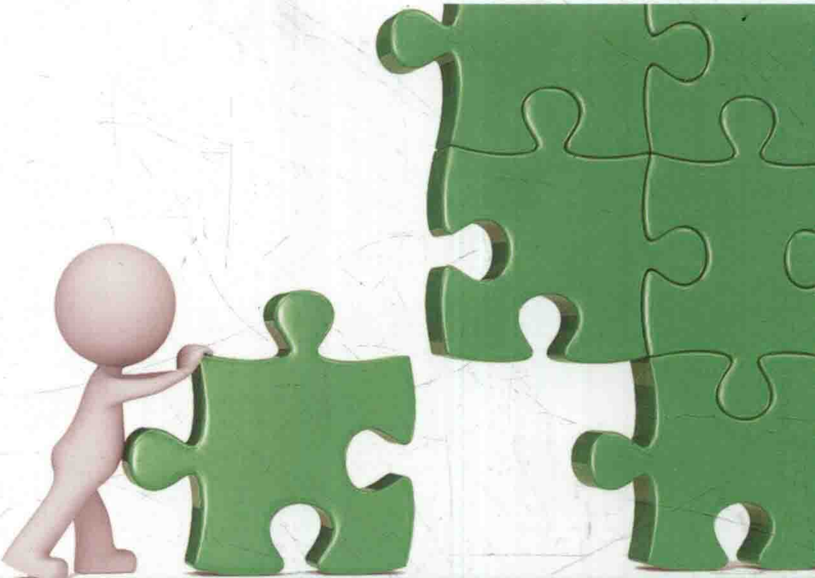
QUNLILUN TANXI

群理论探析

竹红英◎著



地质出版社

群理论探析

竹红英 著

地质出版社
·北 京·

内容简介

群论是基础数学中非常重要的部分，有拓扑群、李群、代数群等领域，它们为代数拓扑、泛函分析等理论奠定了基础。而群的同调又是其核心领域之一，对于人们掌握和研究近代数学理论具有非常重要的意义。本书主要探讨了群的同调理论，具体内容涉及群的同调基本概念、单纯同调群、相对同调群、上同调群、同调群的不变性、连续同调群、局部同调群、奇异同调群，以及同调论的一些应用实例。总体上来讲，本书运用简练而深刻的语言论述了群的同调系统理论，而且条理清晰、论述严谨。

本书可供各大高校数学相关专业教师与学生参考与使用。

图书在版编目（CIP）数据

群理论探析 / 竹红英著 . — 北京：地质出版社，2017.4

ISBN 978 – 7 – 116 – 09375 – 1

Ⅰ . ①群… Ⅱ . ①竹… Ⅲ . ①群论—研究 Ⅳ . ① 0152

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 111879 号

责任编辑：杨　艺　郑长胜
责任校对：王　瑛
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路 31 号，100083
咨询电话：（010）66554528（邮购部）；（010）66554590（编辑室）
网　　址：http：//www.gph.com.cn
传　　真：（010）66554686
印　　刷：北京地大彩印有限公司
开　　本：787mm × 960 mm　1/16
印　　张：15
字　　数：246 千字
版　　次：2017 年 4 月北京第 1 版
印　　次：2017 年 4 月北京第 1 次印刷
定　　价：42.00 元
书　　号：ISBN 978-7-116-09375-1

（如对本书有建议或意见，敬请致电本社；如本书有印装问题，本社负责调换）

序

整个数学的发展史是与人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的. 19世纪初，欧洲数学家们在研究根式求解高次代数方程的一般解的问题中，逐渐发展出了一门全新的数学——群论. 群论最重要的创立者是年轻有为的伽罗瓦，他最先提出了群的概念，并用群论彻底解决了根式求解代数方程的问题，而且由此发展了一整套关于群和域的理论，为了纪念他，人们称之为伽罗瓦理论. 正是这套理论创立了抽象代数学，把代数学的研究推向了一个新的里程. 它对数学分析、几何学的发展有很大影响，并标志着数学发展现代阶段的开始.

