1 的圆内随机给出一条弦，其长超过圆内接正三角形边长$\sqrt{3}$的概率：(1) 利用弦与圆心的距离小于 1/2 来求取，则概率为 1/2；(2) 以弦的一个端点作为内接正三角形的一个顶点，在圆上变化弦的另一个端点，以该端点落在此顶点对边对应的圆弧段内求取，则概率为 1/3。

上述悖论中的几何概率均是应用了“等可能”的假设，该假设的不成立而产生了矛盾。因此，必须要求对概率论的逻辑给出更严密的定义。受 19 世纪末期数学公理化思潮的影响，人们试图找出概率的公理化定义。最早是 1851 年，布尔认为应该让概率“具有公理特性”；随后 1900 年，希尔伯特在国际数学大会上呼吁“概率论的公理化”；1927 年，伯恩斯坦在著作《概率论》中给出了初步的概率论公理体系，该体系存在着致命的弱点——“概率是推导出来的，而不是固有的”。

随着集合论、测度论等现代数学理论的发展，人们认识到事件的概率与集合的测度有相同的性质。1905 年，博雷尔建议将测度论引入概率论的研究中。在前人研究的基础上，科尔莫格罗夫经过十余年的研究，出版了划时代的著作《概率论基础》，给出了概率的公理化体系，并一直沿用至今。

定义 1.5　概率的公理化定义：科尔莫格罗夫以下面 5 个公理为基础，给出了概率的定义：

(1) 给定随机试验 E，存在着试验所有可能结果的集合——样本空间 Ω，以及所有样本空间子集的集合 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}$ 的每一个元素都是随机事件；

(2) 对于任一随机事件 $A\in\mathfrak{F}$，定义测度函数 $P(A)$，且 $P(A)\geqslant 0$；

(3) 对于概率测度 $P(\cdot)$，必须满足 $P(\Omega)=1$；

(4) 对于互不相容事件 A 和 B，有 $P(A+B)=P(A)+P(B)$；

(5) 对于互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有 $P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$。

概率是在大数定理成立的前提下定义出来的。大数定理给出：随机试验重复足够多的次数，其结果中存在着确定的统计规律。也就是说，概率是存在的，并且是确定性的。若不做特殊说明，本书所提到的概率均指公理化体系下的概率，常简化如下。

定义 1.6　概率：给定一个随机试验 E，存在一个样本空间 Ω 及其博雷尔事件体 $\mathfrak{F}$，如果有定义在 $\mathfrak{F}$ 上的一个实函数 $P(A)$，$A\in\mathfrak{F}$，满足以下条件：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2) 确定性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可加性：对于互斥事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots, A_i \cdot A_j = \varnothing, i \neq j$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.1.2}$$

则称 $P(A)$ 为概率测度或者概率。

一个随机试验 E 的 3 个要素样本空间 Ω、博雷尔事件体 $\mathfrak{F}$ 和概率 P 常被合在一起称为随机试验 E 的概率空间，记为 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$。

定义 1.7　条件概率： 对于概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$，令 $A, B \in \mathfrak{F}$，$P(A) > 0$，则在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率 $P(B|A)$ 被定义为

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \tag{1.1.3}$$

条件概率是概率的一种，它具有概率定义中的所有性质。条件概率反映了不同事件之间的相互影响。如果 A, B 互斥，即它们不可能同时发生，则有 $P(B|A) = 0$；如果 $A \subseteq B$，即 A 发生则 B 一定发生，则有 $P(B|A) = 1$。

如果 A 的发生对 B 的发生没有任何影响，则有 $P(B|A) = P(B)$，即 A 与 B 在统计意义下相互独立。为了避免除数为 0 必须要求 $P(A) > 0$，一般地，将独立性的定义用乘法形式表示。

定义 1.8　统计独立性： 对于概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$，令 $A, B \in \mathfrak{F}$，若有

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1.1.4}$$

则称事件 A 与事件 B 相互统计独立。

对于概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的 n 个事件 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，它们的统计独立性要求必须满足以下条件：

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}), \quad i_1, \cdots, i_k = 1, \cdots, n, \quad 2 \leqslant k \leqslant n \tag{1.1.5}$$

