大学数学 经管类

下册

贾丽丽　朴丽莎　主编

科学出版社

大 学 数 学

(经管类)下册

主　编　贾丽丽　朴丽莎
副主编　林　谦　邵晶晶

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书根据高等学校经济管理类数学课程的教学基本要求编写而成，是云南大学滇池学院精品课程建设项目成果之一.

全书分上、下两册，共三篇内容. 本书为下册，包含第二篇线性代数和第三篇概率统计，第二篇主要内容为矩阵、线性方程组、特征值与特征向量，第三篇主要内容为随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征和数理统计. 书中每章配有习题，书末附有习题参考答案. 本书结构清晰、概念准确、贴近考研、可读性强，便于学生自学，且能启发和培养学生的自学能力并配有电子教案和录屏课件，便于广大师生的教与学.

本书可作为高等学校经管类大学数学课程教材，也适合经管类考研学生学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学：经管类：全 2 册 / 贾丽丽，朴丽莎主编. —北京：科学出版社，2018.8

ISBN 978-7-03-057955-3

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①贾… ②朴… Ⅲ. ①高等数字–高等学校–教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 131189 号

责任编辑：李淑丽 孙翠勤 / 责任校对：王 瑞
责任印制：霍 兵 / 封面设计：华路天然工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2018 年 8 月第一次印刷 印张：24 3/4
字数：587 000

定价：66.00 元（全 2 册）

（如有印装质量问题，我社负责调换）

目　录

第二篇　线性代数

第三篇　概率统计

第二篇　线 性 代 数

第 1 章　矩　　阵

矩阵实质是一张长方形数表. 它是解决数学问题的一种特殊的“数形结合”的方法, 矩阵被广泛应用于科学研究与日常生活中, 诸如课表、成绩统计表；生产进度表、销售统计表；列车时刻表、价目表；科研领域的数据分析表等, 并且利用矩阵初等变换研究线性方程组的解是一个非常有力的工具. 本章主要介绍矩阵的概念、运算、方阵的行列式、矩阵的初等变换及逆矩阵.

1.1　矩阵的概念

本节通过引例展示数学问题或实际问题与一张数表——矩阵的联系, 从而给出矩阵的概念.

一、引例

例 1　线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数可排列成一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

这样的表叫做 $m \times n$ 矩阵.

例 2　某企业生产 4 种产品, 各种产品的季度产值(单位：万元)如表 1-1.

表 1-1

季度	产品			
	A	B	C	D
1	80	75	75	78
2	98	70	85	84
3	90	75	90	90
4	88	70	82	80

数表$\begin{bmatrix} 80 & 75 & 75 & 78 \\ 98 & 70 & 85 & 84 \\ 90 & 75 & 90 & 90 \\ 88 & 70 & 82 & 80 \end{bmatrix}$具体描述了这家企业各种产品的季度产值，同时也揭示了产值随季度变化的规律、季增长率和年产量等情况.

例 3　某航空公司在 A,B,C,D 四个城市之间开辟了若干航线，图 1-1 表示了四城市间的航班情况，若从 A 到 B 有航班，则用带箭头的线连接 A 与 B . 四城市间的航班图还可用表格表示(行标表示发站，列标表示到站)

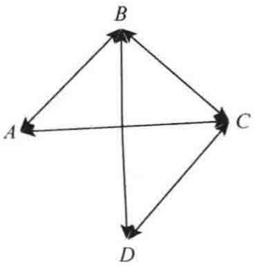


图 1-1

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	√
C	√	√		√
D		√	√	

其中 √ 表示有航班，为了便于研究，记表中 √ 为 1，空白处为 0，则得一数表，该数表反映了四城市间航班来往情况，即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

二、矩阵的概念

定义 1.1　给出 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，按一定顺序排成一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

此数表叫做 **m 行 n 列矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵. 上面的矩阵一般用大写字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$ 表示，有时亦记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**，它位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列的交叉处. 在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，如果 $m=n$，就称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶方阵**.

三、几种特殊矩阵

(1) 只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ 叫做**行矩阵**.

(2) 只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

叫做**列矩阵**.

(3) 当两个矩阵的行数相等、列数也相等时，就称它们是**同型矩阵**.