群论思想的产生和发展，对数学产生了重大的影响，它使代数研究进入了新时代，即从局部性研究转向系统结构的整体性分析研究的阶段. 抽象群论标志着抽象代数学的产生，在数学发展史上占有重要的地位. 抽象代数学，像古典代数学一样，是关于运算和运算规则的理论学科. 但它不像古典代数那样限于研究数的运算，而是研究一般的元素集合上的运算和运算规则，使得新的教学对象如矩阵、矢量、变换等的运算有了理论依据，从而把数学理论抽象到新的层次. 群论的思想还向各门数学分支渗透. 群论提供的结构分析思想是典型的现代数学思想. 伽罗瓦所采用的多次映射，把问题化归为结构简单的问题的思想也成为现代数学的典型思想方法. 利用群论的思想方法解决了一系列复杂的数学问题，开辟了数学的新领域，同时也促使数学得到更加广泛的应用.

从群论思想的产生、发展和意义可以看出，数学思想对数学的研究和发展所起的作用是巨大的. 数学思想如同数学知识一样，是数学发展过程中积累起来的宝贵精神财富，并且是数学知识所不能替代的.

群论研究主要对象是拓扑空间，用到的工具主要是代数的工具. 如今群论领域早已发展壮大，包含众多分支，表述形式也具有多样性. 每个领域都足以耗尽一个数学研究者的一生. 本书作者研究的领域主要是同调

论，其在多年研究和教学的基础上，终成此书. 本书主要探究了同调群，包含相对同调群、上同调群、奇异同调群、连续同调群等知识，是同调群理论中难得的综合成果.

竹红英
2017年3月

前　言

本书主要用同调的方法探讨群理论. 群论已经渗透到基础数学的许多分支之中，而且形成了一些围绕群理论展开的新学科，如拓扑群、李群和代数群等. 同调论是现代数学的重要基础课程，也是应用数学的基本研究对象之一，它用公理化的方法来研究拓扑学问题，即用代数作为工具研究拓扑空间的自身结构及空间图形在连续形变下保持不变的性质. 同调群运用极为有力的表述形式和高度抽象的观点、方法，使得其理论框架显得十分简捷而具有高度的概括性.

同调群不仅在代数数论、微分几何、代数几何、抽象代数、对策论等许多数学分支中有着广泛的应用，而且由此衍生的诸多数学工具在自然科学和其他工程技术领域，如理论物理、量子化学、计算机、电子通信、现代控制理论中都有着广泛的应用. 因此，同调群理论已成为现代数学及现代技术领域中不可替代的基础工具之一.

本书介绍了基本群、群的同调、单纯同调群的基本概念，以及同调群的拓扑不变性和同伦不变性等重要性质，并探究了相对同调群、上同调群、奇异同调群、连续同调群，以及同调群的乘积. 全书共分为8章. 第1章对群理论的基本知识——同伦与同伦等价、群的直和与自由积做了大概介绍，并讨论了基本群和球面的基本群；第2章首先引入同调论，介绍了复形与粘接、导出函子，并讨论了导出函子Ext和Tor的性质和应用，其次讨论了同调泛系数定理和上同调泛系数定理，然后开始讨论群的同调理论；第3章介绍了有向单形、复形以及复形的同调群的有关概念，并探讨了复形同调群的计算，还介绍了Betti数和Euler示性数；第4章主要讨论了同调群的拓扑不变性和同伦不变性，为了得到同调群的拓扑不变性，先在不同空间的同调群之间建立了某种映射关系，然后通过对这种联系的研究，再来得到同调群的拓扑不变性；第5章研究了相对同调群、局部同调群和上同调群，具体包括切除定理、局部同调群与流形、Eilenberg-Steenrod公理、反变函子、上下同调群的Kronecker积和de Rham定理等内容；第6章首先讨论了链映射与链同伦，其次讨论了奇异同调群及其同伦不变性，然后探讨了Mayer-Vietoris序列的性质和应用；第7章首先讨论了连续同调群及