思考题： 试比较条件概率 $P(B|A)$ 与概率 $P(B)$ 的大小，并依此来分析在统计意义下事件之间的相互影响。

1.1.3　随机过程的提出和发展

早在拉普拉斯解决的“赌徒输光”问题中，就蕴含着随机过程的概念。确切地说，它就是一个离散的随机序列，是一组离散随机变量的集合。

赌徒输光问题： 赌徒甲和乙各有钱 a 元和 b 元，每局比赛输方给赢方一元，甲、乙每局获胜的概率分别为 p、q，求赌徒甲在 n 局内输光的概率。

而推动随机过程发展的主要是物理学研究的需求。例如，吉布斯、玻耳兹曼、庞加莱等对统计力学的研究，爱因斯坦、维纳、莱维等对布朗运动的研究。

1906 年,马尔可夫在他的一篇论文中,即在研究相依随机变量序列时,首次构建了马尔可夫链的数学模型。考虑到连续时间,科尔莫格罗夫将马尔可夫链扩展为马尔可夫过程,奠定了马尔可夫过程的理论基础。随后,辛钦发表了《平稳随机过程的相依理论》,开启了随机过程平稳性的探讨。

1905 年,爱因斯坦开始利用概率模型研究布朗运动;1923 年,维纳首次给出了布朗运动的数学定义,并证明了布朗运动轨道的连续性。基于布朗运动的实际物理模型,1948 年,莱维的著作《随机过程和布朗运动》提出了独立增量过程的一般理论。

日本数学家伊藤清于 1942 年给出了随机积分和微分方法,并研究了马尔可夫过程的特殊情况——扩散过程,1951 年建立了关于布朗运动的随机微分方程。1953 年,杜布的著作《随机过程论》出版,该书系统地叙述了随机过程的基本理论,并创立了鞅论。

1.2 随机变量

用随机事件的概率来研究随机试验结果的统计规律性,因为样本空间的多样性,有的样本空间不是数字形式,所以导致系统地进行数学分析比较困难。因此,就需要将所有随机试验的样本空间 Ω 都投影到一个统一的样本空间上。为了简单起见,通常选择整个实数域 $\mathbf{R}$ 作为这个统一的样本空间。根据投影关系 X,原样本空间上的随机事件 A 将对应着实数域空间上的一个随机事件 $X(A)$,因此,通过对 $X(A)$ 统计特性的研究就能够得到 A 的统计规律性,从而可以实现对随机试验统计规律性的认知。

在给定了实数域 $\mathbf{R}$ 这个统一的样本空间之后,所有概率论、随机变量以及随机过程等研究随机现象的数学理论体系都着重讨论实数域样本空间上统计规律性的研究。如何寻找投影关系,将现实中的随机试验样本空间投影到实数域,则是工程领域需要探讨的问题。

1.2.1 定　义

定义 1.9　随机变量: 给定一个随机试验 E,其概率空间为$(\Omega,\mathfrak{F},P)$。定义在 $\mathfrak{F}$ 上的实函数 $X(A)$,$A\in\mathfrak{F}$,如果对于任意的实数 x,有概率 $P[X(A)\leqslant x]$存在,则 $X(A)$为随机变量,常简写为 X。

可以看出,随机变量实质上是一个函数,将其称为“变量”是延续了最初概率相关资料上的习惯用语。另外,当随机变量定义出来之后,如何寻找这一函数关系将现实中的样本空间投影到实数域并不是数学界需要关心的问题,在数学上仅仅将其当作一个变量使用。

1.2.2 随机变量的概率分布函数

从定义 1.9 可以看出，对于随机变量 X，概率 $P(X\leqslant x)$一定存在，因此其被定义为表征 X 统计特性的最基本的量。

定义 1.10 概率分布函数：对于随机变量 X，定义

$$F_X(x)\xlongequal{\text{def}}P(X\leqslant x),\quad x\in\mathbf{R}\tag{1.2.1}$$

为 X 的概率分布函数。

$F_X(x)$是从数学角度引入的一个量，用来描述统计特性，对于任意的随机变量 X，它一定存在。但是因为 $X\leqslant x$ 不能直接表示基本事件，在实际问题的研究中，$F_X(x)$使用起来比较抽象。因此，一般情况下，连续型随机变量的统计特性常用概率密度函数表示，离散型随机变量的统计特性常用概率分布来表示。