(4) 元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$，注意不同型的零矩阵是不同的.

(5) 方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

叫做 **n 阶单位阵**，简记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}_n$ 的特点是：从左上角到右下角的直线(主对角线)上的元素都是 1，其他元素都是 0.

(6) n 阶方阵 $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ 称为 **n 阶对角矩阵**，当它的对角元素全部相等时，即 $\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$ 称为 **n 阶数量矩阵**.

(7) 主对角线下(上)方的元素全为零的方阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\left(\text{或}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$，称为**上(或下)三角形矩阵**.

(8) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

1.2 矩阵的运算

矩阵除了是一个矩形数表，还定义了一些有理论意义和实际意义的运算，从而成为进行理论研究和解决实际问题的有力工具.

首先，我们来定义矩阵相等. 如果两同型矩阵的对应元素都相等，则称这两个**矩阵相等**.

一、矩阵的加法运算

定义 1.2　设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，它们的**和** $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

注　只有当两个矩阵同型时，才能进行加法运算.

由于矩阵的加法归结为它们对应位置元素的加法，所以，不难验证加法满足以下运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;（交换律）

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.（结合律）

二、矩阵的数乘运算

定义 1.3　数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记做 $\lambda\boldsymbol{A}$, 规定

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix},$$

数与矩阵的乘积运算称为**数乘运算**.

数乘矩阵满足下列运算规律：

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 记 $-\boldsymbol{A}=(-1)\cdot\boldsymbol{A}=(-1\cdot a_{ij})=(-a_{ij})$, $-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

其中 $\boldsymbol{O}$ 为各元素均为 0 的同型矩阵. 由此规定

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

例 1　若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2+2 & 3+4 & 1+7 \\ 2+3 & 5+5 & 7+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 5 & 10 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2-2 & 3-4 & 1-7 \\ 2-3 & 5-5 & 7-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -6 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix};$$

$$3\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3\times2 & 3\times3 & 3\times1\\3\times2 & 3\times5 & 3\times7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9 & 3\\6 & 15 & 21\end{bmatrix}.$$

例 2 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\0 & 1 & 4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\5 & 2 & -1\end{bmatrix}$, 则

$$\begin{aligned}4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}&=4\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\0 & 1 & 4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\5 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -4 & 8\\0 & 4 & 16\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-6 & 3 & 9\\15 & 6 & -3\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}12-(-6) & -4-3 & 8-9\\0-15 & 4-6 & 16-(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & -7 & -1\\-15 & -2 & 19\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 3 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2 & 0\\1 & 5 & 7 & 9\\2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\5 & 1 & 9 & 7\\-1 & -3 & -5 & 0\end{bmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解 因 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 故有 $2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$, 进而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\5 & 1 & 9 & 7\\-1 & -3 & -5 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2 & 0\\1 & 5 & 7 & 9\\2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}\right)\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}10 & 4 & -4 & 4\\4 & -4 & 2 & -2\\-3 & -7 & -11 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -2 & 2\\2 & -2 & 1 & -1\\-\dfrac{3}{2} & -\dfrac{7}{2} & -\dfrac{11}{2} & -4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

三、矩阵的乘法运算

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$, 那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

特别地, 当行矩阵 $[a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is}]$ 与列矩阵 $\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{bmatrix}$ 相乘时, 即

$$[a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},$$

就是一个数 c_{ij}, 这表明 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和.

注　只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数与第二个矩阵(右矩阵)的行数相等时，两个矩阵才能相乘.

例 4　线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

若记 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$，则利用矩阵的乘法，线性方程组可表示为矩阵形式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

例 5　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $n\times 1$ 和 $1\times n$ 矩阵，且

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n],$$

计算 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{BA} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

$\boldsymbol{AB}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{BA}$ 是 1 阶矩阵，运算的最后结果为 1 阶矩阵时，可以把它与数等同看待.

例 6　设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，讨论以下等式是否成立？

(1) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$.

解　(1) 因为 $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

(2) 因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\right)^2=\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}8&14\\14&29\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^2+2\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}10&16\\15&27\end{bmatrix},$$

所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

注 由例 5、例 6 可知, 矩阵乘法不满足交换律.