其同伦不变性，其次探讨了相对连续同调群及其单纯同调与连续同调之间的关系，然后探究了球的连续同调群和球上线性无关的切向量；第8章首先讨论了复形的乘积，包括自由链复形的张量积、胞腔复形与胞腔同调类的乘积、上下同调类的乘积、上下同调类的斜积，其次探讨了奇异同调中的乘法，包括奇异上链的上积与卡积、上同调环与下同调模、准单纯复形中的上积与卡积，然后讨论了Eilenberg-Zilber定理和奇异上同调的叉积与乘积空间的上积，最后讨论了相对上同调的上积和Ljusternik-Schnierelman畴数。

由于学科本身的特点，同调论与群理论的公理体系具有高度的概括性和抽象性. 本书力求语言简练、逻辑完整，而且论述条理清晰、深入浅出，希望对读者有所帮助.

本书出版过程中，虽然经历了多次修改，但是限于作者水平，难免存在纰漏和不完善之处，希望同行学者和广大读者予以批评指正. 另外，在撰写本书过程中，得到了许多专家学者的帮助和指导，也参考了大量的相关学术文献，在此特表示真诚的感谢.

竹红英

2016年11月

目　录

第1章　基本群

闭曲面（即连通的紧 2 维拓扑流形）的欧拉数（或欧拉示性数）是一个有趣的代数量．欧拉数是一个整数，可能等于 0，可能大于 0，也可能小于 0．下面以球面和环面为例给出欧拉数的一个描述．首先描述正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 的欧拉数．把 $[0,1]\times[0,1]$ 剖分成一些（曲边）多边形，图1.1就是一个这样的剖分。

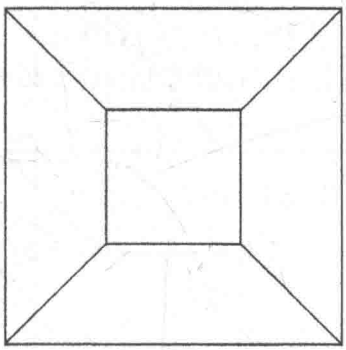


图1.1　正方形的剖分K

给定 $[0,1]\times[0,1]$ 的一个剖分P，分别用 $v(P),e(P),f(P)$ 记P的顶点数、边数和面数，例如 $v(K)=8$、$e(K)=12$、$f(K)=5$．对于不同的剖分，顶点数、边数和面数可能不同，但试几个例子之后你会发现虽然剖分不同，但是 $v(P)-e(P)+f(P)$ 总是等于1．事实上，用归纳法不难证明对于$[0,1]\times[0,1]$ 的任意剖分P，

$$v(P)-e(P)+f(P)=1.$$

数 $v(P)-e(P)+f(P)$ 不依赖于剖分P，把它称为正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 的欧拉数．

把正方形的剖分K的边按图1.2所示粘合得到球面 S^2 的一个剖分L.

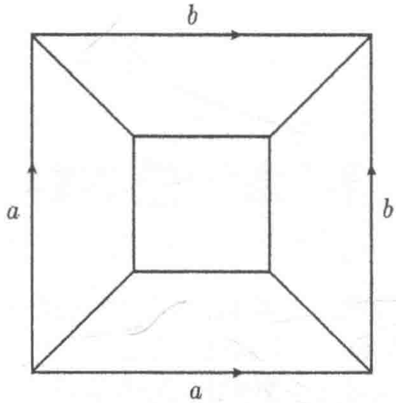


图1.2　球面的剖分L

对于剖分L，$v(L)-e(L)+f(L)=7-10+5=2$．利用正方形的欧拉数等于 1 不难证明对于S^2的任意剖分P，

$$v(P)-e(P)+f(P)=2.$$

把正方形的剖分K的边按图1.3所示粘合得到环面的一个剖分M.