定义 1.11 概率密度函数：对于样本点连续的连续型随机变量 X，概率密度 $f_X(x)$定义为概率分布函数在样本上的导数，即

$$f_X(x)\xlongequal{\text{def}}\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x},\quad x\in\mathbf{R}\tag{1.2.2}$$

由式(1.2.2)容易得到

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(s)\mathrm{d}s,\quad x\in\mathbf{R}\tag{1.2.3}$$

定义 1.12 概率分布：对于样本可列的离散型随机变量 X，每个样本点 $x_i(i=1,2,\cdots)$对应的概率为

$$p_i=P(X=x_i),\quad x_i\in\mathbf{R},\quad i=1,2,\cdots\tag{1.2.4}$$

表示 X 的概率在样本点上的分布，因此称为 X 的概率分布或者概率分布列。

根据式(1.2.4)，对于离散型随机变量 X，有

$$F_X(x)=\sum_{x_i\leqslant x}P(X=x_i),\quad x,x_i\in\mathbf{R}\tag{1.2.5}$$

实际上很多问题都需要用多个随机变量来进行描述，因此需要联合概率分布函数、联合概率密度函数以及联合概率分布等对多维随机变量的统计特性进行描述。

定义 1.13 n 维联合概率分布函数：对于 n 维随机变量 $\boldsymbol{X}=[X_1,X_2,\cdots,X_n]$，其 n 维联合概率分布函数定义为

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)\xlongequal{\text{def}}P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n),\quad x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\tag{1.2.6}$$

定义 1.14 n 维联合概率密度函数：对应的 n 维连续随机变量的联合概率密度函数 $f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)\xlongequal{\text{def}}\frac{\partial^n F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n},\quad x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\tag{1.2.7}$$

定义 1.15 n 维联合概率：对于离散型 n 维随机变量，有 n 维联合概率为

$$p_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n),\quad x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R} \tag{1.2.8}$$

对应于条件概率，可以定义出在事件 $Y\in A$ 发生的条件下，X 的条件概率分布函数为

$$F_{X|Y\in A}(x\mid Y\in A)\overset{\text{def}}{=\!=}P(X\leqslant x\mid Y\in A)=\frac{P(X\leqslant x,Y\in A)}{P(Y\in A)},\quad x\in\mathbf{R} \tag{1.2.9}$$

其中，$P(Y\in A)>0$。

在事件 $Y\in A$ 发生的条件下，连续型随机变量 X 的条件概率密度函数定义为

$$f_{X|Y\in A}(x\mid Y\in A)\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\mathrm{d}F_{X|Y\in A}(x\mid Y\in A)}{\mathrm{d}x},\quad x\in\mathbf{R} \tag{1.2.10}$$

在式(1.2.10)中，令事件 $A=[y,y+\Delta y]$，并对 $\Delta y\to 0$ 取极限，则得到 $Y=y$ 的条件下，连续型随机变量 X 的条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

$$\begin{aligned}f_{X|Y}(x\mid y)&=f_{X|Y=y}(x\mid Y=y)=\lim_{\Delta y\to 0}f_{X|Y\in A}(x\mid Y\in[y,y+\Delta y])\\&=\frac{\mathrm{d}\left[\dfrac{\int_{-\infty}^{x}f_{X,Y}(s,y)\mathrm{d}x\Delta y}{f_Y(y)\Delta y}\right]}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},\quad x,y\in\mathbf{R}\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

当随机变量 Y 在其样本空间上的取值对随机变量 X 的取值没有任何影响时，也就是说，$F_{X|Y\in A}(x|Y\in A)=F_X(x)$，则它们之间是统计独立的。

定义 1.16　随机变量的统计独立： 对于 n 维随机变量 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$，若有

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),\quad x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R} \tag{1.2.12}$$

则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 之间具有统计独立性。

类似地，对于连续型随机变量，其统计独立性可以由概率密度函数定义为

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n),\quad x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R} \tag{1.2.13}$$

而离散型随机变量的统计独立性亦可由其概率分布表示为

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)=P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)\cdots P(X_n=x_n) \tag{1.2.14}$$