此外, 矩阵乘法一般也不满足消去律, 即不能从 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 例如, 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{BC},$$

但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$.

然而, 假设运算都可行的情况下, 矩阵的乘法仍满足下列运算规律:

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$; (结合律)

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$; (左分配律)

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$; (右分配律)

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$ (其中 λ 为数).

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$, 容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

运算规律(1)中令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 为方阵, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 次幂. 一般地, 称 $\boldsymbol{A}^n=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{n个}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂, 规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

例 7 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-2&1&-1\\1&2&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&5&4\\4&-2&2\\1&4&1\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{B}^2-2\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{AB}$.

解 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{B}^2-2\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB})-(4\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{BA})$

$$=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B})-2\boldsymbol{B}(2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B})$$

$$=\left(\begin{bmatrix}1&-3&2\\-2&1&-1\\1&2&-1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2&5&4\\4&-2&2\\1&4&1\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1&-3&2\\-2&1&-1\\1&2&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&5&4\\4&-2&2\\1&4&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-3&-13&-6\\-10&5&-5\\-1&-6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&7&10\\6&-3&3\\3&10&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-111&-42&-75\\-35&-135&-90\\-50&-19&-31\end{bmatrix}.$$

四、矩阵的转置

定义 1.5 将矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换, 可得到一个 $n\times m$ 矩阵, 称此矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**, 记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

即若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

矩阵的转置满足以下运算规律:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (k 为实数).

例 8 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解　法一 因为 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{bmatrix}$, 所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

法二　$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$.

1.3　方阵的行列式

行列式的概念来源于解线性方程组的问题, 而方阵的行列式是研究矩阵的一个重要工具.

一、行列式的定义

1. 二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1\text{-}1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (1\text{-}2) \end{cases}$$

式(1-1)$\times a_{22}$ −式(1-2)$\times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2. \tag{1-3}$$

式(1-2)$\times a_{11}$ −式(1-1)$\times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \tag{1-4}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为便于记忆上述结果，我们引入二阶行列式.

定义 1.6　记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，它由 2^2 个数组成，其中 $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 称为**行列式的元素**，从二阶行列式可以看出，行列式实质是一个数，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式表示的代数和，其运算规律性可用“对角线法则”，如图 1-2 所示，即：实线(主对角线)连接的两个元素之积减去虚线(副对角线)连接的两个元素之积.

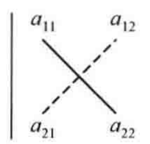


图 1-2

显然，对于线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注　分母的行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为系数行列式.

例 1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ x_1 - 2x_2 = -3. \end{cases}$$

解　$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0,$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-7,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14,$$

因 $D\neq 0$，故该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

2. 三阶行列式

定义 1.7　记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为**三阶行列式**.

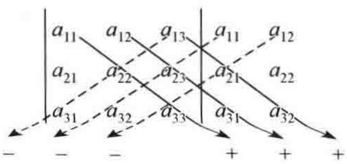


图 1-3

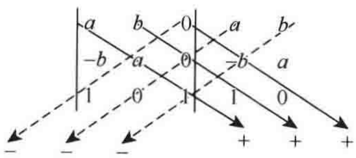
由上述定义可见，三阶行列式有 3! 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号，其运算的规律性可用“沙路法则”(图 1-3) 来表述.

注　实线上三元素的积冠以正号，虚线上三元素的积冠以负号.

例 2　a, b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix}a & b & 0\\ -b & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0.$$

解　按沙路法则，有



$$\begin{vmatrix}a & b & 0\\ -b & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=a\times a\times 1+b\times 0\times 1+0\times(-b)\times 0-0\times a\times 1-a\times 0\times 0-b\times(-b)\times 1=a^2+b^2.$$

若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零. 因此，当 $a=0, b=0$ 时，给定行列式等于零.

例 3　计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}.$$

解　原式 $=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 3\\ -4 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}$

$$=2\times 3\times(-2)+3\times 1\times 2+5\times(-4)\times 1-5\times 3\times 2-2\times 1\times 1-3\times(-4)\times(-2)$$

$$=-12+6-20-30-2-24=-82.$$