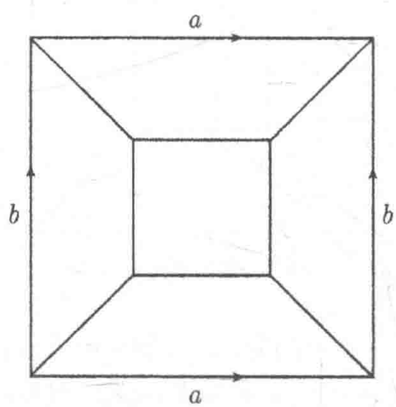


图1.3　环面的剖分M

对于剖分M，$v(M)-e(M)+f(M)=5-10+5=0$．可以证明对于环面的任意剖分P，

$$v(P)-e(P)+f(P)=0.$$

通常，任给闭曲面Γ的一个剖分P，$v(P)-e(P)+f(P)$总是一个常数，称为Γ的欧拉数．拓扑学一个广为人知的结果是一个闭曲面由它的定向性和欧拉数完全确定，也就是说两个闭曲面同胚当且仅当它们具有相同的欧拉数，并且同时可定向或不可定向.

本章为任意道路连通空X指定一个群$\pi(X)$，称为X的基本群，并且证明基本群是拓扑不变量．由于球面S^2的基本群是平凡群，而环面的基本群是$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，因此球面与环面不同胚．又因为$\mathbb{R}^2$挖去一个点后基本群是$\mathbb{Z}$，而$\mathbb{R}^3$挖去一个点后基本群是平凡群，所以$\mathbb{R}^2$与$\mathbb{R}^3$不同胚．

1.1　同伦与同伦等价

1.1.1　同伦和同伦等价的定义

定义1.1.1　称连续映射$f_0,f_1:X\to Y$同伦若存在连续映射$H:X\times[0,1]\to Y$使得对任意$x\in X$，

$$H(x,0)=f_0(x),H(x,1)=f_1(x)\,.$$

此时称H为从f_0到f_1的一个同伦（homotopy），记为

$$H:f_0\Rightarrow f_1\,.$$

与常值映射同伦的映射称为零伦映射．

直观上，如果把[0，1]看作“时间”，f_0到f_1的一个同伦给出了连续映射f_0（t=0）连续变形为连续映射f_1（t=1）的一个过程．也用图1.4表示H是从f_0到f_1的一个同伦．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=40, "f_0"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "f_1"'{name=D}] & Y \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "H"'] \end{tikzcd}$$

图1.4

注1.1.1：若X是核紧空间，函数空间[X，Y]赋予Isbell拓扑，则一个同伦$H:X\times[0,1]\to Y$本质上就是[X，Y]中从f_0到f_1的一条道路．

先看下面一些例子：

（1）任给连续映射$f:X\to Y$，

$$1_f:X\times[0,1]\to Y,\ 1_f(x,t)=f(x)$$

是从f到f的同伦，称为f到f的恒等同伦．

（2）若$H:X\times[0,1]\to Y$是从f_0到f_1的同伦，则

$$\overleftarrow{H}: X\times[0,1]\to Y\text{，}\overleftarrow{H}(x,t)=H(x,1-t)$$

是从 f_1 到 f_0 的同伦，称为H的逆同伦.

（3）设C是 $\mathbb{R}^n$ 的凸子集，X是拓扑空间，则任意两个连续映射 $f,g:X\to C$ 同伦.事实上，连续映射

$$H: X\times[0,1]\to C\text{，}H(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$$

就是从f到 g 的同伦. 这样的同伦称为直线同伦.

如果在把一个连续映射 f_0 连续变形为另一个连续映射 f_1 的过程中要求它在一个子集上保持不动，就得到相对同伦的概念.

定义1.1.2 设A是X的子空间；$f_0,f_1:X\to Y$ 是连续映射. 称 f_0,f_1 相对于A同伦若存在连续映射 $H:X\times[0,1]\to Y$ 满足：

（i）$\forall x\in X, H(x,0)=f_0(x), H(x,1)=f_1(x)$；

（ii）$\forall a\in A, \forall t\in[0,1], H(a,t)=f_0(a)=f_1(a)$.

此时称H为从 f_0 到 f_1 的一个相对于A的同伦，记为 $H: f_0\Rightarrow f_1(\text{rel }A)$.

设X，Y是拓扑空间，$[X，Y]$是X到Y的全体连续映射之集，A是X的子集.用$\approx(\text{rel }A)$表示$[X，Y]$上的二元关系：相对于A同伦. 换言之，$f\approx g(\text{rel }A)$ 当且仅当存在

$$H: f\Rightarrow g(\text{rel }A).$$

显然$\approx(\text{rel }A)$是自反的和对称的. 若A是空集，则$\approx(\text{rel }A)$简记为$\approx$.

为了研究二元关系$\approx(\text{rel }A)$的性质，先来探讨同伦的复合. 有趣的是，同伦之间存在两种自然的复合方式.

1. 同伦的第一种复合方式

设A是X的子空间. 考虑下列情况（图1.5）：

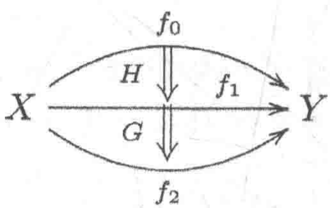


图1.5

其中 $H: f_0\Rightarrow f_1(\text{rel }A)$，$G: f_1\Rightarrow f_2(\text{rel }A)$. 令

$$H*G(x,t)\begin{cases}H(x,2t), & t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ G(x,2t-1), & t\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

由粘合引理，$H*G:X\times[0,1]\to Y$ 连续．因此 $H*G$ 是 f_0 到 f_2 的相对于 A 的同伦．这种复合称作同伦之间竖直方向的复合（vertical composition）．利用同伦之间竖直方向的复合立即可得以下结论．

命题1.1.1　设 X，Y 是拓扑空间，A 是 X 的子集，则 $\approx(\mathrm{rel}\,A)$ 是 $[X,Y]$ 上的等价关系．

2．同伦的第二种复合方式

设 A 是 X 的子集，B 是 Y 的子集．考虑下列情况（图1.6）：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_0"] \arrow[r, bend right, "f_1"'] \arrow[r, phantom, "H\Downarrow"] & Y \arrow[r, bend left, "g_0"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "G\Downarrow"] & Z \end{tikzcd}$$

图1.6

其中 $H:f_0\Rightarrow f_1(\mathrm{rel}\,A)$，$G:g_0\Rightarrow g_1(\mathrm{rel}\,B)$，$f_0^{\rightarrow}(A)=f_1^{\rightarrow}(A)\subseteq B$，则

$$G\bullet H:X\times[0,1]\to Z,\ G\bullet H(x,t)=G(H(x,t),t)$$

是 $g_0\circ f_0$ 到 $g_1\circ f_1$ 的相对于 A 的同伦．$G\bullet H$ 可以看作同伦 G 与 H 的复合，这种复合称作同伦之间水平方向的复合（horizontal composition）.不难看出 $G\bullet H$ 等于下列复合映射：

$$X\times[0,1]\xrightarrow{1_X\times\Delta_{[0,1]}}X\times[0,1]\times[0,1]\xrightarrow{H\times 1_{[0,1]}}Y\times[0,1]\xrightarrow{G}Z,$$

其中 $\Delta_{[0,1]}:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ 是对角映射（$\Delta_{[0,1]}(t)=(t,t)$）．

特别地，若 $f,g:X\to Y$ 同伦，则对任意连续映射 $k:W\to X$，$h:Y\to Z$，复合映射 $f\circ k,g\circ k$ 同伦，$h\circ f,h\circ g$ 同伦．

由命题1.1.1，$[X,Y]$ 上（相对于空集）的同伦关系 $\approx$ 是 $[X,Y]$ 上的等价关系．借助于等价关系 $\approx$，我们引入拓扑空间同伦等价的概念．

定义1.1.3　设 X，Y 是拓扑空间，$f:X\to Y$ 连续．

（1）$f:X\to Y$ 称为同伦等价若存在连续映射 $g:Y\to X$ 使得

$$g\circ f\approx 1_X,\quad f\circ g\approx 1_Y.$$

（2）称X，Y同伦等价（或具有相同的伦型）若存在同伦等价$h:X\to Y$.

同胚的拓扑空间显然同伦等价．不难验证同伦等价具有自反性、对称性和传递性．

来看下面的一个例子．

挖去原点的实平面$X=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$与单位圆周$S^1$同伦等价．令$i:S^1\to X$记含入映射，$f:X\to S^1$定义如下

$$f(r)=r/|r|,$$

则i，f连续并$f\circ i=1_{S^1}$.又因为

$$H:X\times[0,1]\to Y,\quad H(r,t)=\frac{r}{|r|^t}$$

是从1_X到$i\circ f$的同伦，所以$i:S^1\to X$是同伦等价.

1.1.2　形变收缩核

回忆拓扑空间X的子空间A称为X的一个收缩核（retract）．若存在连续映射$r:X\to A$使得$r\circ i_A=1_A$，其中$i_A:A\to X$表示含入映射。

定义1.1.4　拓扑空间X的子空间A称为X的形变收缩核（deformation retract）．若存在连续映射$r:X\to A$使得

$$i_A\circ r\approx 1_X,\quad r\circ i_A=1_A,$$

其中$i_A:A\to X$是含入映射.

看一个例子：单位圆周S^1是挖去原点的实平面$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$和圆柱面的形变收缩核.

命题1.1.2　设A是拓扑空间X的收缩核，$r:X\to A$是收缩映射（即$r\circ i_A=1_A$）．设E是X上的等价关系，$q_X:X\to X/E$是商映射．E限制在A上得到的等价关系仍记为E，相应的商映射记为$q_A:A\to A/E$.

（1）若$r:X\to A$保持等价关系E，即对任意$(x,y)\in E$都有$(r(x),r(y))\in E$，则A/E是X/E的收缩核.

（2）若存在$i_A\circ r$到1_X的同伦$H:X\times[0,1]\to Y$使得对任意$(x,y)\in E$以及$t\in[0,1]$都有$(H(x,t),H(y,t))\in E$，则A/E是X/E的形变收缩核.

证：（1）定义映射$\widetilde{i_A}:A/E\to X/E$与$\tilde{r}:X/E\to A/E$如下：

$$\widetilde{i_A}([a])=[a],\quad \tilde{r}([x])=[r(x)].$$

因为$r:X\to A$保持等价关系E，$\tilde{r}$是良定义的．容易验证图1.7交换：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "q_A"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q_X"] & A \arrow[d, "q_A"] \\
A/E \arrow[r, "\widetilde{i_A}"'] & X/E \arrow[r, "\tilde{r}"'] & A/E
\end{tikzcd}$$

图1.7

于是$\widetilde{i_A}\circ q_A$，$\tilde{r}\circ q_X$连续．由于q_A,q_X都是商映射，故$\widetilde{i_A}$，$\tilde{r}$连续．又因为对任意的$[a]\in A/E$都有

$$\tilde{r}\circ\widetilde{i_A}([a])=[r(a)]=[a],$$

所以A/E是X/E的收缩核．

（2）由于$i_A\circ r=H(-,0)$，故$r:X\to A$保持等价关系E，因此映射

$$\tilde{r}:X/E\to A/E,\ \tilde{r}([x])=[r(x)]$$

是良定义的，并且$\tilde{r}\circ\widetilde{i_A}=1_{A/E}$．余下说明映射

$$G:X/E\times[0,1]\to X/E,\ G([x],t)=[H(x,t)]$$

是从$\widetilde{i_A}\circ\tilde{r}$到$1_{A/E}$的同伦即可．首先，由于[0，1]是紧Hausdorff空间，由Whitehead定理知$q_X\times 1:X\times[0,1]\to(X/E)\times[0,1]$是商映射．又因为$G\circ(q_X\times 1)=q_X\circ H$连续，故$G$连续．其次，任给$[x]\in X/E$，

$$G([x],0)=[H(x,0)]=[r(x)]=\widetilde{i_A}\circ\tilde{r}([x]),$$

$$G([x],1)=[H(x,1)]=[x].$$

于是G是从$\widetilde{i_A}\circ\tilde{r}$到$1_{A/E}$的同伦．

看下面一个例子．

S^1是Mobius带的形变收缩核．令

$$X=[-1,1]\times[-1,1],\quad A=\{(x,0)\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}.$$

定义$r:X\to A$如下：$r(x,y)=(x,0)$．显然$r\circ i_A=1_A$，因此A是X的收缩核．令

$$E=\{((-1,y),(1,-y))\mid y\in[-1,1]\}\cup\mathrm{id}_X.$$

则E是X上的等价关系，并且A/E同胚S^1，X/E同胚于Mobius带．由于

$$H:X\times[0,1]\to X,\quad((x,y),t)\mapsto(x,yt)$$

满足命题1.1.2（2）的条件，故S^1是Mobius带的形变收缩核．

定义1.1.5 拓扑空间X称为可缩空间若X与单点空间同伦等价．

命题1.1.3 设X是拓扑空间，则下列各条等价：

（1）X可缩.

（2）存在$c\in X$，$\{c\}$是X的形变收缩核.

（3）任给拓扑空间Y以及连续映射$f,g:Y\to X, f\approx g$.

（4）恒等映射1_X是零伦映射.

1.2 基本群

拓扑空X中一条道路指一连续映射$\alpha:[0,1]\to X$. $\alpha(0),\alpha(1)$分别称为α的起点和终点. 若$\alpha(0)=\alpha(1)$则称α为回路（loop）. 任给道路$\alpha:[0,1]\to X$, $\overleftarrow{\alpha}$表示α的逆道路，即$\overleftarrow{\alpha}=\alpha(1-s)$.

设$\alpha,\beta:[0,1]\to X$是拓扑空X中两条道路，并且α的终点与β的起点相同. 令

$$\alpha*\beta(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \beta(2t-1), & t\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

由连续映射的拼接引理知$\alpha*\beta:[0,1]\to X$是X中的一条道路，称为α，β的乘积道路（或者α，β的拼接）.

设X是拓扑空间，$[[0，1]，X]$记X中全体道路之集，即$[0，1]$到X的全体连续映射. 用~表示$[[0，1]，X]$上的等价关系$\approx(\mathrm{rel}\{0,1\})$. 准确地说，$\alpha\sim\beta$当且仅当存在连续映射$H:[0,1]\times[0,1]\to X$满足：

（i）$H(s,0)=\alpha(s),H(s,1)=\beta(s)$；

（ii）$\forall t\in[0,1],H(0,t)=\alpha(0),H(1,t)=\alpha(1)$.

此时称H为α到β的道路同伦，记为$H:\alpha\sim\beta$.

称X中的道路α，β道路同伦若$\alpha\sim\beta$.显然道路同伦的两条道路具有相同的起点和终点.

引理1.2.1 设$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$是$X$中的道路.若$\alpha_1\sim\alpha_2,\beta_1\sim\beta_2$并且$\alpha_1(1)=\beta_1(0)$，则$\alpha_1*\beta_1\sim\alpha_2*\beta_2$.

证：由于α_1,α_2具有相同的起点和终点，β_1,β_2具有相同的起点和终点，故$\alpha_2(1)=\beta_2(0)$. 设$H:\alpha_1\sim\alpha_2,G:\beta_1\sim\beta_2$. 令

$$F(s,t)=\begin{cases}H(2s,t), & s\leqslant\dfrac{1}{2},\\ G(2s-1,t), & s\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$